

# 时频分析与小波变换

唐向宏 李齐良 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书全面系统地介绍了时频分析的基本理论、基本方法及应用。全书共 10 章,内容包括时频分析基础、短时傅里叶变换与 Gabor 展开、维格纳-威尔分布、小波变换与时频分析、离散小波变换与多分辨分析、尺度函数与小波的构造方法、小波包变换、二维小波变换、多带小波变换、多小波变换等内容。

本书选材广泛、内容丰富、重点突出,既有算法的理论基础,又有实用的算法,特别适合作为信号与信息处理、通信与电子系统、模式识别与智能系统、语音处理与编码、图像处理与编码、电路与系统、应用数学等专业的研究生教材或参考书,也可供从事信号处理及应用的广大科技人员使用和参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

---

时频分析与小波变换/唐向宏,李齐良编著. —北京:科学出版社, 2008

ISBN 978-7-03-020067-9

I. 时… II. ①唐…②李… III. ①时间-频谱分析②小波分析  
IV. TN911.6 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 178057 号

---

责任编辑:姚庆爽 王向珍 / 责任校对:赵燕珍  
责任印制:刘士平 / 封面设计:耕者设计工作室

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**中国科学院印刷厂** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2008 年 1 月第一次印刷 印张: 24

印数: 1—2 500 字数: 467 000

**定 价: 58.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

# 前 言

信号的时频分析是信号处理的一个重要领域，其研究对象主要是非平稳信号。时频分析的任务是描述信号的频谱如何在时间上变化，研究并了解时变频谱在数学和物理之间的对应关系，构造合适的时频分布并进行恰当的处理，达到不同的信号处理目的。因此，寻找合适的、性能优良的时频分布成为非平稳信号分析与处理的一个重要研究内容。目前，研究非平稳信号常用的方法有短时傅里叶变换、维格纳-威尔分布、科恩（Cohen）类等，不同分析方法具有不同的特点。短时傅里叶变换建立起来的频谱图是最简单、最直观的一种时频分布，但是在分析非平稳信号时，时频分辨率不能自适应改变。对于维格纳-威尔分布和科恩类，虽然具有良好的时频特性，可以准确估计信号瞬时频率、瞬时带宽等时频参数，但由于存在交叉干扰项，影响它们的实际应用范围。除此之外，非平稳信号分析与处理还包括时变谱估计和时变滤波等重要内容，如参数模型法时变谱估计、进化谱分析等，它们是平稳信号谱估计技术和最优过滤技术在非平稳信号处理中的延伸和发展。此外，非平稳信号分析与处理还包括一些重要专题，如特殊非平稳信号的平稳化处理、循环平稳信号分析与处理等。

小波分析是傅里叶分析发展史上具有里程碑意义的进展。近年来，随着小波理论的发展和应用，小波分析的数学理论和方法越来越引起人们的广泛重视。在数学家看来，小波分析是一个新的数学分支，它是泛函分析、傅里叶分析、样条分析、调和分析、数值分析的最完美结晶；在应用领域，特别是在信号处理、图像处理、语音分析、模式识别、量子物理及众多非线性科学等领域，它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破。小波分析优于傅里叶变换的地方是它在时域和频域上同时具有良好的局部化特性。由于它对高频成分采用逐渐精细的时域取样步长，从而可以聚焦到对象的任意细节，所以它被人们誉为数学显微镜。

本书将全面系统地介绍时频分析的理论和应用。从时间分析、频率分析、时间-带宽关系入手，阐述时频分析方法的发展历程，重点介绍短时傅里叶变换、维格纳-威尔分布和小波变换等时频分析方法的基本原理和实现方法，同时对不同的时频分析方法进行分析比较。本书注重理论与应用紧密结合，在介绍理论、原理、概念的同时列举了大量的实例。本书的特点是面向实际应用，从工程角度来论述短时傅里叶变换、维格纳-威尔分布和小波变换，并力求对每一个重要概念给出物理的、信号分析的、直观清晰的解释，重要的数学描述伴以详尽的推导和论证，再加上翔实的应用实例，使读者无论原来的专业背景、数学基础如何，

都比较容易理解书中的基本内容，掌握时频分析的基本方法。

全书共分 10 章，第 1 章叙述时频分析发展的历史及研究时频分析的一些数学知识，着重介绍傅里叶变换与傅里叶级数、信号的时域波形特征与频域波形特征。第 2 章介绍短时傅里叶变换与 Gabor 展开，其内容包括短时傅里叶变换及频谱图的性质、短时傅里叶变换的时频特征、离散短时傅里叶变换及实现方法、Gabor 展开方法等内容。第 3 章讲述维格纳-威尔分布，包括维格纳-威尔分布的定义和性质、维格纳-威尔分布与短时傅里叶变换的关系、广义双线性时频分布与核函数等内容。第 4 章讲述小波变换与时频分析，包括小波变换定义、性质以及小波变换与维格纳-威尔分布的关系等内容。第 5~8 章分别介绍离散小波变换与多分辨分析、尺度函数与小波的构造方法、小波包变换和二维小波变换。第 9 章着重介绍多带小波变换的定义、多带小波的多分辨分析、多带小波变换的分解与重构算法、多带小波的构造等内容。第 10 章着重介绍多小波变换，其中包括多尺度函数及多分辨分析、多尺度函数和多小波函数的构造、多小波变换的分解与重构算法、多小波包等内容。

本书是在作者多年科研工作和教学工作经验基础上完成的，并参考了大量相关专著和期刊。由于水平所限，书中不妥之处在所难免，殷切希望广大读者和同行批评指正。

编 者

2007 年 4 月

于杭州电子科技大学

# 目 录

## 前言

第 1 章 时频分析基础 .....	1
1.1 时频分析发展概述 .....	1
1.2 信号展开理论——框架与算子 .....	3
1.2.1 内积空间与正交投影 .....	4
1.2.2 函数的基本特性 .....	11
1.2.3 框架与算子 .....	12
1.3 傅里叶级数与傅里叶变换 .....	21
1.3.1 傅里叶级数 .....	22
1.3.2 傅里叶变换 .....	23
1.4 信号的时域波形特征与频域波形特征 .....	26
1.4.1 信号的时间波形特征 .....	27
1.4.2 信号的频域特性 .....	29
1.4.3 信号的带宽方程 .....	33
1.5 时频分析的基本概念 .....	36
1.5.1 非平稳信号与时频分布 .....	37
1.5.2 真边缘、整体平均与局部平均 .....	38
1.5.3 时频分布的特征函数 .....	40
1.5.4 时频分布的基本性质 .....	41
1.6 信号的不确定原理 .....	42
第 2 章 短时傅里叶变换与 Gabor 展开 .....	45
2.1 短时傅里叶变换及频谱图的性质 .....	45
2.1.1 短时傅里叶变换与频谱图定义 .....	45
2.1.2 短时傅里叶变换频谱图的性质 .....	53
2.2 短时傅里叶变换的时频特征 .....	55
2.2.1 整体平均 .....	55
2.2.2 局部平均 .....	57
2.3 离散短时傅里叶变换及实现方法 .....	63
2.3.1 离散时间信号的短时傅里叶变换 .....	64
2.3.2 离散短时傅里叶变换 .....	64
2.3.3 离散短时傅里叶变换的计算 .....	64
2.4 Gabor 展开 .....	67

2.4.1	连续 Gabor 展开	67
2.4.2	离散 Gabor 展开	69
2.5	时频局部化与窗函数选取	76
<b>第 3 章</b>	<b>维格纳-威尔分布</b>	<b>81</b>
3.1	连续维格纳-威尔分布	81
3.1.1	连续维格纳-威尔分布的时域定义	81
3.1.2	连续维格纳-威尔分布的频域定义	82
3.2	维格纳-威尔分布的基本性质	85
3.3	多信号的维格纳-威尔分布	91
3.4	维格纳-威尔分布与短时傅里叶变换的关系	94
3.4.1	平滑的维格纳-威尔分布	94
3.4.2	短时傅里叶变换频谱与维格纳-威尔分布的关系	95
3.4.3	伪维格纳-威尔分布	97
3.5	离散维格纳-威尔分布及计算	98
3.5.1	离散维格纳-威尔分布	98
3.5.2	基于 FFT 的离散维格纳-威尔分布算法	99
3.6	模糊函数	102
3.6.1	模糊函数的定义	102
3.6.2	模糊函数的性质	106
3.6.3	维格纳-威尔分布与解析信号	107
3.7	广义双线性时频分布与核函数	110
3.7.1	广义双线性时频分布的一般形式	110
3.7.2	核函数的计算及 $C_E$ 类时频分布的等价形式	113
3.8	时频分布中优良信息的提取	115
<b>第 4 章</b>	<b>小波变换与时频分析</b>	<b>118</b>
4.1	连续小波变换	118
4.2	连续小波变换的基本性质	127
4.3	一维小波实例	129
4.4	小波变换与维格纳-威尔分布的关系	135
<b>第 5 章</b>	<b>离散小波变换与多分辨分析</b>	<b>137</b>
5.1	离散小波与离散小波变换	137
5.2	二进小波与小波级数	138
5.2.1	二进小波变换与反演	138
5.2.2	二进小波的构造	143
5.2.3	小波级数	146
5.3	多分辨分析	151
5.3.1	多分辨分析概念	151

