西安交通大学数学研究生教学丛书

计 算 机 数 学

——计算复杂性理论与NPC、NP难问题的求解

陈志平　徐宗本　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书全面、系统地介绍了计算复杂性理论的基本内容与各种 NPC 问题、NP 难问题等复杂问题的计算机求解方法.前四章分别简要介绍了线性规划、多面体理论、网络规划与动态规划等预备知识.第五至九章具体介绍了计算复杂性理论.包括复杂性的定义与分类,证明一个问题为 P 类或 NPC 类的基本方法,NPC 理论在分析、求解问题中的应用与近似算法的性能度量等.第十至十六章则主要以整数规划为框架,详细论述求解 NPC 及 NP 难问题各种不同形式的精确算法与近似算法.

本书可作为信息与计算科学、应用数学、计算机、管理科学等专业的研究生教材或本科生的选修课教材,也可供有关的科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学——计算复杂性理论与 NPC、NP 难问题的求解/陈志平、徐宗本编著.—北京:科学出版社,2001.8

(西安交通大学数学研究生教学丛书)

ISBN7-03-009151-5

Ⅰ.计… Ⅱ.①陈… ②徐… Ⅲ.电子计算机—数学—研究生—教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 03494 号

责任编辑:林 鹏 杨 波/责任校对:林青梅

责任印制:安春生/封面设计:高海英

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003 年 1 月第二次印刷 印张:19

印数: 3 001—5 000 字数:337 000

定价:28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

什么是计算机数学？依剑桥大学计算机系列丛书中《计算机数学》一书的作者 Cooke 和 Bez 的观点，早期国外所指计算机数学相当于我们现在所说的离散数学，它主要包括集合论、关系、代数结构、数据结构、基本的计算几何、形式语言和自动机等内容．因此，计算机数学是以离散量为研究对象的，它与计算机的软硬件结构密切相关，其讲授之目的在于帮助读者更深入地理解计算机的基本原理．然而，随着计算机科学与技术的蓬勃发展，特别是计算机在各个领域的广泛应用，计算机数学所研究的内容也在不断拓广与深入．人们发现由数理逻辑研究所产生的可计算性理论对于准确刻画计算机的计算能力非常有用，并由此导致了所谓的不可解性、难解性以及计算复杂性等理论．现在，谈到计算机数学较深层次的内容时，人们则主要是指形式语言与自动机、可计算性、不可解性与计算复杂性等理论．

实际应用中，当我们想利用计算机做任何一件事情(包括传统的各种数值计算与越来越多的非数值计算)时，首先会考虑的是所给问题能不能用计算机解决？若能解决，则总是希望在内存空间占用量尽可能少的同时，用尽可能短的时间来完成其求解任务．这一要求引出一系列相互联系而又非常实际的问题，如：怎样设计出满足要求的求解算法；如何分析、区别算法的好坏；可否改进现有的算法使其更有效；求解所给问题最好可能的算法会是什么，等等．要从一般角度回答第一个问题，即涉及可计算性理论，而回答其他问题则涉及算法复杂性理论．可计算性理论从建立某个可恰当描述计算机运作原理的计算模型出发，精确定义什么是计算、什么是可计算，再进一步回答某个或某类问题可否用计算机求解的问题．若所给问题可以求解，则称该问题是可计算的或可解的，否则称为不可解．算法复杂性理论试图在一般框架下分析各种不同类型的问题，通过考察可能存在的求解某个问题不同算法的复杂性程度来衡量求解该问题的难易程度，如是否很难求解或较易求解等．据此理论，我们可把应用中的问题分类，并进而利用计算复杂性理论对各种算法按其有效性进行分类．计算复杂性理论研究的是可用于估计、定界任一可行算法求解某类问题所需和仅需的时间工作量、空间占用量等计算资源的技术或方法，并同时指出求解特定问题的复杂度下界．

显然，从借助计算机来解决各类具体问题的角度看，人们最感兴趣，或许也是最重要的，当属掌握和运用可计算性与不可解性理论、计算复杂性理论以

及与其密切相关的、有助于理解这些理论的形式语言与自动机理论.而作为计算机数学经典内容的离散数学,则主要是有助于人们理解计算机的基本构成与运作原理.关于可计算性与不可解性理论、形式语言与自动机,除一些外文专著外,国内已有张立昂教授、张鸣华教授、沈泓教授等翻译或编写的很好的教材与专著,而关于离散数学、数据结构的书就更多了.然而,国内现有涉及计算复杂性理论的书,要么是简单概述该理论的一些基本概念与部分结果,要么是从递归函数、可计算函数或符号计算的角度予以阐述,难于理解与直接应用.有鉴于此,并考虑到篇幅的限制,本书将重点放在讲述计算复杂性理论的基本内容及其应用上.特别地,为使读者易于理解,我们将图灵(Turing)机作为基本的计算模型进行论述,这是因为图灵机不仅具有直观性,而且与实际的数字计算机之间存在许多相似.

本书力求用通俗的语言来全面、系统地介绍包括复杂性的定义、问题复杂性的分类、证明问题为 P 类或 NPC 类的方法、NPC 理论在分析与求解问题中的应用、近似算法的性能度量等在内的计算复杂性理论的基本内容.不同于已有著作,我们特别以整数规划作为描述 NPC 问题、NP 难问题的一般框架,阐述如何利用整数规划的理论与算法来设计求解 NPC、NP 难问题等不同类型的精确型算法与近似算法.精确型算法将主要介绍割平面类算法、分解算法与分枝定界算法等,而近似算法则主要介绍贪婪型算法、局部搜索算法、原始-对偶方法等.在现有介绍整数规划解法的书中,绝大多数仅是通过具体实例来说明如何用不同的方法去求解,层次较低,不利于对方法本身的深入理解及供学术研究参考.为此,本书对求解整数规划问题的每一类常用方法,从其基本思想、理论分析、具体实施到应用等都将做全面、深入的论述.

以问题、复杂性的一般分析及各种复杂问题有效求解算法的设计为主线,是本书在内容结构上的独特之处.而在写作上,我们力求作到条理清楚、易于理解.本书的另一特点是其内容的相对独立性,由于在前四章中已介绍了本书所需的线性规划、多面体理论、网络规划和动态规划等基础内容,阅读本书其他章节则无需别的专门知识,只需具备计算机基本知识即可.

本书可作为信息与计算科学、应用数学、计算机、管理科学与信息工程等专业的研究生教材或高年级本科生的选修课教材,也可供从事上述相关领域研究的科研人员、经常使用计算机求解各种复杂问题的工程技术人员、高级管理人员等参考.

本书写作中,作者们得到了他们的同事、研究生及家属的广泛支持与帮助.特别是作者陈志平的妻子和同事赵彩娥女士,她对全书进行了校对工作.不仅如此,作为本书的第一位读者,她还对本书的讲述风格、某些章节的编排等提出了许多宝贵的意见.没有她的帮助,本书不可能按时完成.本书曾在西

安交通大学理学院 1999 级和 2000 级研究生中试用，听课的研究生也对书中部分内容提出了修改意见，作者对他们也一并表示感谢．

本书的出版得到了科学出版社多位同志，特别是林鹏和杨波同志的大力支持与帮助．西安交通大学理学院万萍女士也提供了许多帮助．另外，作者的研究生邵峰为本书绘制了所有的插图．作者对他们也表示感谢．

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥和错误之处，欢迎广大读者批评指正．

作　者

2000 年 10 月

于西安交通大学

目　　录

第一章　线性规划

作为运筹学的一个重要分支,线性规划越来越广泛地被用于军事、工农业生产、各种商业活动以及政府管理部门等各个方面.今天,它已成为现代管理科学的重要基础与手段.关于线性规划理论、算法与应用的研究成果极为丰富,并不断有新的成果出现.本章仅对线性规划的几种典型求解算法与其对偶理论做一扼要介绍,目的是便于读者阅读和理解本书后面有关章节的内容.

1.1　线性规划的基本概念

线性规划是一种特殊的最优化问题.而最优化问题是研究某些具有数学结构的问题的最优解,通常表现为:对于给定的实际问题,研究如何从众多可行方案中选出某种意义下的最优方案.