5.3.2 多分辨分析的构造条件 .....	156
5.4 多分辨分析的实现与 Mallat 算法 .....	164
5.4.1 小波分解算法 .....	164
5.4.2 小波重构算法 .....	166
5.5 小波抽样限制 .....	173
<b>第 6 章 尺度函数与小波的构造方法 .....</b>	<b>180</b>
6.1 紧支集正交小波基的构造 .....	181
6.1.1 正交小波的构造条件 .....	181
6.1.2 Daubechies 小波的构造 .....	185
6.2 利用 B-样条函数构造正交小波基 .....	194
6.2.1 B-样条函数与基样条空间 .....	195
6.2.2 正交样条小波基的构造 .....	201
6.3 双正交小波基及构造 .....	204
6.3.1 线性相位 FIR 滤波器的性质 .....	205
6.3.2 双正交小波与双正交小波变换 .....	207
6.3.3 利用 B-样条构造紧支集双正交小波基 .....	213
<b>第 7 章 小波包变换 .....</b>	<b>221</b>
7.1 正交小波包 .....	222
7.2 信号的正交小波包变换 .....	228
<b>第 8 章 二维小波变换 .....</b>	<b>236</b>
8.1 二维连续小波变换 .....	236
8.2 二维离散小波变换 .....	238
8.2.1 二维小波的构造 .....	238
8.2.2 二维小波变换的实现 .....	242
8.3 在图像边缘检测中的应用 .....	248
<b>第 9 章 多带小波变换 .....</b>	<b>257</b>
9.1 多带小波的多分辨分析 .....	257
9.2 多带小波变换的分解与重构算法 .....	261
9.2.1 多带小波变换的分解算法 .....	261
9.2.2 多带小波变换的重构算法 .....	263
9.3 多带紧支正交小波基的构造 .....	265
9.3.1 多带小波与多通道滤波器组 .....	265
9.3.2 利用余弦调制 PR-QMF 方法构造 $M$ -带小波基 .....	269
9.4 多带小波变换在信号处理中的应用 .....	277
9.4.1 图像的多带小波变换 .....	277
9.4.2 用多带小波变换实现图像的边缘检测 .....	280
<b>第 10 章 多小波变换 .....</b>	<b>282</b>

10.1	多尺度函数及多分辨分析 .....	282
10.2	多小波函数 .....	287
10.3	多尺度函数和多小波函数的构造 .....	290
10.3.1	多尺度函数的近似阶数与双尺度相似变换 .....	290
10.3.2	多尺度函数的构造算法 .....	295
10.3.3	正交多小波的构造 .....	299
10.4	离散多小波变换及实现 .....	307
10.4.1	多小波变换的分解与重构算法 .....	307
10.4.2	原始数据的预处理 .....	309
10.5	二维信号的多小波变换 .....	315
10.6	多小波包 .....	317
10.6.1	分解定理 .....	317
10.6.2	多小波包的定义及性质 .....	319
附录 A	傅里叶逆变换的证明 .....	327
附录 B	Matlab 时频工具箱简介 .....	331
附录 C	Matlab 小波分析工具箱简介 .....	349
参考文献	.....	366



# 第 1 章 时频分析基础

长期以来,在各种信号和数据的处理方面,特别是在频谱分析和各种滤波方法中,傅里叶变换(Fourier transform, FT)是最基本的数学工具之一。经过几十年的发展完善,从数学的角度看来,傅里叶变换已有非常丰富的内容与许多行之有效的有效的方法。但傅里叶变换反映的是信号或函数的整体特征,并且其时域和频域分辨率是不变的。近些年来,随着信号分析的深入,多分辨分析和局部信号的特征分析越来越受到重视,傅里叶变换对此却难以满足。小波变换(wavelet transform, WT)被认为是近年来在数学分析和方法上的重大突破,它是数学理论中泛函分析、傅里叶分析、样条分析和数值分析的结晶。小波变换与傅里叶变换不同,小波变换通过小波基函数的伸缩和平移来构成一系列分辨率不同的正交投影空间及其对应的基,然后用这组基去表示或逼近某一信号或函数。小波变换具有可变的时间和频率分辨率,即在低频时具有良好的频率分辨率,在高频时具有良好的时间分辨率,这一重要性质在信号处理、模式识别、量子物理及众多非线性科学领域中得到了广泛应用。本章首先对时频分析的发展过程作简要介绍,然后着重介绍信号的展开理论及信号的时频特征的描述方法及相关概念。

## 1.1 时频分析发展概述

近年来随着小波理论的发展和应用,小波变换的数学理论和方法越来越引起人们的广泛重视。在数学家看来,小波分析是一个新的数学分支,它是泛函分析、傅里叶分析、样条分析、调和分析、数值分析的最完美结晶。在应用领域,特别是在信号处理、图像处理、语音分析、模式识别、量子物理及众多非线性科学等领域,它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破。

经典傅里叶变换经过一个世纪的发展,已成为信号处理领域最强有力的分析方法和工具,这主要是由它的正交性和鲜明的物理意义以及快速简洁的计算方法所决定的<sup>[1]</sup>。但是,由于傅里叶变换是对时间求积,去掉了非平稳信号中的时变信号,因而要求信号是平稳的,对时变非平稳信号难以充分刻画。为了满足对突变信号、非平稳信号分析的要求,1946年,Gabor提出了加窗傅里叶变换分析方法<sup>[1-4]</sup>,亦称短时傅里叶变换(short time Fourier transform, STFT),通过适当窗函数的选取,就可实现一定程度上的时频分析,但是由于时间分辨率与频率分辨率要受到窗函数宽度的限制,总是不能同时达到最佳。1948年,Ville提出了著名

的维格纳-威尔分布 (Wigner-Ville distribution, WVD) 并应用于时频信号分析<sup>[2,5,6]</sup>, 在一定程度上弥补了傅里叶变换的不足。后来在此基础上, 人们又提出了科恩类时频分布等方法<sup>[2,3,7,8]</sup>, 所有这些都改善了经典傅里叶变换的性能, 使得傅里叶变换在语音、图像等非平稳信号分析中得到了广泛的应用并取得了许多令人满意的结果。这些方法后来在非平稳信号分析与处理中称为解析理论。

除以上解析理论外, 人们还从谱估计和时变滤波等方面对非平稳信号分析与处理进行研究, 提出了 AR、MA 和 ARMA 模型等一系列现代谱估计方法<sup>[9~11]</sup>, 它们是平稳信号谱估计技术和最优过滤技术非平稳信号处理中的延伸和发展。此外, 非平稳信号分析与处理还包括一些重要专题, 如特殊非平稳信号的平稳化处理、循环平稳信号分析与处理等。虽然这些模型与傅里叶变换相比具有更高的频率分辨率, 特别是在小数据量情况下, AR、MA 和 ARMA 模型的谱估计性能远好于傅里叶变换, 但这类变换的计算较复杂, 且对含有多个频率分量和瞬态过程不连续的信号并不是最合适的, 人们很难从其谱中看出信号的时间特性和共振时变特性, 因此, 信号的平稳性是这些模型要求的基本条件。

随着研究的深入, 突变信号和非平稳信号的分析和处理已成为人们研究的主要课题。因此, 寻找一种既能保持傅里叶变换的优点, 又能弥补傅里叶变换不足的新的正交展开系已成为人们研究的热点。小波变换便是在这种背景下迅速发展起来的一种新理论。

小波变换的基本思想来源于函数的伸缩与平移<sup>[12~18]</sup>, 它是通过基小波函数 (mother wavelet) 的伸缩与平移来构成一系列分辨率不同的正交投影空间及其对应的基, 这是小波变换不同于傅里叶变换之处, 正因为如此, 小波变换不再要求信号是平稳性的。小波变换具有可变的时间和频率分辨率, 这些性质在理论或应用中都非常重要。

小波分析方法的提出, 可以追溯到 1910 年 Haar 提出的构造小波规范正交基的思想及 1938 年 Littlewood-Paley 对傅里叶级数建立的 L-P 理论。其后, Calderon 于 1975 年用其早年发现的再生公式, 给出了抛物型空间上  $H^1$  的原子分解, 该公式的离散形式已接近小波展开, 但真正的小波研究高潮却开始于 20 世纪 80 年代, 1981 年 Stromberg 引入了 Sobolev 空间  $H^p$  的正交基<sup>[19]</sup>, 对 Haar 系进行了改造, 证明了小波函数的存在性。1982 年 Battle 在构造量子场论中使用了类似 Calderon 再生公式的展开<sup>[20]</sup>。1984 年, 法国科学家 Morlet 和 Grossman 根据地震数据的分析和要求<sup>[21,22]</sup>, 提出了连续小波变换的几何体系, 其仿射群下的不变性为小波兴起奠定了基础。1984~1988 年, Meyer、Battle 和 Lemarie 分别给出了具有快速衰减特性的小波基函数<sup>[23]</sup>, 小波变换得到进一步的发展。1987 年 Mallat 将计算机视觉领域的多尺度分析思想引入到小波变换中<sup>[24~26]</sup>, 提出了多分辨分析的概念, 统一了在此以前的 Stromberg、Meyer、Lemarie 和 Battle 等提出的具体小波函数的构造, 研究了小波变换的离散形式, 给出了用于信号分析和重构的快速小波变换

算法——Mallat 算法。Mallat 算法的提出将小波理论和传统的滤波方法联系起来，并且使人们在进行小波变换时不必给出小波的具体表达式，从而大大简化了小波应用难度，便于工程技术人员去理解和掌握。与快速傅里叶变换（fast Fourier transform, FFT）算法的出现类似，Mallat 算法极大地推动了小波变换在实际信号分析中的应用。1988 年，Daubechies 将 Mallat 多分辨分析的思想与 Burt 和 Adelson 的塔形分解方案相结合<sup>[27]</sup>，证明并给出了具有有限支集的正交小波基。1990 年，美国 A&M 大学的 Chui（崔锦泰）<sup>[17]</sup>和 Cohen 进一步研究了非正交小波基的构造方法<sup>[28]</sup>，提出了线性相位小波基的构造理论。与此同时，Goiimann 和 Wicherhauser 提出了小波包理论<sup>[29]</sup>，引入了最优基选择的概念，1992 年，Zou 等又提出了多带小波变换理论，将人们对小波变换的研究从二带推广到多带情况<sup>[30]</sup>。1994 年 Geronimo 等提出了多小波变换<sup>[31]</sup>，将单尺度小波变换推广到多尺度小波变换，使小波变换的理论又向前迈进了一大步。

随着小波变换理论研究的深入和日趋成熟，小波变换的应用也在多个研究领域中展开，小波变换已广泛应用于语音信号处理、图像信号处理、数据压缩、奇异值估计、非线性分析和雷达信号处理等方面。

## 1.2 信号展开理论——框架与算子

信号是信息的载体，是信息的物理表现形式，它通常是一个自变量或几个自变量的函数。如果信号仅用一个自变量表示，则称为一维信号，如语音信号；如果用两个以上的自变量表示，则称为多维信号，如图像信号。对一维信号，人们习惯用时间变量来刻画，即基本物理量随时间变化，如用  $f(t)$  来表示信号。根据信号在任意时刻的取值能否精确确定，信号可分为确定信号和随机信号。按时间变量取值形式，信号可分为连续时间信号和离散时间信号。

信号分析的主要目的就是了解信号特征，从信号中获取有用信息。如何来获取信号中的有用信息呢？常用的方法就是寻找一种简单有效的信号表示方法（或变换法），使信号所包含的重要特征能显示出来。在数学上，最基本的表示方法是用完备的函数集来展开信号。例如，对连续时间信号  $f(t)$ ，用完备的函数集

$\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  展开为

$$c_j = \langle f, \varphi_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_j^*(t) dt \quad (1-2-1)$$

对离散时间信号  $s(n)$ ，用完备的函数集  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  展开为

$$c_j = \langle f, \varphi_j \rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \varphi_j^*(m) \quad (1-2-2)$$

函数集的选取是由信号的特性或实际需要决定的，目的在于更好地理解信号的基本性质。下面简要介绍一些用函数集来展开信号的相关概念和衡量函数特性的相关概念。

### 1.2.1 内积空间与正交投影

为了描述方便及阅读其他相关的参考文献，在本书中，记  $\mathbf{R}$  为实直线，代表实数域； $\mathbf{R}^n$  为  $n$  维实数空间， $\mathbf{R}^n = \overbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}^n$ ； $\mathbf{R}^+$  表示非负实数； $\mathbf{Z}$  表示整数集； $\mathbf{N}$  表示自然数集（正整数）；对于复数  $\alpha$ ， $\alpha^*$  表示它的复共轭，虚数单位同  $i$  表示。

#### 1. 距离空间

对于  $\mathbf{R}^3$  实数空间上的两个矢量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  与  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  之间距离定义为  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}$ ，矢量  $\mathbf{x}$  的长度为  $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ，因此可定义距离空间<sup>[32, 33]</sup>。

**定义 1-1** 距离空间是一个集合  $X$  连同同一个满足下述条件的一个映射  $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ 。

- (1) 正性： $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ，且  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ；
- (2) 对称性： $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ；
- (3) 三角不等式： $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ 。

其中， $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  称为矢量  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  之间的距离。

#### 2. 线性赋范空间

**定义 1-2**  $X$  是数域  $\mathbf{R}$  上的线性赋范空间，如果对于每个元素  $\mathbf{x} \in X$ ，相应一个实数  $\|\mathbf{x}\|$  满足，对于  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ ， $\alpha \in \mathbf{R}$ ，有：

- (1)  $\|\mathbf{x}\| = 0$ ，当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ；
- (2)  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ ；
- (3)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 。

其中， $\|\mathbf{x}\|$  称为  $\mathbf{x}$  的范数。

当在  $X$  中能由范数导出距离  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  时，线性赋范空间也是距离空间。

#### 3. 巴拿赫空间

**定义 1-3** 一个完备的线性赋范空间称为巴拿赫（Banach）空间。

对于每个  $p$ ， $1 \leq p < \infty$ ，令  $L^p(\mathbf{R})$  表示在  $\mathbf{R}$  上可测函数  $f(t)$  的类，使勒贝格（Lebesgue）积分是有限的，即  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < \infty$ 。还有，令  $L^\infty(\mathbf{R})$  是几乎处处（a.e.）

有界函数的集合。因此，定义范数为

$$\|f(t)\|_p = \begin{cases} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right]^{1/p} & \text{对于 } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{-\infty < t < +\infty} |f(t)| & p = \infty \end{cases} \quad (1-2-3)$$

这时，每个空间  $L^p(\mathbf{R})$ ， $1 \leq p < \infty$ ，都是巴拿赫空间。其中， $\text{ess sup}$  称为本质上确界，即除  $t$  测度为 0 的集合外的上确界。

对于空间  $L^p(\mathbf{R})$  有闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1-2-4)$$

和赫尔德 (Hölder) 不等式：

对于  $q \geq 1$ ， $p \geq 1$ ， $1/q + 1/p = 1$

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q \quad (1-2-5)$$

当  $p = 2$ ， $q = 2$  时，称为柯西-施瓦茨 (Cauch-Schwarz) 不等式

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2 \quad (1-2-6)$$

#### 4. 内积空间

**定义 1-4** 设  $X$  为实数或复数域上的线性空间，若在  $X$  上定义内积 (inner product)，记为  $\langle f, g \rangle$ ， $f, g \in X$ ，并满足下述性质：

- (1) 对称性： $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$ ；
- (2) 线性性： $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$ ， $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ；
- (3) 正性： $\langle f, f \rangle \geq 0$ ，且  $\langle f, f \rangle = 0$ ，当且仅当  $f = 0$ 。