一般地,可以用一二元集(c, F)来表示任一最优化问题,这里 c 表示目标函数,它是对不同解进行优劣比较的指标准则,$F\subseteq \mathbf{R}^n$ 表示可行解的集合,也常称为可行域或约束集.若用 $x\in \mathbf{R}^n$ 表示决策向量,则求解最优化问题等价于寻求某个 $x\in F$,使得 $c(x)$达到最小或最大.因此,最优化问题的一般形式可写成

$$\begin{aligned} \max \quad & c(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in F. \end{aligned}$$

若 $F=\mathbf{R}^n$,则称上述之问题为无约束最优化问题,并常简写为$\max\limits_{x\in\mathbf{R}^n} c(x)$.否则,就称其为约束最优化问题.约束最优化问题通常可表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & c(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x)=0, \quad i\in E, \\ & g_i(x)\leqslant 0, \quad i\in I, \\ & x\in X. \end{aligned}$$

这里 E 和 I 分别是等式约束、不等式约束的有限指标集,$g_i(x)$是约束函数.X 表示某种特殊的约束,通常是对变量的非负或上、下界要求.根据对决策变量、目标函数和约束函数的不同要求,可进一步将此一般的最优化问题划分为不同的类型.例如,当要求问题的全部或某些决策变量仅从某一离散集合,典型的情形是从整数的某一子集中取值时,就得到所谓的整数(混合整数)规划

问题.其他常见的类型还有动态规划、网络规划、随机规划、多目标规划等.而当目标函数和所有的约束函数均为 x 的线性函数时,相应的最优化问题就是线性规划问题,其一般形式为

$$\begin{aligned}\max\quad & z=c^{\mathrm{T}}x\\ \text{s.t.}\quad & a_i^{\mathrm{T}}x=(\leqslant,\geqslant)b_i,\ i=1,\cdots,m,\\ & x_j\geqslant 0,\ j\in J\subseteq N=\{1,2,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

这里 m、n 为有限的正整数,c、$a_i(1\leqslant i\leqslant m)$均为 n 维列向量,b_i 为常数.因为 $\min\ z=-\max(-z)$,对不等式约束($\leqslant$,$\geqslant$)可以通过引进称为松弛变量的辅助变量来使其转化为等式约束.若某个变量仅有有界约束,如 $x_j\geqslant(\leqslant)l_j$,则可令 $y_j=x_j-l_j(l_j-x_j)$,y_j 便成为非负变量;而如果 x_j 为自由变量,则可用 $x_j=u_j-v_j$,u_j,$v_j\geqslant 0$ 来代替 x_j.所以,对任一线性规划问题,我们总可采用这些转换使之变为如下的标准形式:

$$\max\quad c^{\mathrm{T}}x \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.}\quad Ax=b, \tag{1.2}$$

$$x\geqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 $c\in\mathbf{R}^n$ 称为价值系数向量,$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$为约束系数矩阵,$m\leqslant n$ 为约束条件的个数,$b\in\mathbf{R}^m$ 称为约束右端向量.记该线性规划问题的可行域为 $D=\{x\in\mathbf{R}^n\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$.若向量 $x\in D$,则称 x 为一可行点或可行解.

对任一线性规划问题,下面三种情况必占其一:一是 $D=\varnothing$,这时称该问题无解或者不可行;二是 $D\neq\varnothing$但目标函数的值在 D 上无界,这时称该问题无界;三是 $D\neq\varnothing$且目标函数有有限值,这时称该问题有最优解.求解线性规划问题就是要判别它应属于哪一种情形,而当问题有最优解时,还要在 D 中找出使目标函数达到最大的点,即问题的最优解,以及相应的最优目标函数值.为了刻画某一线性规划问题的具体性态,进而求解它,现在来引进一些用以描述问题可行解的概念.以下不妨假设系数矩阵 A 是行满秩的,即 $\mathrm{rank}(A)=m$.否则可通过对问题(1.1)～(1.3)作预处理以消去相关的行及对应的约束.

因假定$\mathrm{rank}(A)=m$,故 A 中必有 m 个线性无关的列向量,它们构成 $m\times m$ 的满秩方阵 B.将 A 中其余各列组成的子阵记为 N.于是可写 $A=(B,N)$.把 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的分量也相应地划分为 x_B 和 x_N 两部分,则 $Ax=b$ 可写作

$$Bx_B+Nx_N=b.$$

由于 B 是满秩方阵,B^{-1}存在,故由上述方程可求得

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N.$$

现在把 x_N 看作一组自由变量,给它任一组值 $\bar{x}_N$,则可得到 x_B 相应的一组值

$\bar{x}_B$,于是 $x=\begin{pmatrix}\bar{x}_B\\ \bar{x}_N\end{pmatrix}$ 就是方程组 $Ax=b$ 的一个解.若令 $\bar{x}_N=0$,则 $\bar{x}_B=B^{-1}b$.我们把约束方程组这种特殊形式的解 $x=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$ 称为基本解.一般情形的具体定义如下.

设 B 是矩阵 A 中的一个 m 阶满秩方阵,则称 B 为一个基;B 中 m 个线性无关的列向量称为基向量.一般地,通过选择不同的基向量可形成不同的基,即 A 中存在不止一个基.x 中相应于基向量的分量称为基变量,其他的变量称为非基变量.令所有的非基变量取值为零,所得解 $x=\begin{pmatrix}x_B\\ x_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$ 称为对应于 B 的基本解.基本解满足(1.2),但不一定满足(1.3),所以未必是可行解.但若基本解 $x\geqslant 0$,则称 x 为基本可行解,这时相应的基 B 称为可行基.一个基本可行解 x,如果它所有的基变量都取正值,则说它是非退化的;反之,若有的基变量也取零值,则说它是退化的.一个可行基对应着一个基本可行解;反之,若一个基本可行解是非退化的,那么它也对应着惟一的一个可行基;如果一个基本可行解是退化的,则一般来说它可由不止一个的可行基得到.一个线性规划问题,如果它的所有基本可行解都是非退化的,则称该问题是非退化的,否则称其为退化的.

给定一个基本解,我们很容易检验它是否为可行解,从而是否为基本可行解.那么,给定一个可行解,如何判别其是否为基本可行解呢?其实,由基本可行解的定义,不难证明下列结论.

定理 1.1 可行解 x 是基本可行解当且仅当它的正分量所对应的列向量线性无关.

关于基本可行解的存在性及其重要性,我们有下列关于线性规划的基本定理.

定理 1.2 若一个标准形式的线性规划问题有可行解,则它必有基本可行解.进而,若该线性规划问题的目标函数有有限最优值,则它必可在某个基本可行解处达到.

证明可参见张建中(1997).

由于基本可行解是由矩阵 A 中选择 m 个线性无关的列形成基矩阵后才得以确定,而从 n 个列向量中选择 m 个列的可能性总共有 C_n^m 个,因而基本可行解的数目是有限的,至多有 C_n^m 个.定理 1.2 后半部分的结论告诉我们:要求解标准形式的线性规划问题,只需在基本可行解的集合中进行搜索即可.这样一来,为求解线性规划问题,我们似乎只要求出并比较所有有限多个的基

本可行解就行了.其实这是不切实际的,因为尽管基本可行解数目有限,但当 n 较大时,其个数也将很大.所以,如何按一定的规则在基本可行解的一个子集中进行搜索对于有效求解线性规划问题非常重要.下一节介绍的单纯形算法即可达到这一目的.

1.2 单纯形算法

解标准形式线性规划问题的单纯形算法是由G.B.Dantzig在1947年提出的,它是在所论线性规划问题的基本可行解中确定最优解的一种迭代法.它产生一个使目标函数值单调上升的基本可行解序列.因为可行域 D 有界的线性规划问题有有限多个基本可行解,故若不出现退化解,则单纯形算法必经有限步迭代后终止于问题的最优解.

单纯形算法的主要思想是:先找一个基本可行解,判别它是否为最优解,如不是,则找出一个更好的基本可行解,再进行检验.如此进行迭代,直至找到最优解,或者判定原问题无界.因此,这里主要有两个问题:一是寻找初始的基本可行解;二是如何判别当前基本可行解的最优性或怎样对其进行修正以建立迭代格式.先考虑后一问题.为此,假设rank$(A)=m<n$,且假定已找到了一个非退化的基本可行解.

我们说找到了一个基本可行解,其实是指找到了一个基 B,并且已把方程组(1.2)式变换成等价的方程组

$$x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b. \tag{1.4}$$

为叙述方便,不妨设 B 由 A 的前 m 列构成,即 $B=(a_1,\cdots,a_m)$,相应地 $x_B=(x_1,\cdots,x_m)$.引进记号

$$\begin{aligned}\bar{a}_j&=B^{-1}a_j=(\bar{a}_{1j},\cdots,\bar{a}_{mj})^{\mathrm{T}}, &\quad j&=1,\cdots,n,\\ \bar{b}&=B^{-1}b=(\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_m)^{\mathrm{T}}, &\quad \bar{N}&=B^{-1}N.\end{aligned}$$

则(1.4)式可以写成

$$x_B+\sum_{j=m+1}^{n}x_j\bar{a}_j=\bar{b},$$

或等价地写成

$$x_B+\bar{N}x_N=\bar{b}. \tag{1.5}$$

显然,如果所取的基不同,则对应的方程表达式也不同.若 $\bar{b}\geqslant 0$,则(1.5)就对应着基本可行解 $\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{b}\\0\end{pmatrix}$.而当 $\bar{b}>0$ 时,该解为非退化的基本可行解.对(1.2)式进行了上述变换以后,目标函数也要作相应的变换,即将它用非基变量来表示.相应于 x 的划分对 c 亦进行对应的划分后,则有

$$\begin{aligned} z &= c^{\mathrm{T}} x = c_B^{\mathrm{T}} x_B + c_N^{\mathrm{T}} x_N \\ &= c_B^{\mathrm{T}} (\bar{b} - \bar{N} x_N) + c_N^{\mathrm{T}} x_N \\ &= c_B^{\mathrm{T}} \bar{b} + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - c_B^{\mathrm{T}} \bar{a}_j) x_j . \end{aligned} \tag{1.6}$$