这样的线性空间  $X$  称为内积空间。

在内积空间  $X$  中，对于每个  $f \in X$  定义范数

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad (1-2-7)$$

则  $X$  变成一个线性赋范空间。

**定理 1-1** 设  $X$  为  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ，是一个内积空间 (实的或复的)，那么对所有的  $x, y \in X$  有：

- (1) 施瓦茨 (Schwarz) 不等式： $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ，当且仅当  $x$  和  $y$  线性相关时等号成立；
- (2) 三角不等式： $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ，当且仅当  $x$  和  $y$  线性相关时等号成立。

**证明** (1) 若内积空间  $X$  为实内积空间。令  $t$  是一个实变量，考虑下述不等式

$$0 \leq \|x - ty\|^2 = \langle x - ty, x - ty \rangle = \|x\|^2 - 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 \quad (1-2-8)$$

由于式 (1-2-8) 右边是关于  $t$  的非负二次多项式，不可能有两个不同的实根。因此，该二次多项式的判别式必定为非正，即

$$4|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 - 4\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \leq 0 \quad (1-2-9)$$

由此可证施瓦茨不等式成立。

若内积空间  $\mathbf{X}$  为复内积空间。可将  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  改写为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| e^{i\varphi} \quad (1-2-10)$$

其中,  $\varphi$  为  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  的相角。同样令  $t$  是一个实变量, 并考虑下述不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|e^{-i\varphi} \mathbf{x} - t\mathbf{y}\|^2 = \langle e^{-i\varphi} \mathbf{x} - t\mathbf{y}, e^{-i\varphi} \mathbf{x} - t\mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - t(\langle e^{-i\varphi} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, e^{-i\varphi} \mathbf{x} \rangle) + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - t(\langle e^{-i\varphi} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle e^{-i\varphi} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*) + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\operatorname{Re}\{te^{-i\varphi} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + t^2 \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned} \quad (1-2-11)$$

余下的证明与实内积空间类似。

(2) 由于

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + \|\mathbf{y}\|^2 \quad (1-2-12)$$

由施瓦茨不等式, 式 (1-2-12) 可改写为

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \quad (1-2-13)$$

所以三角不等式成立。

## 5. 希尔伯特空间—— $L^2(\mathbf{R})$ 和 $l^2(\mathbf{Z})$ 空间

**定义 1-5** 一个完备的内积空间称为希尔伯特 (Hilbert) 空间, 记为  $\mathbf{H}$ 。

希尔伯特空间的标准例子是平方可积空间  $L^2(\mathbf{R})$ 。

**定义 1-6** 对于  $-\infty \leq t \leq \infty$ ,  $L^2(\mathbf{R})$  空间表示所有平方可积函数组成的空间,

即

$$L^2(\mathbf{R}) = \left\{ f(t) : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (1-2-14)$$

$L^2(\mathbf{R})$  也包含那些不连续的函数, 该空间的内积定义为

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt, \quad \forall f(t), g(t) \in L^2(\mathbf{R}) \quad (1-2-15)$$

范数定义为

$$\|f(t)\| = \langle f(t), f(t) \rangle^{1/2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall f(t) \in L^2(\mathbf{R}) \quad (1-2-16)$$

另一个希尔伯特空间的例子是平方可和序列空间  $l^2(\mathbf{Z})$ 。

**定义 1-7**  $l^2(\mathbf{Z})$  空间是由所有平方可和序列构成, 即

$$l^2(\mathbf{Z}) = \left\{ \mathbf{c} = \{c_j, j \in \mathbf{Z}\}, \|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 < \infty \right\} \quad (1-2-17)$$

$l^2(\mathbf{Z})$  空间的内积定义为

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n d_n^*, \quad \forall \mathbf{c} = \{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}}, \quad \mathbf{d} = \{d_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z}) \quad (1-2-18)$$

范数定义为

$$\|\mathbf{c}\| = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle^{1/2} = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{c} = \{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z}) \quad (1-2-19)$$

对于内积空间  $\mathbf{X}$  中两矢量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$ , 如果有  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , 则称  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{v}$  正交。对于希尔伯特空间  $\mathbf{H}$  总存在正交基, 即存在一族归一化 (标准) 矢量  $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ , 使得

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbf{Z} \quad (1-2-20)$$

且对于所有属于希尔伯特的元素  $f \in \mathbf{H}$  有

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n \quad (1-2-21)$$

这时容易得到

$$\|f\| = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \mathbf{e}_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \quad (1-2-22)$$

注意 对于内积空间  $\mathbf{X}$ , 有重要的柯西-施瓦茨不等式, 即

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X} \quad (1-2-23)$$

特别是, 对于  $\forall f(t), g(t) \in L^2(\mathbf{R})$ , 有不等式

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt \right|^2 \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \right) \quad (1-2-24)$$

而对于  $\mathbf{c} = \{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z})$ ,  $\mathbf{d} = \{d_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z})$ , 有

$$\left| \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n d_n^* \right|^2 \leq \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 \right) \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |d_n|^2 \right) \quad (1-2-25)$$

## 6. 直和与正交投影

对于  $\mathbf{R}^3$  中的标准内积, 余弦定理为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta \quad (1-2-26)$$

其中,  $\theta$  为矢量  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  之间的夹角。式 (1-2-26) 意味着当且仅当  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  时,  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  正交 (垂直)。我们将把式 (1-2-26) 作正交的更一般的定义。

定义 1-8 设  $X$  是内积空间。

(1)  $X$  中两矢量  $x$  和  $y$ , 若  $\langle x, y \rangle = 0$ , 则称  $x$  与  $y$  正交;

(2) 矢量集  $e_j, j=1, 2, \dots, N$  称为规一化 (标准) 正交, 是指如果其中每个  $e_j$  具有单位长度  $\|e_j\| = 1$ , 而且彼此正交  $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j$ ;

(3) 两个子空间  $X_1 \subset X$  和  $X_2 \subset X$  称为正交, 是指  $X_1$  中的每个矢量与  $X_2$  中的每个矢量正交;

(4) 正交基是指  $X$  空间中的一个矢量基。

定理 1-2 设  $X_0$  是内积空间  $X$  的一个子空间, 假设  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  是  $X_0$  的正交基, 若  $v \in X_0$ , 那么

$$v = \sum_{j=1}^N \langle v, e_j \rangle e_j \quad (1-2-27)$$

对于内积空间来说, 除内积概念之外, 直和 (用符号“ $\oplus$ ”表示) 与投影也是十分重要的概念。

假设  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  是内积空间  $V$  的正交基, 若  $v$  由  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  张成, 那么由定理 1-2 得

$$v = \sum_{j=1}^N a_j e_j \quad (1-2-28)$$

其中,  $a_j = \langle v, e_j \rangle$ 。若  $v$  不是由  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  线性张成, 那么由式 (1-2-28) 得不到  $a_j$  的解。此时最好的办法是找一个  $v_0$ , 它是由  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  线性张成, 且与  $v$  尽可能地接近。如何决定与  $v$  接近的矢量  $v_0$ , 这就是内积空间中求正交投影的问题。

定义 1-9 设  $V_0$  是内积空间  $V$  的一个子空间, 对任何  $v \in V$ , 但  $v \notin V_0$ , 则  $v$  在  $V_0$  上的正交投影是唯一的矢量  $v_0 \in V_0$ , 它最接近  $v$ , 即

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\| \quad (1-2-29)$$

如图 1-1 所示, 从图中可以看出, 对于最接近于  $v$  的  $v_0$  的选择应使  $v - v_0$  矢量与  $V_0$  正交。当然, 若内积空间是  $\mathbf{R}^2$  或  $\mathbf{R}^3$  时, 图是容易画的, 但在更复杂的内积空间里, 图示就很抽象, 如  $L^2(\mathbf{R})$ 。

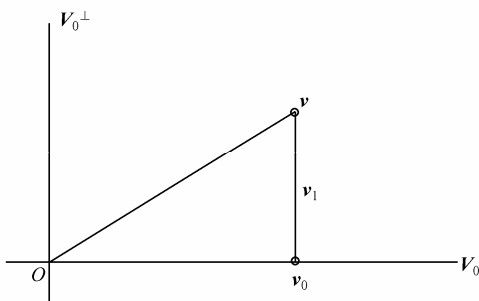


图 1-1 内积空间中的正交投影



**定理 1-3** 若  $V_0$  是内积空间  $V$  的一个子空间, 对任何  $\mathbf{v} \in V$ , 那么其正交投影  $\mathbf{v}_0$  具有以下性质:  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  与  $V_0$  中的每个矢量正交。