若用 z_0 表示基本可行解 $\bar{x}$ 所对应的目标函数值,则 $z_0 = c_B^{\mathrm{T}} \bar{b}$,即(1.6)中的常数项.因 $\bar{a}, \cdots, \bar{a}_m$ 均为单位向量,故当 $j=1, \cdots, m$ 时,$c_j - c_B^{\mathrm{T}} \bar{a}_j = 0$.若引入下面的记号

$$\sigma_j = c_j - c_B^{\mathrm{T}} \bar{a}_j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

或用向量表示为

$$\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = c^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} A = (\sigma_B, \sigma_N) = (0, c_N^{\mathrm{T}} - c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N),$$

则(1.6)式可记为

$$z = c_B^{\mathrm{T}} \bar{b} + \sigma x = z_0 + \sigma x .$$

若 $\sigma \leqslant 0$,则对原问题的任一可行解 x,由 $x \geqslant 0$ 知 $\sigma x \leqslant 0$,从而 $c^{\mathrm{T}} \bar{x} = z_0 \geqslant z_0 + \sigma x = c^{\mathrm{T}} x$,这表明 $\bar{x}$ 必为原问题的最优解.相反,若向量 σ 有某个分量 $\sigma_p > 0$,显然 $m+1 \leqslant p \leqslant n$,则由上式或等价地(1.6)式知,通过增大相应非基变量 x_p 的值,保持其余非基变量不变,并保证 $x \geqslant 0$,则可以使目标函数值在可行域内进一步增大.这意味着只要 σ 存在正的分量,则当前的基本可行解 $\bar{x}$ 就不是最优解.

当对应于基 B 的基本可行解为非最优解时,单纯形法通过交换 B 与 N 中的一对列向量来形成一个新的基,记为 B^{+},使得相应于 B^{+} 的基本解为基本可行解,且使目标函数值要优于上一次迭代的函数值.具体做法如下:

由于增大相应于正分量 σ_p 的非基变量 x_p 可使目标函数值增大,且使该变量从非基变量变为基变量.因此,为使目标函数上升较快,在 σ 有不止一个正分量时,应取相应于

$$\sigma_p = \max\{ \sigma_j \mid j = 1, \cdots, n\}$$

的非基变量 x_p 作为入基变量,而取相应的列向量 a_p 进入基 B.为找出应从 B 中移出的离基向量 a_q,考察 x_B 受非基变量 x_p 增值的影响,因为

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N = \bar{b} - B^{-1} a_p x_p = \bar{b} - x_p \bar{a}_p .$$

如果 $\bar{a}_p \leqslant 0$,则任意增加 x_p 的值都可保证所形成的向量 x 可行,并同时使目标函数值不断增大,这表明可行域 D 是无界的,从而原问题无界.否则,如果 $\bar{a}_p$ 中存在正的分量,则增加 x_p 的值将使 x_B 中相应分量的值减小,为确保所得基本解的可行性,x_p 的值不应超过

$$x_p = \frac{\bar{b}_q}{\bar{a}_{qp}} = \min_{\bar{a}_{ip} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ip}} . \tag{1.7}$$

这时 x_B 中的第 q 个分量 $x_q=\bar{b}_q-x_p\bar{a}_{qp}=0$.其余分量仍保持大于 0,即 x_q 从基变量变为非基变量,相应的列向量 a_q 为离基向量.换句话说,用 N 中对应于 x_p 的列向量 a_p 交换 B 中对应于 x_q 的列向量 a_q 来得到 B^+,这一交换过程可表示为

$$B^+=B+(a_p-a_q)e_q^{\mathrm{T}}, \tag{1.8}$$

其中 e_q 为 $\mathbf{R}^m$ 中的第 q 个单位坐标向量.因为 $1+e_q^{\mathrm{T}}B^{-1}(a_p-a_q)=\bar{a}_{qp}>0$,所以由Sherman-Morrison公式知 B^+ 非奇异,从而构成 A 的一个新基.进而,相应于该基的基本解为

$$\begin{aligned}&x_i=\bar{b}_i-\frac{\bar{b}_q}{\bar{a}_{qp}}\bar{a}_{ip},\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad x_p=\frac{\bar{b}_q}{\bar{a}_{qp}},\\&x_i=0,\quad m+1\leqslant i\leqslant n,\quad i\neq p.\end{aligned} \tag{1.9}$$

该解为一可行解,即已找到对应于新基 B^+ 的基本可行解.

有了以上的论述,则可以给出单纯形算法的迭代步骤.鉴于 σ 在上述过程中所起的作用,常称 σ 为检验向量,其分量称为检验数.

·单纯形算法

步 1　找到一初始的基本可行解.

步 2　计算 $\bar{N}$,$\bar{b}$ 及检验向量 σ 等的值.令 $\sigma_p=\max\{\sigma_j\mid j=1,\cdots,n\}$.

步 3　若 $\sigma_p\leqslant 0$,停止,已找到线性规划问题的最优解 $x=\begin{pmatrix}\bar{b}\\0\end{pmatrix}$ 及最优值 $c_B^{\mathrm{T}}\bar{b}$.

步 4　若 $\bar{a}_p\leqslant 0$,停止,原问题无界.

步 5　由(1.7)式确定 q 的值,交换列向量 a_p 与 a_q,并分别由(1.8)式和(1.9)式确定新的基矩阵及对应的基本可行解.转步 2.

要应用上述的单纯形算法,还需要有一个确定初始基本可行解的方法.已有多种方法可用于确定初始解,这里只介绍一种称为两阶段法的典型方法.因必要时可通过在约束方程的两边同乘以 -1 来使约束右端项变为正值,故不失一般性,可设 $b\geqslant 0$.

对标准的线性规划问题(1.1)～(1.3)引入 m 个人工变量,并记其为 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_m)^{\mathrm{T}}$,考虑如下的辅助问题:

$$\begin{aligned}\max\ & g=-\sum_{i=1}^{m}r_i\\ \text{s.t.}\ & Ax+r=b,\\ & x\geqslant 0,r\geqslant 0.\end{aligned} \tag{1.10}$$

若记辅助问题的可行区域为 D',则显然 $x\in D$ 和 $\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\in D'$等价,而存在某个

$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in D'$的充要条件是辅助问题的最优值为 0.因此可通过解此辅助问题来获得原问题的初始解.

对于辅助问题(1.10),由人工变量对应的 m 列构成了可行的单位基.因 $b \geqslant 0$,它对应于一基本可行解 $\begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$,于是由此则可应用上述的单纯形算法进行迭代.由于对人工变量的非负要求,问题(1.10)的目标函数以零为上界,从而必有最优解.求得的最优解不外乎有两种可能:

一是$\max g < 0$.这表明不存在 x,使得$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in D'$,亦即不存在 $x \in D$.此时,原问题(1.1)~(1.3)没有可行解,计算可终止.

二是$\max g = 0$.这时自然有 $r = 0$,即所有的人工变量均变为非基变量,把它们除去后即可得到原问题(1.1)~(1.3)的基本可行解,这一段的工作称为第一阶段.基于所得基本可行解及相对应的可行基,就可开始第二阶段了,即采用上述的单纯形算法来正式开始求解原问题(1.1)~(1.3).

在前面的讨论中,我们假定基本可行解是非退化的,即 $\bar{b} > 0$.若标准型线性规划问题的每一个基本可行解都是非退化的,则用单纯形法计算时,每一次迭代都使目标函数值严格下降,因此出现过的解不可能再次出现.由于基本可行解的个数有限,单纯形算法的迭代过程一定在有限步内结束.但是,当出现退化解时,单纯形算法的迭代有可能出现循环,从而永远得不到最优解.

为了防止循环,人们对上述单纯形算法中选取出、入基变量的方法进行了改进,提出了一些新的选取规则,如简便的Bland规则等.另一个防止循环的典型方法是由Dantzig等人所提出的字典序方法,并由此产生了所谓的字典序单纯形法.因我们在后面介绍求解整数规划问题的割平面算法时要用到这种方法,下面就对该法的做一较详细的介绍.

1.3 字典序单纯形算法

若引进一新的变量 x_0 来表示目标函数(1.1),则标准型的线性规划问题(1.1)~(1.3)可简单地写为

$$\max\{x_0 \mid x_0 = c^{\mathrm{T}} x, Ax = b, x \geqslant 0\}.$$

假设 A 的秩为 m,则线性方程组 $Ax = b$ 的解集是一个 $n - m$ 维的线性流形,其中有 $n - m$ 个变量可任意取值.对 A 中的任意基 B,记它的非基变量为参变量 $t_1, \cdots, t_d$, $d = n - m$.以这些非基变量为参数,用高斯消去法从 $Ax = b$ 中解出基变量,则可将标准形的线性规划问题化成如下的参数形式:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_0 \\
\text{s.t.} \quad & x_0 = \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{0j}(-t_j), \\
& x_1 = \alpha_{10} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{1j}(-t_j), \\
& \cdots \\
& x_n = \alpha_{n0} + \sum_{j=1}^{d} \alpha_{nj}(-t_j), \\
& x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

当某个 x_i 是非基变量时,对应的方程式实际上变为恒等式 $x_i = 0 + (-1) \cdot (-x_i)$.记向量 $\bar{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_j = (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj})^{\mathrm{T}}$, $j = 0, 1, \cdots, d$.则可将上述的参数形式写成如下的向量形式:

$$
\max\{ x_0 \mid \bar{x} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{d} \alpha_j(-t_j),\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n\}.
$$

容易证明:

(i) 若 $\alpha_{i0} \geqslant 0$, $i = 1,2,\cdots,n$,则 $\bar{x} = \alpha_0$ 便是一个基本可行解.

(ii) 若 $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $j = 1,2,\cdots,d$,则对任何可行解 $\bar{x}$,必有 $x_0 \leqslant \alpha_{00}$.

(iii) 若所有的 $\alpha_{i0} \geqslant 0$, $\alpha_{0j} \geqslant 0$, $i = 1,2,\cdots,n$, $j = 1,2,\cdots,d$,则 $\bar{x} = \alpha_0$ 是一个基本最优解.

(iv) 若存在某个 s,使得 $\alpha_{0s} < 0$, $\alpha_s \leqslant 0$,则线性规划问题无最大值.

(v) 若存在某个 r,使得 $\alpha_{r0} < 0$, $\alpha_{rj} \geqslant 0$, $j = 1,2,\cdots,d$,则线性规划问题无可行解.

对于参数表达式

$$
\bar{x} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{d} \alpha_j(-t_j),
$$

如果要用 x_r 代替 t_s 来作为新的第 s 个参变量,则只要从 x_r 的表达式中解出 t_s,代入其他各式即可.设用 x_r 替换 t_s 后的参数表达式为

$$
\bar{x} = \bar{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{d} \bar{\alpha}_j(-\bar{t}_j),
$$

这里 $\bar{t}_s = x_r$,对 $j \neq s$, $\bar{t}_j = t_j$,则很容易证明 $\bar{\alpha}_j$ 与 α_j 之间有如下的关系成立.

定理 1.3 $\quad \bar{\alpha}_s = -\dfrac{1}{\alpha_{rs}}\alpha_s, \quad \bar{\alpha}_j = \alpha_j - \dfrac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\alpha_s, \quad j \neq s.$

现在引进字典序的概念.

一个非零向量 α,若按分量的下标顺序,第一个不为零的分量是正数,则称 α 是字典序正,记作 $\alpha \overset{L}{>} 0$.若 $-\alpha \overset{L}{>} 0$,则称 α 是字典序负,记作 $\alpha \overset{L}{<} 0$.零向

量称为字典序 0.对于两个向量 α 和 β,若 $\alpha-\beta\overset{L}{>}0$,则记为 $\alpha\overset{L}{>}\beta$.例如,$(1,-5,-6,4)^{\mathrm{T}}\overset{L}{>}0$,$(0,0,-1,8)^{\mathrm{T}}\overset{L}{<}0$.而$(0,-1,0,-8)^{\mathrm{T}}\overset{L}{>}(-9,9,8,7)^{\mathrm{T}}$.按照字典序,所有维数相同的向量构成一全序集合.有了以上准备,则可给出字典序单纯形方法的描述.

考虑问题

$$\max\left\{x_0 \,\middle|\, \bar{x}=\alpha_0+\sum_{j=1}^{d}\alpha_j(-t_j),\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\},$$

假设对于 $j\neq 0$,各个向量 α_j 已满足 $\alpha_j\overset{L}{>}0$.关于如何获得这样的初始表达式,将在本节末叙述.

·字典序单纯形算法

步 1　计算 $\alpha_{r0}=\min\{\alpha_{i0}:i=1,\cdots,n\}$.若 $\alpha_{r0}\geqslant 0$,则停止.$\bar{x}=\alpha_0$ 便是线性规划问题的最优解,且对任何可行解 $\bar{x}$,有 $\bar{x}\overset{L}{<}\alpha_0$.若 $\alpha_{r0}<0$,则进行步 2.

步 2　若所有的 $\alpha_{rj}\geqslant 0$,$j=1,\cdots,d$,则停止,原问题无可行解.相反,进行步 3.

步 3　按向量字典序的大小,计算

$$\max\left\{\frac{\alpha_j}{\alpha_{rj}}\,\middle|\,\alpha_{rj}<0,j=1,\cdots,d\right\}=\frac{1}{\alpha_{rs}}\alpha_s.$$

步 4　用 x_r 替换 t_s 作为新的第 s 个参变量,得新的表达式

$$\bar{x}=\bar{\alpha}_0+\sum_{j=1}^{d}\bar{\alpha}_j(-\bar{t}_j),$$

其中 $\bar{\alpha}_s=-\dfrac{1}{\alpha_{rs}}\alpha_s$,$\bar{\alpha}_j=\alpha_j-\dfrac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\alpha_s$,$\bar{t}_j=t_j$,$j\neq s$,$\bar{t}_s=x_r$.然后,用新的表达式代替原来的表达式,转到步 1.

关于上述算法,我们有如下结论.

定理 1.4　若对 $j=1,2,\cdots,d$ 有 $\alpha_j\overset{L}{>}0$,则 $\bar{\alpha}_j\overset{L}{>}0$,且 $\alpha_0\overset{L}{>}\bar{\alpha}_0$.

证　由 $\alpha_{rs}<0$,$\alpha_s\overset{L}{>}0$ 即得 $\bar{\alpha}_s=-\dfrac{1}{\alpha_{rs}}\alpha_s\overset{L}{>}0$.对于 $j\neq 0$,s,若 $\alpha_{rj}\geqslant 0$,则

$$\bar{\alpha}_j=\alpha_j-\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}\alpha_s\overset{L}{\geqslant}\alpha_j\overset{L}{>}0.$$

若 $\alpha_{rj}<0$,则由算法中步 3 里关于 s 的选取方法可知

$$\bar{\alpha}_j=\alpha_{rj}\left(\frac{1}{\alpha_{rj}}\alpha_j-\frac{1}{\alpha_{rs}}\alpha_s\right)\overset{L}{>}0.$$

又因为 $\alpha_{r0}<0$,$\alpha_{rs}<0$,$\bar{\alpha}_0=\alpha_0-\dfrac{\alpha_{r0}}{\alpha_{rs}}\alpha_s$,而 $\alpha_s\overset{L}{>}0$,故得 $\bar{\alpha}_0\overset{L}{<}\alpha_0$.　□

由定理 1.4 知,对于上述的字典序单纯形算法,在其迭代过程中,同样的

参数表达式决不会重复出现.同时,用关于基本可行解数目相同的论证方法知,参数表达式的数目不会超过 C_n^m 种.因此,字典序单纯形算法必在有限步内终止.

现在让我们回过头来讨论寻求字典序正(即对 $j\neq 0$, $\alpha_j \overset{L}{>} 0$)的初始表达式的方法,下述方法通常称作大 M 方法.

任给一个基 B,设其非基变量为 $t_1,\cdots,t_d$,而以 $t_j(1\leqslant j\leqslant d)$为参变量的参数表达式为

$$\bar{x}=\alpha_0+\sum_{j=1}^{d}\alpha_j(-t_j).$$

假设按字典序的大小,求得$\min\{\alpha_j \mid j=1,2,\cdots,d\}=\alpha_s$.

若 $\alpha_s \overset{L}{>} 0$,则已获得字典序正的表达式.否则,我们附加一个条件

$$x_{n+1}=M+\sum_{j=1}^{d}(-t_j)\geqslant 0,$$

即 $\sum_{j=1}^{d}t_j\leqslant M$,这里 M 是足够大的数.只要 M 取得充分地大,则可保证加上此参考条件后的问题与原问题等价.然后,以 x_{n+1}代替参变量 t_s,可得表达式

$$\bar{x}=\bar{\alpha}_0+\sum_{j=1}^{d}\bar{\alpha}_j(-\bar{t}_j),$$

其中 $\bar{\alpha}_s=-\alpha_s$, $\bar{\alpha}_j=\alpha_j-\alpha_s$, $j\neq s$, $\bar{\alpha}_0=\alpha_0-M\alpha_s$, $\bar{t}_s=x_{n+1}$, $\bar{t}_j=t_j$, $j\neq s$.显然,由于 α_s 的取法,这时已有 $\bar{\alpha}_s \overset{L}{>} 0$, $j=1,\cdots,d$.故可用上述字典序单纯形算法求解.

需要说明的是,本节和上节仅给出了求解线性规划问题的经典方法.为了减少这些单纯形方法的计算量,人们提出了一系列改进的单纯形算法;而为了增加算法的稳定性、减少舍入误差,又设计了基于逆阵的乘积形式与矩阵分解技术的、可用于求解大规模线性规划问题的各种矩阵分解形式的单纯形算法等等.有兴趣的读者可参阅 Dantzig(1963),钱颂迪(1990),张建中(1997)等.但是,还有另外一大类求解线性规划问题的算法,它们是基于线性规划的对偶理论而发展起来的,故以下我们先对线性规划的对偶理论作一简要介绍.

1.4　对偶理论

对偶理论所处理的是成对的线性规划问题,并研究它们的解之间的关系.若称其中的一个问题为原始问题,则另一个问题就称为它的对偶问题.