**证明** 首先假设  $\mathbf{v}_0$  是最接近矢量  $\mathbf{v}$  的, 那么  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  与  $\mathbf{w} \in V_0$  正交。考虑函数

$$f(t) = \|\mathbf{v}_0 + t\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2, \quad t \in \mathbf{R} \quad (1-2-30)$$

它描述了  $\mathbf{v} + t\mathbf{w} \in V_0$  与  $\mathbf{v}$  的距离的平方。若  $\mathbf{v}_0$  是  $V_0$  中最接近矢量  $\mathbf{v}$  的矢量, 那么当  $t=0$  时, 函数  $f(t)$  最小。为讨论方便, 这里仅设内积空间  $V$  为实的情形, 这样展开函数  $f(t)$  有

$$f(t) = \langle (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}) + t\mathbf{w}, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}) + t\mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}\|^2 + 2t\langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + t^2\|\mathbf{w}\|^2 \quad (1-2-31)$$

因为当  $t=0$  时, 函数  $f(t)$  最小, 因此, 函数  $f(t)$  的导数

$$f'(t) = 2\langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + 2t\|\mathbf{w}\|^2 \quad (1-2-32)$$

在  $t=0$  处必为 0, 即

$$f'(t)|_{t=0} = 2\langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad (1-2-33)$$

由此得出  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  与  $\mathbf{w} \in V_0$  正交。

反之, 若  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  与  $\mathbf{w} \in V_0$  正交, 那么由式 (1-2-33) 得  $f'(0) = 0$ 。由于函数  $f(t)$  是一个关于  $t$  的非负的二次多项式, 所以拐点  $t=0$  必与最小值对应。因此, 当  $t=0$  时,  $\|\mathbf{v}_0 + t\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2$  最小。因为  $\mathbf{w}$  是  $V_0$  中任意选取的一个矢量, 所以可以断定  $\mathbf{v}_0$  是  $V_0$  中最接近矢量  $\mathbf{v}$  的矢量。为更好地理解这一概念, 这里给出它们的几何解释。在图 1-1 中,  $\mathbf{v}_0$  称作矢量  $\mathbf{v}$  在  $V_0$  上的正交投影, 用  $P_{V_0}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0$  表示, 并称  $P_{V_0}$  是内积空间  $V$  到子空间  $V_0$  的投影算子。根据勾股定理有  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_0^2 + \mathbf{v}_1^2$ , 也就是说矢量  $\mathbf{v}$  可唯一地正交分解为  $\mathbf{v}_1$  与  $\mathbf{v}_0$ 。 $\mathbf{v}_1$  与  $\mathbf{v}_0$  正交意味着,  $\mathbf{v}_1$  与  $\mathbf{v}_0$  之间只有唯一的公共点就是它们垂直相交点, 换句话说,  $\mathbf{v}_1 \cap \mathbf{v}_0 = \{\mathbf{O}\}$ 。

**定理 1-4** 若  $V_0$  是内积空间  $V$  的一个  $N$  维子空间, 由  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$  正交基张成, 则  $\mathbf{v} \in V$  在  $V_0$  上的正交投影由下式给出

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{j=1}^N a_j \mathbf{e}_j, \quad a_j = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \quad (1-2-34)$$

**定义 1-10** 设  $V_0$  是内积空间  $V$  的子空间,  $V_0$  的正交补空间  $V_0^\perp$  是  $V$  上所有与  $V_0$  正交的矢量集合, 即

$$V_0^\perp = \{\mathbf{v} \in V; \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \mathbf{w} \in V_0\} \quad (1-2-35)$$

**定理 1-5** 设  $V_0$  是内积空间  $V$  的一个  $N$  维子空间。对每个矢量  $\mathbf{v} \in V$ , 可以唯一地表示为  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ , 其中  $\mathbf{x}_0 \in V_0$ ,  $\mathbf{v}_1 \in V_0^\perp$ , 即

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp \quad (1-2-36)$$

定理 1-5 表明内积空间  $V$  可分解为成直和形式  $V = V_0 \oplus V_0^\perp$ , 这种分解的意义在于, 当  $V_0$  是内积空间  $V$  的子空间,  $\mathbf{x} \in V$  但  $\mathbf{x} \notin V_0$  时, 则  $\mathbf{v}$  在  $V_0$  中一定有唯一的正交投影  $\mathbf{v}_0$ , 并且  $\mathbf{v}$  到  $V_0$  的距离就是  $\mathbf{v}_1$ , 也就是说  $V_0$  中只有  $\mathbf{v}_1$  到  $\mathbf{v}$  的距离最

近,也就是说,如果用 $V_0$ 中的元素中去逼近 $\mathbf{v}$ ,只有 $\mathbf{v}_0$ 的近似程度最好, $\mathbf{v}_0$ 是 $\mathbf{v}$ 的最佳逼近。

例如,平面 $V_0 = \{2x - y + 3z = 0\}$ , 矢量集 $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, -4, -2)$ 和 $\mathbf{e}_2 =$

$\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, -1)$ 形成 $V_0$ 的正交基, 所以给定矢量 $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 则矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \\ &= \left( \frac{x - 4y - 2z}{21} \right) (1, -4, -2) + \left( \frac{2x + y - z}{6} \right) (2, 1, -1) \end{aligned} \quad (1-2-37)$$

是 $\mathbf{v}$ 在 $V_0$ 空间中的正交投影。矢量 $\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, -1, -3)$ 是一个垂直于该平面的单位矢量。所以

$$\mathbf{v}_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 = \left( \frac{2x - y - 3z}{14} \right) (2, -1, 3) \quad (1-2-38)$$

是 $\mathbf{v} = (x, y, z)$ 在 $V_0^\perp$ 上的正交投影。

**定理 1-6** 如果 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 是线性空间的子空间, 若 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 中的每个矢量 $\mathbf{a}$ 均可由子空间的矢量唯一地表示为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_i \in S_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1-2-39)$$

这个和式就称为直和, 记作

$$S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k \quad (1-2-40)$$

## 7. 格拉姆-施密特正交化方法

从定理 1-2 和定理 1-4 可以看出, 寻找一个正交基的重要性, 没有正交基, 在一个子空间上的正交投影的计算就会非常困难。对于一个给定的子空间构造正交基的方法可采用格拉姆-施密特 (Gram-Schmidt) 正交化方法来实现<sup>[34]</sup>。

**定理 1-7** 设 $V_0$ 是内积空间 $V$ 的 $N$ 维子空间, 令 $\mathbf{v}_j (j=1, 2, \dots, N)$ 是 $V_0$ 的一个基。那么存在一个正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\} \in V_0$ , 其中,  $\mathbf{e}_j$ 是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j$ 的线性组合。

**证明** 首先定义 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 / \|\mathbf{v}_1\|$ 。显然,  $\mathbf{e}_1$ 具有单位长度,  $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ 。令 $\mathbf{v}_0$ 是 $\mathbf{v}_2$ 在由 $\mathbf{e}_1$ 张成的线上的正交投影。由定理 1-4 有

$$\mathbf{v}_0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 \quad (1-2-41)$$

令 $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ , 因此, 有

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \quad (1-2-42)$$

式 (1-2-42) 表明由 $\mathbf{v}_0$ 至 $\mathbf{v}_2$ 的矢量 $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ 与 $\mathbf{e}_1$ 正交。注意,  $\mathbf{w}_2$ 不能等于 $\mathbf{0}$ , 否则 $\mathbf{v}_2$ 与 $\mathbf{e}_1$ 将线性相关。若令 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{w}_2 / \|\mathbf{w}_2\|$ , 则 $\|\mathbf{e}_2\| = 1$ ,  $\mathbf{e}_2$ 与 $\mathbf{e}_1$ 彼此正交, 即

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \quad (1-2-43)$$

然后, 考虑  $\mathbf{v}_3$  在由  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  张成的空间上的正交投影

$$\mathbf{v}_0 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \quad (1-2-44)$$

同样令  $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$ , 因此, 有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_3, \mathbf{e}_1 \rangle &= \langle \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1-2-45)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_3, \mathbf{e}_2 \rangle &= \langle \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (1-2-46)$$

若令  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{w}_3 / \|\mathbf{w}_3\|$ , 则  $\|\mathbf{e}_3\| = 1$ ,  $\mathbf{e}_3$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_1$  彼此正交。

所以,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  就是由  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  张成空间的正交基。若用同样的方法, 继续此过程就可获得基  $\{\mathbf{v}_j\}$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) 的正交归一化后的正交基  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\} \in V_0$ 。