若取标准形式的线性规划问题作为原始问题,即

$$z_{LP}\triangleq\max\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax=b, x\geqslant 0\},\tag{1.11}$$

则它的对偶问题定义为如下的线性规划问题

$$w_{LP} \triangleq \min\{ ub \mid uA \geqslant c^{\mathrm{T}} \}. \tag{1.12}$$

这里 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)$,即 $u^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$.称满足条件 $uA \geqslant c^{\mathrm{T}}$ 的 u 为对偶可行解,使 ub 达到最小值 w_{LP}的对偶可行解称为对偶最优解.进而,可以类似 1.1 节定义对偶问题(1.12)的基本解、基本可行解,并分别称为对偶基本解、对偶基本可行解.相应地,称问题(1.11)的可行解、最优解为原始可行解、原始最优解等.由上述定义方式不难推出,对偶问题的对偶即为原始问题本身.进而,关于问题(1.11)与(1.12),我们有下述基本结果.

定理 1.5(弱对偶定理) 对于任何原始可行解 x^* 与对偶可行解 u^*,必有 $c^{\mathrm{T}} x^* \leqslant z_{LP} \leqslant w_{LP} \leqslant u^* b$.

证 由 x^* 的原始可行性知 $Ax^* = b$,从而 $u^* Ax^* = u^* b$,且 $x^* \geqslant 0$.又因 u^* 对偶可行,故 $u^* A \geqslant c^{\mathrm{T}}$,由此得 $u^* b = u^* Ax^* \geqslant c^{\mathrm{T}} x^*$.因此,对(1.11)的所有可行解 x,必有 $w_{LP} \geqslant c^{\mathrm{T}} x$,且对(1.12)的所有可行解 u 有 $z_{LP} \leqslant ub$,从而必有 $w_{LP} \geqslant z_{LP}$. □

这个定理告诉我们,对于两个互为对偶的线性规划问题,任一个问题的一个可行解将产生另一问题最优目标函数值的一个界.同时,由此定理易得下列推论.

推论 1.6 若问题(1.11)有无界最优值,则问题(1.12)不可行.

定理 1.7 若 B 为问题(1.11)的最优基,则 $u^* = \pi = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ 为问题(1.12)的最优解.

证 由 B 是最优基知 $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} A - c^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,因此 $u^* = \pi = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ 是一个对偶可行解.设 x^* 为对应于 B 的基本最优解,则有关系

$$c^{\mathrm{T}} x^* = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b = u^* b.$$

从而由定理 1.5 知 u^* 必为一个对偶最优解. □

定理 1.8(强对偶定理) 如果问题(1.11)和(1.12)同时存在可行解,则必同时有基本最优解.进而,$z_{LP} = w_{LP}$.

证 因假设两个问题均可行,由定理 1.5 可知 $c^{\mathrm{T}} x$ 有上界,ub 有下界,故易知(1.11)和(1.12)必都有最优解.因此,应用单纯形方法,必可求得一个最优基,再根据定理 1.7,即可证得该定理. □

其实,我们还可进一步证明:问题(1.11)和(1.12)同时有最优解的充要条件是它们同时有可行解.而且,若设 x^* 和 u^* 分别为(1.11)和(1.12)的可行解,则它们分别为问题(1.11)和(1.12)的最优解当且仅当 $c^{\mathrm{T}} x^* = u^* b$.

由上述讨论不难看出,对于互为对偶的问题(1.11)和(1.12),只可能有下列四种可能性之一:z_{LP}和 w_{LP}有限且相等;$z_{LP} = \infty$而问题(1.12)不可行;

$w_{LP}=-\infty$而问题(1.11)不可行;问题(1.11)和问题(1.12)均不可行.

定理 1.9　原始可行解 x^* 和对偶可行解 u^* 是原始最优解和对偶最优解的充要条件为

$$(u^* A-c^{\mathrm{T}})x^*=0.$$

证　由定理 1.5、1.7、1.8 易知,x^*、u^* 是原始最优解和对偶最优解的充要条件为 $c^{\mathrm{T}}x^*=u^*b=u^*Ax^*$,此即$(u^*A-c^{\mathrm{T}})x^*=0$. □

由于 $x^*\geqslant 0$,　$u^*A-c^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,故定理 1.9 中的充要条件等价于

$$(u^* a_j-c_j)x_j^*=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

这里 a_j 为 A 的第 j 列,常称其为互补松弛性条件.因此,若有某对偶最优解 u^*,使得对某下标 j 有 $u^*a_j>c_j$,此时称第 j 个约束对问题(1.12)是松的,则对一切原始最优解 x^*,必使 $x_j^*=0$.相应地,称第 j 个非负约束对问题(1.11)是紧的.若有某最优解 x^*,使得对某下标 j 满足 $x_j^*>0$,则对一切对偶最优解 u^*,必有 $u^*a_j=c_j$.

上述是针对线性规划问题的标准形式进行讨论的.若实际中问题的形式与此不同,则亦可类似地定义其对偶问题,并易证上述所有结论均成立.例如,假如原线性规划问题呈如下形式:

$$\max\{c^{\mathrm{T}}x\mid Ax\leqslant b,x\geqslant 0\},$$

则其对偶规划应写为

$$\min\{ub\mid uA\geqslant c^{\mathrm{T}},u\geqslant 0\}.$$

进而,可行解 x^*,u^* 分别是它们的最优解的充要条件为

$$(u^*A-c^{\mathrm{T}})x^*=0,\tag{1.13}$$

$$u^*(Ax^*-b)=0.\tag{1.14}$$

通常称对应于原始变量的(1.13)式为原始互补松弛性条件,而称(1.14)为对偶互补松弛性条件.

基于上述对偶理论,则可导出求解线性规划问题的另一类单纯形算法——对偶单纯形算法.该方法可看作是将单纯形算法用于求解线性规划的对偶问题.从其一个对偶基本可行解迭代到另一对偶基本可行解,并使目标函数值下降.由对偶理论,若在某一迭代步所得原始问题的基本解也是可行的,则可终止,我们已同时找到原始问题与对偶问题的最优解.对偶单纯形算法的一个优点是,当我们找不到原始问题的一个初始基本可行解,但却已知或很容易找到其对偶问题的一个对偶基本可行解时,则可用对偶单纯形算法来求解它.实际中经常遇到的一个典型例子是:我们已知某一线性规划问题的解,但在对其加上一些新的约束后该解不再可行.

给定一个基 B,令 $u=c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}$,则有

$$uA - c^{\mathrm{T}} = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}(B, N) - (c_B^{\mathrm{T}}, c_N^{\mathrm{T}}) = (0, c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}}).$$

因此,u 对偶可行当且仅当 $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N - c_N^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,这等价于 $\sigma \leqslant 0$.鉴于此,若 $c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} N \geqslant c_N^{\mathrm{T}}$,则称 B 为一对偶可行基.一般地说,基 B 可能仅是一原始可行基,或仅为一对偶可行基,或两者都不是,或两者都是.最后一种情形很重要,因由对偶理论知,若 B 同时为原始可行基和对偶可行基,则 $x^{\mathrm{T}} = (x_B^{\mathrm{T}}, x_N^{\mathrm{T}}) = (B^{-1}b, 0)^{\mathrm{T}}$ 为原始问题的一个最优解,而 $u = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ 为对偶问题的一个最优解.利用对偶可行基这一术语,则可类似 1.2 节中单纯形算法的导出过程来具体推出对偶单纯形算法的迭代格式.这里只给出其迭代步骤,其中向量 $\bar{b}$,$\bar{N}$,σ 等的定义同 1.2 节.

• 对偶单纯形算法

步 1 选取一对偶可行基 B,从而一对偶可行解.

步 2 若 B 亦为原始可行基,即有 $\bar{b} = B^{-1} b \geqslant 0$,则 $(x_B, x_N)^{\mathrm{T}} = (B^{-1} b, 0)^{\mathrm{T}}$ 为原始问题的一个最优解,$u = c_B^{\mathrm{T}} B^{-1}$ 为对偶问题的最优解,停止.否则令 $\bar{b}_q = \min\{\bar{b}_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

步 3 若 $\bar{a}^q \geqslant 0$,这里 $\bar{a}^q$ 为 $\bar{N}$ 的第 q 行,则停止,原始问题不可行.否则,令

$$p = \arg\min_j \left\{ \frac{\sigma_j}{\bar{a}_{qj}} : \bar{a}_{qj} < 0 \right\}.$$

步 4 交换离基向量 a_q 与入基向量 a_p,即令 $B^{+} = B \cup \{a_p\} \setminus \{a_q\}$,用 B^{+} 来代替 B,转步 1.

像对单纯形算法一样,也可对上述对偶单纯形算法提出各种改进,得到不同形式的改进对偶单纯形算法.进而,还可给出原始-对偶单纯形算法等,这里不再详述.

最后,作为对偶理论的应用,我们来证明有关线性不等式组是否可行的一些重要结果.

定理 1.10(Farkas 引理) 要么 $\{x \in \mathbf{R}_+^n : Ax \leqslant b\} \neq \varnothing$,要么存在一个 $v \in \mathbf{R}_+^m$,使得 $vA \geqslant 0$ 且 $vb < 0$,但这两者不可能同时成立.

证 考虑线性规划 $z_{LP} = \max\{0x \mid Ax \leqslant b, x \in \mathbf{R}_+^n\}$ 与其对偶问题 $w_{LP} = \min\{vb \mid vA \geqslant 0, v \in \mathbf{R}_+^m\}$.因该对偶问题有一显然的可行解 $v = 0$,故由线性规划的对偶理论知只可能有下列两种情形之一出现.

(1) $z_{LP} = w_{LP} = 0$,因此,$\{x \in \mathbf{R}_+^n : Ax \leqslant b\} \neq \varnothing$,且对所有使得 $vA \geqslant 0$ 的 $v \in \mathbf{R}_+^m$,有 $vb \geqslant 0$.

(2) $z_{LP} = w_{LP} = -\infty$,那么 $\{x \in \mathbf{R}_+^n : Ax \leqslant b\} = \varnothing$,且同时存在某一 $v \in \mathbf{R}_+^m$,使得 $vA \geqslant 0$ 和 $vb < 0$. □

推论 1.11(Farkas引理的变形)

1.要么$\{x\in \mathbf{R}_+^n: Ax=b\}\neq\varnothing$,要么$\{v\in \mathbf{R}^m: vA\geqslant 0, vb<0\}\neq\varnothing$.

2.要么$\{x\in \mathbf{R}^n: Ax\leqslant b\}\neq\varnothing$,要么$\{v\in \mathbf{R}_+^m: vA=0, vb<0\}\neq\varnothing$.

3.若 $P=\{r\in \mathbf{R}_+^n: Ar=0\}$,则要么 $P\setminus\{0\}\neq\varnothing$,要么$\{u\in \mathbf{R}^m: uA>0\}\neq\varnothing$.

1.5　内点算法

衡量一个算法好坏最主要的指标是看其需要多少计算时间.为避免计算机性能对算法执行时间的影响,通常用算法执行时所需基本运算的总次数来度量其所花时间.同时,为反映问题例子大小和不同数据值的影响,一般用最坏情况下所花的时间来讨论,并用输入数据的长度 L 来反映问题的规模.对于极值问题,L 往往与问题的变量数及约束数目密切相关.关于算法好坏的划分,目前广为接受的观点是:若一个算法所需的运行时间是关于问题规模 L 的一个多项式函数或以某一多项式为上界,则认为该算法是好的,并常称这类算法为*多项式时间算法*.否则,若算法的运行时间为 L 的指数函数,或以一个指数函数为下界,则认为该算法是坏的,并称其为*指数时间算法*.

大量的计算实践表明,单纯形算法及其变形是求解线性规划问题的一类收敛很快、相当有效的成功算法.但是,当把单纯形算法应用于下列线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min\quad & -2^{n-1}x_1-2^{n-2}x_2-\cdots-2x_{n-1}-x_n \\
\text{s.t.}\quad & x_1 \leqslant 5,\\
& 4x_1+x_2 \leqslant 5^2,\\
& 8x_1+4x_2+x_3 \leqslant 5^3,\\
& 2^n x_1+2^{n-1}x_2+2^{n-2}x_3+\cdots+4x_{n-1}+x_n \leqslant 5^n,\\
& x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{aligned}
$$

时,可以发现它需经 2^n-1 次迭代方能确定问题的最优解.这一例子表明,尽管单纯形算法在一般情况下是一个十分有效的算法,但按上述的分类方法它却不是一个好算法,而是指数时间的算法.

那么,是否存在求解线性规划问题的多项式时间算法呢? 第一个这样的算法是由前苏联数学家L.G.Khachiyan于 1979 年找到的,称为椭球算法.该算法利用线性规划的对偶理论,将线性规划问题的求解等价地转化为求线性不等式组的解.而对后者的求解是通过迭代方式来构造一系列体积递减的椭球,并使每个椭球均与线性不等式组的解集有非空的交,由此导出一多项式时

间算法.但遗憾的是,实际检验表明椭球算法的迭代次数要比单纯形法多得多,计算效果并不比单纯形算法好,故该方法仅是理论上的一个突破,并不实用.值得一提的是,由椭球算法所指出的求解线性规划问题与检验线性不等式组的可行性问题,进而检验某一点是否位于一多面体中的所谓成员问题(membership problem)、或等价地当点不在多面体中,用一线性不等式将该点从某个多面体中分离出来的分离问题(separation problem)等等问题求解之间的多项式时间等价性,我们就可以从理论上证明一些整数规划问题是不是多项式时间内可解的.

1984 年,印度数学家 N.Karmarkar 提出了求解线性规划问题的另一个多项式时间算法,后人称为 Karmarkar 算法.该算法不仅在理论上具有比椭球算法更低的计算时间阶,而且实际计算效果也要好得多.因而引起了学术界的广泛关注,并使线性规划求解算法的设计又一次成为研究的热点.

类似于椭球算法,Karmarkar 算法不是沿线性规划问题可行域的表面进行搜索,而是从可行域内部穿行、迭代地寻找最优解的.这种保持迭代点为可行区域之内点的思想是很有意义的.自 Karmarkar 算法产生起,不断有许多学者致力于改进、完善及推广这一类方法,并统称这种类型的算法为内点算法.到目前为止,关于内点算法的研究成果不下数万种,并不断有新的成果出现.进而,内点算法已不仅限于求解线性规划问题,还可用于求解二次规划、线性互补问题、非线性凸规划等.有兴趣的读者可参阅文献(Ye 1997).以下仅以某一特定内点算法的导出做为例子来对内点算法的设计予以说明.

考虑下列形式的线性规划

(LP) $$\min\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax=b,\ x\geqslant 0\},$$

像前面一样,这里假设 $c\in\mathbf{R}^n$,$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 和 $b\in\mathbf{R}^m$ 为给定的向量与矩阵.(LP)的对偶问题为

(LD) $$\min\{b^{\mathrm{T}}y \mid A^{\mathrm{T}}y\leqslant c\}.$$

以下称向量 $s=c-A^{\mathrm{T}}y$ 的分量为对偶松弛.用 $\mathscr{F}$ 表示所有三元向量 (x,y,s) 的集合,这里 x 和 (y,s) 分别为原始和对偶可行的.用 $\mathscr{F}^0$ 表示 $\mathscr{F}$ 中满足 $(x,s)>0$ 的点集.

求解线性规划问题的绝大多数内点算法均需假设 $\mathscr{F}^0\neq\varnothing$,或(LD)和(LP)的最优解集是有界的,且所要迭代求解的辅助问题的规模往往至少是原问题的二倍.为克服这些不足,我们来构造一个关联于(LP)和(LD)的齐次、自对偶辅助线性规划问题.这里所谓的齐次线性规划,并不是说所有约束必须是齐次的,或等价地所有右端项为零.我们允许有一个常称为正规化约束(normalizing constraint)的非齐次约束.而所谓自对偶线性规划,是指该规划问题的对偶问题等价于原问题本身.具体地,给定任何 $x^0>0$,$s^0>0$ 和 y^0,我

们构造联系(LP)和(LD)的齐次自对偶线性规划问题如下:

$$
\text{(HLP)}\quad
\begin{aligned}
\min\quad & ((x^0)^{\mathrm T}s^0+1)\theta \\
\text{s.t.}\quad & Ax-b\tau+\bar b\theta=0, && (1.15)\\
& -A^{\mathrm T}y+c\tau-\bar c\theta\geqslant 0, && (1.16)\\
& b^{\mathrm T}y-c^{\mathrm T}x+\bar z\theta\geqslant 0, && (1.17)\\
& -\bar b^{\mathrm T}y+\bar c^{\mathrm T}x-\bar z\tau=-(x^0)^{\mathrm T}s^0-1, && (1.18)\\
& x\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这里

$$\bar b=b-Ax^0,\quad \bar c=c-A^{\mathrm T}y^0-s^0,\quad \bar z=c^{\mathrm T}x^0+1-b^{\mathrm T}y^0.$$

因此,可以认为 $\bar b$,$\bar c$ 和 $\bar z$ 分别表示初始原始点、对偶点的“不可行性”和原始-对偶“差”.

当 $\tau=1,\theta=0$ 时,约束(1.15)~(1.17)分别表示原始(与 $x\geqslant 0$ 一起)、对偶可行性和反向的弱对偶性,所以它们一起定义了原始、对偶最优解.以 τ 做为变量就产生了构成对偶于约束(1.17)的所需变量.而为了使 $x=x^0$,$(y,s)=(y^0,s^0)$达到可行,我们加上了带有适当系数的辅助变量 θ.最后,加上约束(1.18)是为了达到自对偶性.

用 s 表示关于约束(1.16)的松弛向量,而用 κ 表示关于约束(1.17)的松弛量.用 $\mathscr{F}_h$ 表示对(HLP)可行的所有点$(y,x,\tau,\theta,s,\kappa)$的集合,$\mathscr{F}_h^0$表示 $\mathscr{F}_h$ 中满足$(x,\tau,s,\kappa)>0$ 的严格可行点集.利用各个约束及系数之间的关系,我们可以将约束(1.18)表示为

$$(s^0)^{\mathrm T}x+(x^0)^{\mathrm T}s+\tau+\kappa-((x^0)^{\mathrm T}s^0+1)\theta=(x^0)^{\mathrm T}s^0+1.$$

这个约束对(HLP)起着正规化约束的作用.最后,注意到(HLP)的约束构成一斜对称系统,这其实就是为什么它是一个自对偶线性规划的原因.