## 1.2.2 函数的基本特性

### 1. 函数的紧支撑性

函数的紧支撑性 (compact support) 是小波变换和时频分析中经常用到的一个数学概念。函数  $f(t)$  的支集或支撑区记为  $\text{Supp } f$ , 它是指最大开集, 而开集  $\mathbf{E}$  被定义为  $t \in \mathbf{E}$  时有  $f(t) \neq 0$ , 换句话说, 函数  $f(t)$  在一个最小的闭子集或区间  $[a, b]$  有值, 而在  $[a, b]$  区间外函数  $f(t) = 0$ 。我们说函数  $f(t)$  是紧支集就是指  $f(t)$  的支撑区  $\text{Supp } f$  是紧支集, 即  $\text{Supp } f \subset [a, b]$ ,  $[a, b]$  为有界闭区间。一个序列  $u$  是紧支撑的, 就是说有有限多元素在域中不为零, 称此为有限支撑的; 对于域  $\mathbf{R}^n$ , 说  $u$  是紧支撑的, 是指支集是有界的, 即存在某一  $\mathbf{R} < \infty$  使得  $s, t \in \text{Supp } u$ , 而有  $|t - s| < \mathbf{R}$ 。其中最小的  $\mathbf{R}$  称作函数  $u$  的支集宽度或直径, 用  $d \text{ Supp } u$  表示。显然, 可测函数的支撑是可测集, 若  $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}^n$ , 则有  $|\mathbf{E}|^{1/n} \leq d \text{ Supp } \mathbf{E}$ 。

### 2. 函数的平滑性

如果函数  $f(t)$  的任意  $n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) 次导数都是连续的, 则称该函数  $f(t)$  是平滑的。若函数  $f(t)$  有  $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$  连续, 且  $0 \leq n < \alpha$ , 则称该函数  $f(t)$  的平滑度为  $\alpha$ 。通常用  $C^\alpha$  来表示这类函数, 为了定量描述函数  $f(t) \in C^\alpha$  的光滑程度 ( $\forall \alpha > 0$ ) 可利用下面关系式来测量

$$f(t) \in C^\alpha \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|)^{1+\alpha} d\omega < +\infty \quad (1-2-47)$$

其中,  $\hat{f}(\omega)$  为  $f(t)$  的傅里叶变换。

### 3. 函数的速降性

函数  $f(t)$  有无限速降性是指  $\forall n \in \mathbf{N}$  存在一个有限常数  $K_n > 0$ , 使得  $\forall t \in \mathbf{R}$  都有  $|t^n f(t)| < K_n$ , 也常称作无限超代数衰减性。若  $\delta > 0$  使得  $|f(t)| < Ke^{-\delta|t|}$  成立, 则称函数  $f(t)$  是无限指数衰减的。

人们希望小波具有紧支撑或者说是紧支集小波, 一旦小波有紧支集, 它就具有更好的局部特性, 也有利于算法的实现, 所以紧支集是构造正交小波必须考虑的重要性质。但是, 紧支撑与平滑性二者不可兼得, 只能寻找一种恰当的折中, 从海森伯 (Heisenberg) 测不准原理 (或不确定原理) 也不难预料到这个结果。

### 4. 消失矩

若函数  $\psi(t)$  具有如下特性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (1-2-48)$$

则称该函数  $\psi(t)$  具有  $K$  阶消失矩, 亦称该函数  $\psi(t)$  的正则性 (regularity) 为  $K$ 。 $\psi(t)$  的消失矩条件意味  $\psi(t)$  的傅里叶变换直到  $K$  阶导数在零点为零, 即

$$\frac{d^k}{dt^k} \hat{\psi}(\omega)|_{\omega=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (1-2-49)$$

这个性质就是傅里叶变换  $\hat{\psi}(\omega)$  局部性能的度量。

### 5. $L^2(\mathbf{R})$ 收敛与一致收敛

在本书中, 我们会经常谈到内积空间  $L^2(\mathbf{R})$ , 因此有必要介绍一下该空间的收敛问题。

**定义 1-11** 在  $L^2(\mathbf{R})$  中称序列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  均匀收敛于  $f$ , 若  $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , 即给定  $\varepsilon > 0$ , 存在一个非负整数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时, 有  $\|f_n - f\|_{L^2} < \varepsilon$ 。

**定义 1-12** 在  $L^2(\mathbf{R})$  中称序列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  逐点收敛到  $f$ , 是指对每个  $t \in \mathbf{R}$  和每个小的抖动  $\varepsilon > 0$ , 有一个正整数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时,  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ 。

**定义 1-13** 在  $L^2(\mathbf{R})$  中称序列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  一致收敛到  $f$ , 是指对每个小的  $\varepsilon > 0$ , 有一个正整数  $N$ , 使得当  $n \geq N$  时, 对所有  $t \in \mathbf{R}$ ,  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ 。

#### 1.2.3 框架与算子

##### 1. 线性算子

算子 (operator) 由一类运算规则的抽象化算符表示, 多用于指相同数域上的线性空间到线性空间的映射。线性算子是指满足线性关系的算子, 即若设在数域  $\mathbf{R}$  上的线性空间  $H_1$  和  $H_2$ , 若算子  $L$  为  $H_1$  到  $H_2$  上的映射, 且对  $\mathbf{R}$  上的任意两

个数  $a$  和  $b$ , 以及  $H_1$  上的任意两个元素  $x_1$  和  $x_2$  有以下映射关系

$$L(ax_1 + bx_2) = aLx_1 + bLx_2 \quad (1-2-50)$$

则称  $L$  为  $H_1$  到  $H_2$  上的线性算子。

## 2. 框架

框架 (frame) 亦称为标架, 它是 Duffin 与 Schaeffer 在非调和傅里叶级数 (Fourier series, FS) 的研究中引入的<sup>[35]</sup>, 框架理论主要讨论在希尔伯特空间中如何用一族函数  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  来刻画希尔伯特空间中的函数  $f(t) \in H$ , 这里只简要介绍框架的定义和一些基本性质。

**定义 1-14** 在希尔伯特空间  $H$  中的一族函数  $\{\varphi_j \in H\}_{j \in \mathbf{Z}}$  称为一个框架, 如果存在两个常数  $0 < A \leq B < \infty$ , 使得对于所有希尔伯特空间  $H$  中的函数  $f(t) \in H$  满足下列关系

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (1-2-51)$$

其中,  $A$  与  $B$  称为框架界 (frame bounds)。如果两个框架界相等, 即  $A = B$ , 则称框架是紧框架 (tight frame)。

对于框架界常数  $B < \infty$  保证了变换  $f \rightarrow \{\langle f, \varphi_j \rangle\}$  是连续的, 常数  $A > 0$  保证了变换是可逆的, 并且有连续的逆变换, 这样用框架  $\{\varphi_j \in H, j \in \mathbf{Z}\}$  就能完全刻画函数  $f(t) \in H$ , 也能从函数的分解中重构该函数。在紧框架中, 对于所有  $f(t) \in H$ , 有

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = A\|f\|^2 \quad (1-2-52)$$

利用内积恒等式

$$\langle f, g \rangle = \frac{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2}{4} + \frac{\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2}{4i} \quad (1-2-53)$$

可以推出

$$A\langle f, g \rangle = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle \quad (1-2-54)$$

所以, 至少在较弱的意义下,  $f(t)$  有一个简单展开式

$$f(t) = \frac{1}{A} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (1-2-55)$$

这个表达式正好使人想起  $f(t)$  用一个规范正交基表示, 但是并非如此, 因为一般情况下的框架, 甚至紧框架也不是正交基<sup>[36,37]</sup>。例如, 取  $H = \mathbf{R}^2$ ,  $e_1 = (0,1)$ ,

$\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ , 相互间夹角为  $120^\circ$ , 其模均为 1, 如图 1-2 所示, 显然它们不是正交基, 但对于任一  $H$  空间中的向量  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  用这样的非正交基向量表示为

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2} [ |v_1|^2 + |v_2|^2 ] = \frac{3}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned} \quad (1-2-56)$$

由此得出,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  是一个非紧框架, 且向量  $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$  线性相关。