现在,用(HLD)表示(HLP)的对偶,并分别用 y',x',τ'和 θ'来表示相对于约束(1.15)、(1.16)、(1.17)和(1.18)的对偶乘子向量或标量,则由(HLP)约束系数阵的斜对称性等易证有下列结论成立.

引理 1.12

(i) (HLD)有与(HLP)相同的形式,即若用(y',x',τ',θ')来代替(y,x,τ,θ),则(HLD)就是(HLP).

(ii) (HLP)有一严格可行解

$$y=y^0,\quad x=x^0>0,\quad \tau=1,\quad \theta=1,\quad s=s^0>0,\quad \kappa=1.$$

(iii) (HLP)有一最优解且其最优解集有界.

(iv) (HLP)的最优值为零,且对任何可行点$(y,x,\tau,\theta,s,\kappa)\in\mathscr{F}_h$,有

$$((x^0)^{\mathrm T}s^0+1)\theta=x^{\mathrm T}s+\tau\kappa.$$

(v) 存在一最优解$(y^*,x^*,\tau^*,\theta^*=0,s^*,\kappa^*)\in\mathscr{F}_h$,使得

$$\begin{pmatrix} x^* + s^* \\ \tau^* + \kappa^* \end{pmatrix} > 0,$$

并称这样的解为一严格自互补解.

以下简单地取 $y^0=0$, $x^0=e$ 及 $s^0=e$.这里 e 是分量全为 1 的 n 维列向量,则(HLP)可变换为

$$\text{(HLP)}\quad \begin{array}{ll} \min & (n+1)\theta \\ \text{s.t.} & Ax - b\tau + \bar{b}\theta = 0, \\ & -A^{\mathrm{T}}y + c\tau - \bar{c}\theta \geqslant 0, \\ & b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x + \bar{z}\theta \geqslant 0, \\ & -\bar{b}^{\mathrm{T}}y + \bar{c}^{\mathrm{T}}x - \bar{z}\tau = -(n+1), \\ & x \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0. \end{array}$$

而 $\bar{b}=b-Ae$, $\bar{c}=c-e$, $\bar{z}=c^{\mathrm{T}}e+1$.同样,若将这些联合起来,则最后的等式约束可写为

$$e^{\mathrm{T}}x + e^{\mathrm{T}}s + \tau + \kappa - (n+1)\theta = n+1.$$

现在,我们可以将(HLP)的最优解与(LP)和(LD)的最优解联系起来,具体地有下列定理.

定理 1.13 设(y^*, x^*, τ^*, $\theta^*=0$, s^*, κ^*)为(HLP)的一个严格自互补解,则

(i) (LP)有一(可行且有界的)解当且仅当 $\tau^*>0$.这时 x^*/τ^* 为(LP)的一个最优解,而(y^*/τ^*, s^*/τ^*)为(LD)的一个最优解.

(ii) 如果 $\tau^*=0$,那么 $\kappa^*>0$,这意味着 $c^{\mathrm{T}}x^*-b^{\mathrm{T}}y^*<0$.也就是说,$c^{\mathrm{T}}x^*$ 和 $-b^{\mathrm{T}}y^*$ 中至少有一个严格小于零.若 $c^{\mathrm{T}}x^*<0$,则(LD)不可行;若 $-b^{\mathrm{T}}y^*<0$,则(LP)不可行.而如果 $c^{\mathrm{T}}x^*<0$ 且 $-b^{\mathrm{T}}y^*<0$,则(LP)和(LD)均不可行.

证 若(LP)和(LD)均可行,则存在(LP)和(LD)的一个严格互补解对 $\bar{x}$ 和($\bar{y}$, $\bar{s}$),使得

$$(\bar{x})^{\mathrm{T}}\bar{s}=0, \qquad \bar{x}+\bar{s}>0.$$

令

$$\alpha = \frac{n+1}{e^{\mathrm{T}}\bar{x}+e^{\mathrm{T}}\bar{s}+1} > 0,$$

则可以证明

$$\bar{y}^* = \alpha\bar{y}, \quad \bar{x}^* = \alpha\bar{x}, \quad \bar{\tau}^* = \alpha, \quad \bar{\theta}^* = 0, \quad \bar{s}^* = \alpha\bar{s}, \quad \bar{\kappa}^* = 0$$

为(HLP)的一个严格自互补解.因(HLP)的一个严格互补解的支撑集是惟一的,在(HLP)的任何严格互补解处必有 $\tau^*>0$.

相反,若 $\tau^*>0$,那么 $\kappa^*=0$.这意味着

$$Ax^* = b\tau^*,\ A^{\mathrm T} y^* + s^* = c\tau^* \text{ 且 } (x^*)^{\mathrm T} s^* = 0.$$

因此,x^*/τ^* 为(LP)的一个最优解,而$(y^*/\tau^*, s^*/\tau^*)$为(LD)的一个最优解.(i)成立.

若 $\tau^* = 0$,那么 $\kappa^* > 0$,从而 $c^{\mathrm T} x^* - b^{\mathrm T} y^* < 0$,也就是说,$c^{\mathrm T} x^*$ 和 $-b^{\mathrm T} y^*$ 中至少有一个严格小于零,不妨设 $c^{\mathrm T} x^* < 0$.另外,我们有

$$Ax^* = 0,\quad A^{\mathrm T} y^* + s^* = 0,\quad (x^*)^{\mathrm T} s^* = 0,\quad x^* + s^* > 0.$$

假设(LD)可行,则存在一解$(\bar y, \bar s \geqslant 0)$,使得 $A^{\mathrm T}\bar y + \bar s = c$.用 x^* 乘以这个方程的两边,我们得

$$0 \leqslant \bar s^{\mathrm T} x^* = c^{\mathrm T} x^* < 0,$$

矛盾.因此,(LD)必不可行.(ii)中的其他结论可类似证明. □

由该定理的证明,我们可以推得下列结论.

推论 1.14　令$(\bar y, \bar x, \bar\tau, \bar\theta = 0, \bar s, \bar\kappa)$为(HLP)的任一最优解,那么如果 $\bar\kappa > 0$,则要么(LP)不可行,要么(LD)不可行.

有了以上结论,我们就可以通过求解(HLP)来找到原问题(LP)或其对偶(LD)的解.为给出求解(HLP)的有效多项式时间算法,我们需要下列结论来导出(HLP)的路径的形式.

引理 1.15　(i) 对任何 $\mu > 0$,在 $\mathscr F_h^0$ 中存在惟一的$(y, x, \tau, \theta, s, \kappa)$,使得

$$\begin{pmatrix} Xs \\ \tau\kappa \end{pmatrix} = \mu e,$$

这里 $X = \mathrm{diag}(x)$表示以 x 的分量为对角元的对角矩阵,以下其他记号类似.

(ii) 设 Q 表示在加上松弛变量 s 和 κ 后(HLP)的约束系数阵的零空间,而$(d_y, d_x, d_\tau, d_\theta, d_s, d_\kappa)$位于 Q 中,即有

$$\begin{array}{rrrrrl} & Ad_x & -bd_\tau & +\bar b d_\theta & & = 0, \\ -A^{\mathrm T} d_y & & +cd_\tau & -\bar c d_\theta & -d_s & = 0, \\ b^{\mathrm T} d_y & -c^{\mathrm T} d_x & & +\bar z d_\theta & -d_\kappa & = 0, \\ -\bar b^{\mathrm T} d_y & +\bar c^{\mathrm T} d_x & -\bar z d_\tau & & & = 0. \end{array} \tag{1.19}$$

那么

$$(d_x)^{\mathrm T} d_s + d_\tau d_\kappa = 0.$$

利用该引理,我们可以定义(HLP)可行域中的一条路径为

$$\mathscr L = \left\{ (y, x, \tau, \theta, s, \kappa) \in \mathscr F_h^0 : \begin{pmatrix} Xs \\ \tau\kappa \end{pmatrix} = \frac{x^{\mathrm T} s + \tau\kappa}{n+1} e \right\},$$

我们称其为(HLP)的中心路径.显然,若 $X^0 s^0 = e$,则引理 1.12 中所给出的初始可行内点位于 $\mu = 1$的路径上,而我们选取 x^0 和 s^0 的方法满足 $X^0 s^0 = e$ 这一要求.对于某个 $\beta \in (0,1)$,定义该路径的一个邻域为

$$\mathcal{N}(\beta)=\left\{(y,x,\tau,\theta,s,\kappa)\in\mathcal{F}_h^0:\left\|\begin{pmatrix}Xs\\ \tau\kappa\end{pmatrix}-\mu e\right\|\leqslant\beta\mu,\mu=\frac{x^{\mathrm{T}}s+\tau\kappa}{n+1}\right\}.$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 l_2 范数.注意到由引理1.12之(iv),对于 $\mathcal{F}_h$ 中的任何可行点,我们有 $\theta=\mu$.