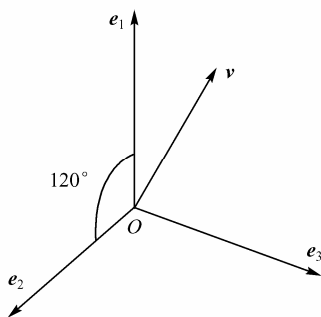


图 1-2 一个紧框架

从此例可以看出, 框架提供了对函数  $f(t)$  的一种冗余表示, 即式 (1-2-55) 这类表示有很大的冗余度。在框架中称比值  $B/A$  为冗余比或冗余因子, 就上面所举例子而言, 冗余比  $B/A = 3/2$  表示所用基向量既不是正交的, 也不是线性无关的, 其中多出一个基向量。若比值  $A/B = 1$ , 显然就是正交基向量的特殊情况。冗余表示除了用框架系数  $\langle f, \varphi_j \rangle$  恢复信号  $f(t)$  的数值计算十分稳定, 不受系数与计算误差的影响之外, 对于噪声更具有鲁棒性 (robustness), 因此, 当噪声抑制成为一个主要问题时, 这种表示是很有用的。

**定理 1-8** 如果  $\{\varphi_j \in H\}_{j \in \mathbf{Z}}$  是一个紧框架, 框架界  $A = 1$ , 并且如果  $\|\varphi_j\| = 1$  对于所有  $j \in \mathbf{Z}$  成立, 那么  $\{\varphi_j \in H\}_{j \in \mathbf{Z}}$  构成  $H$  的一个正交基。

**证明** 因为对于所有  $j \in \mathbf{Z}$ ,  $\langle f, \varphi_j \rangle = 0$  推出  $f = 0$ , 那么  $\{\varphi_j, j \in \mathbf{Z}\}$  张成整个  $H$  空间。由于对任一  $j \in \mathbf{Z}$  有

$$\|\varphi_j\|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\langle \varphi_j, \varphi_l \rangle|^2 = \|\varphi_j\|^2 + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq j}}^{\infty} |\langle \varphi_j, \varphi_l \rangle|^2 \quad (1-2-57)$$

因为  $\|\varphi_j\|=1$  知  $\sum_{j \neq l} |\langle \varphi_j, \varphi_l \rangle|^2 = 0$ ，这样就推出

$$\langle \varphi_j, \varphi_l \rangle = 0 \quad (l \neq j), \quad \langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = 1, \quad j, l \in \mathbf{Z} \quad (1-2-58)$$

即  $\{\varphi_j \in \mathbf{H}\}_{j \in \mathbf{Z}}$  是标准正交基。

因此，如果  $\{\varphi_j \in \mathbf{H}\}_{j \in \mathbf{Z}}$  是一个紧框架，而框架界  $A=1$ ，并且如果  $\|\varphi_j\|=1$ ，那么  $\{\varphi_j \in \mathbf{H}\}_{j \in \mathbf{Z}}$  形成一个规范正交基，于是便得到通常的展开式

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (1-2-59)$$

即信号  $f(t)$  由  $\langle f, \varphi_j \rangle$  按式 (1-2-59) 复原。对于  $A \neq B$  的情况比较复杂，为了对此问题进行分析，首先引入框架算子的概念。

**定义 1-15** 如果  $\{\varphi_j \in \mathbf{H}\}_{j \in \mathbf{Z}}$  是  $\mathbf{H}$  中的一个框架，那么框架算子  $\mathbf{T}$  表示由希尔伯特空间  $\mathbf{H}$  到平方可和序列空间  $l^2(\mathbf{Z}) = \left\{ \mathbf{c} = \{c_j, j \in \mathbf{Z}\}, \|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 < \infty \right\}$  的映射，即

$$\mathbf{T}: \mathbf{H} \rightarrow l^2(\mathbf{Z}) = \left\{ \mathbf{c} = \{c_j, j \in \mathbf{Z}\}, \|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{j \in \mathbf{Z}} |c_j|^2 < \infty \right\} \quad (1-2-60)$$

定义为

$$(\mathbf{T}f)_j = \langle f, \varphi_j \rangle \quad (1-2-61)$$

由式 (1-2-51) 中第二不等式可得  $\|\mathbf{T}f\|^2 \leq B\|f\|^2$ ，因此  $\mathbf{T}$  是有界的。因为希尔伯特空间  $\mathbf{H}$  是完备空间，若  $f \in \mathbf{H}$ ， $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$  ( $n \in \mathbf{Z}$ )，则有  $f = 0$ 。类似地，若  $(\mathbf{T}f)_j = \langle f, \varphi_j \rangle = 0$ ，则有  $f = 0$ ，再由式 (1-2-51) 中第一不等式可得  $\|f\| \leq \|\mathbf{T}f\| / \sqrt{A}$ ，因此，框架算子  $\mathbf{T}$  有连续的逆算子  $\mathbf{T}^{-1}$ ，即可由系数  $\langle f, \varphi_j \rangle_{j \in \mathbf{Z}}$  重构函数  $f(t)$ 。下面讨论如何由  $\langle f, \varphi_j \rangle_{j \in \mathbf{Z}}$  来构造  $f(t)$  的具体算法。

设框架算子  $\mathbf{T}$  的共轭算子为  $\mathbf{T}^*$ ，则  $\mathbf{T}^*$  表示由空间  $l^2(\mathbf{Z})$  到空间  $\mathbf{H}$  的映射，即

$$\mathbf{T}^*: l^2(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{H} \quad \text{或} \quad \mathbf{T}^*: \mathbf{c} = \{c_j, j \in \mathbf{Z}\} \rightarrow \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j \varphi_j \quad (1-2-62)$$

事实上，框架算子  $\mathbf{T}$  的共轭算子为  $\mathbf{T}^*$  是容易计算的

$$\langle \mathbf{T}^* \mathbf{c}, f \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{T}f \rangle = \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j \langle f, \varphi_j \rangle^* = \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j \langle \varphi_j, f \rangle \quad (1-2-63)$$

所以，至少在较弱的意义下

$$\mathbf{T}^* \mathbf{c} = \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_j \varphi_j \quad (1-2-64)$$

若  $I$  为恒等算子, 利用性质: 若任取  $f \in H$  有  $\langle T_1 f, f \rangle \geq \langle T_2 f, f \rangle$ , 则算子  $T_1 \geq T_2$ 。式 (1-2-51) 的框架不等式就可写成算子形式

$$AI \leq T^* T \leq BI \quad (1-2-65)$$

由此可知算子  $T^* T$  是可逆算子, 有逆算子  $(T^* T)^{-1}$  存在, 与式 (1-2-65) 对应的逆算子不等式为

$$B^{-1} I \leq (T^* T)^{-1} \leq A^{-1} I \quad (1-2-66)$$

若设

$$\tilde{\varphi}_j = (T^* T)^{-1} \varphi_j \quad (1-2-67)$$

便有以下定理。

**定理 1-9**  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  也是  $H$  空间中的框架, 称之为框架  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  的共轭框架 (或 对偶框架), 它的上、下框架界分别为  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$ , 即

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2 \quad (1-2-68)$$

且其框架算子为  $\tilde{T} = T(T^* T)^{-1}$ , 满足

$$\tilde{T}: H \rightarrow l^2(\mathbf{Z}), \quad (\tilde{T}f)_j = \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \quad (1-2-69)$$

$$\tilde{T}^* \tilde{T} = (T^* T)^{-1}, \quad \tilde{T}^* T = T^* \tilde{T} = I \quad (1-2-70)$$

对于任一函数  $f(t) \in H$  有

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j \quad (1-2-71)$$

**证明** (1) 由于任一函数  $f(t) \in H$  有

$$\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle = \langle f, (T^* T)^{-1} \varphi_j \rangle = \langle (T^* T)^{-1} f, \varphi_j \rangle \quad (1-2-72)$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle (T^* T)^{-1} f, \varphi_j \rangle|^2 = \left\| (T^* T)^{-1} f \right\|^2 \\ &= \langle (T^* T)^{-1} f, T^* T (T^* T)^{-1} f \rangle = \langle (T^* T)^{-1} f, f \rangle \end{aligned} \quad (1-2-73)$$

由式 (1-2-66) 可得

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2$$

因此, 由框架的定义可知,  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  是  $H$  空间中的框架, 且它的上、下框架界分别为  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$ 。



(2) 由框架算子的定义有

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{T}}f)_j &= \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle = \langle f, (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}\varphi_j \rangle = \langle (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}f, \varphi_j \rangle \\ &= (\mathbf{T}(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}f)_j \end{aligned} \quad (1-2-74)$$

因此  $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}$  是共轭框架  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  的框架算子。