为了导出求解(HLP)的有效内点算法,我们利用已有的Mizuno-Todd-Ye型预估-校正算法(Mizuno 1993)来求解(HLP).具体地,求解(HLP)的预估-校正算法的迭代格式如下.

给定某一可行内点 $(y^k,x^k,\tau^k,\theta^k,s^k,\kappa^k)\in\mathcal{F}_h^0$,我们通过求解下列方程组来确定 $(d_y,d_x,d_\tau,d_\theta,d_s,d_\kappa)$:

$$(d_y,d_x,d_\tau,d_\theta,d_s,d_\kappa)\in Q, \tag{1.20}$$

$$\begin{pmatrix}X^kd_s+S^kd_x\\ \tau^kd_\kappa+\kappa^kd_\tau\end{pmatrix}=\nu\mu^ke-\begin{pmatrix}X^ks^k\\ \tau^k\kappa^k\end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

注意这里 Q 表示(HLP)的系数阵的零空间,由引理1.15,(1.20)其实等价于要求 $(d_y,d_x,d_\tau,d_\theta,d_s,d_\kappa)$ 满足方程组(1.19).

预估步:对任何偶数 k,$\beta=\dfrac{1}{4}$,我们已有 $(y^k,x^k,\tau^k,\theta^k,s^k,\kappa^k)\in\mathcal{N}(\beta)$.对于 $\nu=0$,求解方程组(1.20)~(1.21),然后令

$$y(\alpha)=y^k+\alpha d_y,\qquad x(\alpha)=x^k+\alpha d_x,$$
$$\tau(\alpha)=\tau^k+\alpha d_\tau,\qquad \theta(\alpha)=\theta^k+\alpha d_\theta,$$
$$s(\alpha)=s^k+\alpha d_s,\qquad \kappa(\alpha)=\kappa^k+\alpha d_\kappa.$$

我们按照下式来确定步长

$$\bar{\alpha}=\max\{\alpha:(y(\alpha),x(\alpha),\tau(\alpha),\theta(\alpha),s(\alpha),\kappa(\alpha))\in\mathcal{N}(2\beta)\}.$$

从而计算出下一个迭代点为

$$y^{k+1}=y(\bar{\alpha}),\quad x^{k+1}=x(\bar{\alpha}),\quad \tau^{k+1}=\tau(\bar{\alpha}),$$
$$\theta^{k+1}=\theta(\bar{\alpha}),\quad s^{k+1}=s(\bar{\alpha}),\quad \kappa^{k+1}=\kappa(\bar{\alpha}).$$

校正步:对任何奇数 k.求解带有 $\nu=1$ 的方程组(1.20)~(1.21),并令

$$y^{k+1}=y^k+d_y,\qquad x^{k+1}=x^k+d_x,\qquad \tau^{k+1}=\tau^k+d_\tau,$$
$$\theta^{k+1}=\theta^k+d_\theta,\qquad s^{k+1}=s^k+d_s,\qquad \kappa^{k+1}=\kappa^k+d_\kappa,$$

则我们有 $(y^{k+1},x^{k+1},\tau^{k+1},\theta^{k+1},s^{k+1},\kappa^{k+1})\in\mathcal{N}(\beta)$.

终止方法:定义 $\sigma^k=\{j:x_j^k\geqslant s_j^k,j=1,2,\cdots,n\}$.用 B 表示 A 对应于指标集 σ^k 的那些列,N 表示 A 其余的列.我们用最小二乘投影法来产生(HLP)的一个严格自互补最优解.这可分为下列两种情形.

情形1:$\tau^k\geqslant\kappa^k$,我们通过求解下列最小二乘问题来得到 y,x_B 和 τ

$$\min\|y^k-y\|^2+\|x_B^k-x_B\|^2+(\tau^k-\tau)^2$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & Bx_B - b\tau = 0, \\
& -B^{\mathrm{T}} y + c_B\tau = 0, \\
& b^{\mathrm{T}} y - c_B^{\mathrm{T}} x_B = 0.
\end{aligned}
$$

情形 2：$\tau^k < \kappa^k$，则通过求解下列问题来找出 y，x_B 和 κ.

$$
\begin{aligned}
\min\ & \| y^k - y \|^2 + \| x_B^k - x_B \|^2 + (\kappa^k - \kappa)^2 \\
\text{s.t.}\quad & Bx_B = 0, \\
& -B^{\mathrm{T}} y = 0, \\
& b^{\mathrm{T}} y - c_B^{\mathrm{T}} x_B - \kappa = 0.
\end{aligned}
$$

只要在预估-校正算法中所得解使 $(x^k)^{\mathrm{T}} s^k + \tau^k\kappa^k$ 足够小，则上述投影法保证所得到的解 x_B^* 和 s_N^*（其中对情形 1 $s_N^* = c_N\tau^* - N^{\mathrm{T}} y^*$，对情形 2 $s_N^* = -N^{\mathrm{T}} y^*$）为严格正的，而且在情形 1 时 τ^* 为正，在情形 2 时 κ^* 为正.

对于上述预估-校正算法，通过充分利用已有预估-校正型内点算法的有关理论结果，可以证明有下列收敛性结果.

定理 1.16　设(LP)和(LD)具有字节长度为 L 的整值数据，则由(HLP)的构造，(HLP)的数据仍保持为整值且其长度为 $O(\sqrt{n}L)$.因此，与所述终止技术一起，所给预估-校正算法将在 $O(\sqrt{n}L)$步迭代内产生(HLP)的一个严格自互补最优解.

再利用定理 1.13 的结论，则可得到下列结论.

推论 1.17　在 $O(\sqrt{n}L)$步迭代内，带有上面所述终止方法的预估-校正算法要么给出(LP)和(LD)的最优解，要么指出(LP)或(LD)是不可行的.

与已有许多内点算法相比，这里所给出的齐次、自对偶预估-校正型内点算法有以下显著优点.

在没有任何关于最优、可行或内点可行解的存在性的假设之下，所给算法可以求解线性规划问题；算法可从任一接近正坐标象限中心射向的、可行或不可行的正原始-对偶对开始迭代，且无须使用任何大 M 惩罚参数或相关下界，避免了大的数值参数引起的求解困难；不像现有许多内点算法需求解一规模加倍或更大的方程组，所给算法在每次迭代时，仅求解一维数几乎等于在标准的内点算法中相应方程组大小的一个线性方程组；若线性规划问题有最优解，则算法生成一同时达到可行性与最优性的迭代点列；若原问题不可行或无界，算法将会正确地识别出原始问题和对偶问题中至少一个的不可行性；算法总的效率比较高，它仅需 $O(\sqrt{n}L)$次迭代即可求解线性规划问题.

关于上述算法的详细说明及进一步的讨论，参见 Ye(1994).

第二章　多面体理论

多面体理论(polyhedral theory)在许多问题的理论分析与求解算法设计中很有用.利用该理论的有关术语与结论,我们可以给出线性规划问题可行域与基本可行解几何特性的精细刻画.进而,多面体理论在(混合)整数规划的理论及相关算法分析、计算几何与组合学等领域也起着非常重要的作用.本章简述有关多面体理论的基本概念及结论.

2.1　多面体的定义及其维数

给定一个集合 $S\subseteq\mathbf{R}^n$,若存在有限个 S 中的点 $\{x^i\}_{i=1}^l$ 及一个向量 $\lambda\in\mathbf{R}_+^l$,使得 $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1$ 且 $x=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x^i$,则称 $x\in\mathbf{R}^n$ 为 S 中点的一个凸组合.由 S 中的点的凸组合所生成的所有点的集合称为 S 的凸包,记为 $\mathrm{conv}(S)$.

在处理线性等式与不等式时常常会用到仿射独立的概念.

点集 $x^1,\cdots,x^k\in\mathbf{R}^n$ 称为是仿射独立的(affinely independent),如果方程组 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i=0$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=0$ 的惟一解是 $\alpha_i=0$, $i=1,\cdots,k$.

显然,线性独立性意味着仿射独立性,但反之不然.进而,易证有下列结论成立.

引理 2.1　下列论述相互等价.

(i) $x^1,\cdots,x^k\in\mathbf{R}^n$ 仿射独立.

(ii) $x^2-x^1,\cdots,x^k-x^1$ 线性独立.

(iii) $(x^1,-1),\cdots,(x^k,-1)\in\mathbf{R}^{n+1}$ 线性独立.

引理 2.2　若 $\{x\in\mathbf{R}^n: Ax=b\}\neq\varnothing$,则 $Ax=b$ 的仿射独立解的最大数目为 $n+1-\mathrm{rank}(A)$.

像在线性代数中一样,若 $x\in H$ 意味着对所有的 $\lambda\in\mathbf{R}^1$ 有 $\lambda x\in H$,且若 $x,y\in H$,那么 $x+y\in H$,则称 $H\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一个子空间.关于子空间的表述,我们有下列引理.

引理 2.3　下列论断相互等价:

(i) $H\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一子空间.

(ii) 存在一个 $m\times n$ 矩阵 A,使得 $H=\{x\in\mathbf{R}^n: Ax=0\}$.