(3) 关于式 (1-2-71) 的证明, 由于

$$\begin{aligned} f &= (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}(\mathbf{T}^*\mathbf{T})f = (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j \end{aligned} \quad (1-2-75)$$

另外由框架算子  $\tilde{\mathbf{T}}$  的表达式可得下列关系式

$$\tilde{\mathbf{T}}^*\tilde{\mathbf{T}} = (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{T}(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1} = (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1} \quad (1-2-76)$$

故

$$\begin{aligned} f &= (\tilde{\mathbf{T}}^*\tilde{\mathbf{T}})^{-1}(\tilde{\mathbf{T}}^*\tilde{\mathbf{T}})f = (\tilde{\mathbf{T}}^*\tilde{\mathbf{T}})^{-1} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \tilde{\varphi}_j \\ &= \mathbf{T}^*\mathbf{T} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \tilde{\varphi}_j = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j \end{aligned} \quad (1-2-77)$$

即原命题成立。

从定理 1-9 的式 (1-2-71) 可知, 函数  $f(t)$  可由  $\langle f, \varphi_j \rangle_{j \in \mathbf{Z}}$  求得, 但关键在于求出框架对偶  $\tilde{\varphi}_j$ ,  $j \in \mathbf{Z}$ , 由于  $\tilde{\varphi}_j = (\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}\varphi_j$ , 因此问题变成求算子  $(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}$ , 只要找到该算子的数值计算的表达式, 问题就可解决。

由不等式 (1-2-66) 可得

$$\frac{A-B}{A+B} \mathbf{I} \leq \mathbf{I} - \frac{2(\mathbf{T}^*\mathbf{T})}{A+B} \leq \frac{B-A}{A+B} \mathbf{I} \quad (1-2-78)$$

即

$$\left\| \mathbf{I} - \frac{2(\mathbf{T}^*\mathbf{T})}{A+B} \right\| \leq \frac{(B/A)-1}{(B/A)+1} < 1 \quad (1-2-79)$$

根据范数的定义, 式 (1-2-78) 可以按通常的不等式简化而得到  $(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1}$  的表达式

$$(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1} = \frac{2}{A+B} \left( \mathbf{I} - \frac{(B/A)-1}{(B/A)+1} \right)^{-1} = \frac{2}{A+B} \left[ \mathbf{I} - \left( \mathbf{I} - \frac{2(\mathbf{T}^*\mathbf{T})}{A+B} \right) \right]^{-1} \quad (1-2-80)$$

利用公式: 当  $|x| < 1$  时,  $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , 将式 (1-2-80) 表

示成无穷级数之和

$$(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1} = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \mathbf{I} - \frac{2(\mathbf{T}^*\mathbf{T})}{A+B} \right]^k \quad (1-2-81)$$

这样就得出共轭框架  $\tilde{\varphi}_j$  的表达式

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \mathbf{I} - \frac{2(\mathbf{T}^*\mathbf{T})}{A+B} \right]^k \varphi_j, \quad j \in \mathbf{Z} \quad (1-2-82)$$

从式 (1-2-82) 可以看出, 框架界  $A$  和  $B$  的大小对框架  $\tilde{\varphi}_j$  的性能影响很大, 以下分两种情形作说明<sup>[27]</sup>。

(1) 若  $B/A \approx 1$ , 这时  $\|\mathbf{R}\| = \left\| \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{T}^*\mathbf{T}}{A+B} \right\| \approx 0$ , 这时式 (1-2-81) 和式 (1-2-82)

可近似地写成

$$(\mathbf{T}^*\mathbf{T})^{-1} \approx \frac{2}{A+B} \mathbf{I} \approx A^{-1} \mathbf{I} \quad (1-2-83)$$

及

$$\tilde{\varphi}_j \approx \varphi_j / A \quad (1-2-84)$$

从而函数  $f(t)$  由框架  $\varphi_j$  的展开式可近似写成

$$f(t) \approx \frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (1-2-85)$$

这时称  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  为几乎紧框架 (snug frame)。

为了获得更精确的重构公式, 可令  $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \frac{2}{A+B} \mathbf{T}^*\mathbf{T}$ ,  $r = \frac{B}{A} - 1$ , 则有

$$\|\mathbf{R}\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r} \quad (1-2-86)$$

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{R}]^k \varphi_j \quad (1-2-87)$$

函数  $f(t)$  的重构公式可改写为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j \\ &= \frac{2}{A+B} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j + \mathbf{R}f \end{aligned} \quad (1-2-88)$$

其中,  $\mathbf{R}f$  为误差项。从式 (1-2-87) 可以看出, 当只使用零次项 ( $k=0$ ) 时, 误差项就近似为零, 式 (1-2-88) 变为式 (1-2-85)。若截取  $N$  项, 由式 (1-2-87) 可得

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N \mathbf{R}^k \varphi_j = \tilde{\varphi}_j - \frac{2}{A+B} \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathbf{R}^k \varphi_j = [\mathbf{I} - \mathbf{R}^{N+1}] \tilde{\varphi}_j \quad (1-2-89)$$

并且可证

$$\|f - \sum \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N\| \leq \left(\frac{r}{r+2}\right)^{N+1} \|f\| \quad (1-2-90)$$

因为  $\frac{r}{2+r} < 1$ , 所以  $N$  增大时, 指数就减小。由于  $\tilde{\varphi}_j^N$  和  $f_N$  有如下迭代算法

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \varphi_j + \mathbf{R} \tilde{\varphi}_j^{N-1} \quad (1-2-91)$$

$$\tilde{\varphi}_j^N = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \alpha_{jl}^N \varphi_l \quad (1-2-92)$$

其中,  $\alpha_{jl}^N = \frac{2}{A+B} \delta_{lj} + \alpha_{jl}^{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \alpha_{jml}^{N-1} \langle \varphi_m, \varphi_l \rangle$

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^N \mathbf{R}^k (\mathbf{T}^* \mathbf{T}) f \\ &= \frac{2}{A+B} (\mathbf{T}^* \mathbf{T}) f + \mathbf{R} f_{N-1} \\ &= f_{N-1} + \frac{2}{A+B} \sum_{j \in \mathbf{Z}} [\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f_{N-1}, \varphi_j \rangle] \varphi_j \end{aligned} \quad (1-2-93)$$

$$f = (\mathbf{T}^* \mathbf{T})^{-1} (\mathbf{T}^* \mathbf{T}) f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N \quad (1-2-94)$$

这样函数  $f(t)$  就可得到较好的逼近。

(2) 若  $B/A=1$ , 即  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  为紧框架时, 这时  $(\mathbf{T}^* \mathbf{T})^{-1} = A^{-1} \mathbf{I}$ , 因此函数  $f(t)$  由框架  $\varphi_j$  的展开式则可写成

$$f(t) = \frac{1}{A} \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (1-2-95)$$

从上面的讨论可以看出, 以上展开式均可由框架界进行数值计算, 当  $A=1$ ,  $\|\varphi_j\|=1$  时, 式 (1-2-95) 就是标准正交基的级数展开式。无疑, 紧框架展开式是除了正交基展开式之外对  $f(t)$  的最佳逼近。

紧框架在信号处理方面具有非常重要的作用。首先, 利用紧框架非常容易计算展开系数。一旦基本函数选定, 则利用式 (1-2-1) 或式 (1-2-2) 就可获得信号的展开系数, 而且所得的系数的模最小。然而, 当基函数不能形成紧框架时, 如我们将在后面章节所要讨论的积  $T\Omega$  接近  $2\pi$  的 Gabor 函数基  $\{h(t-mT)e^{in\Omega t}\}$ , 我们必须首先计算它的共轭框架 (或对偶函数)  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ , 然后利用式 (1-2-1) 或式 (1-2-2) 计算 Gabor 的展开系数  $\{c_j\}$ , 不幸的是, 在大多数情况下, 对偶函数 (dual function) 的计算是相当困难的。

其次, 如果  $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j$ , 展开系数  $c_j$  则为信号在函数  $\varphi_j(t)$  上的精确投影; 当  $\tilde{\varphi}_j \neq \varphi_j$  时, 展开系数  $c_j = \langle s(t), \tilde{\varphi}_j(t) \rangle$  反映了信号与对偶函数之间的相似性, 而不是信号与函数  $\varphi_j(t)$  之间的相似性。如果  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  与  $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  意义完全不同, 则系数  $\{c_j\}$  完全不能反映信号关于基本函数  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  的属性。例如, 在时频分析中的 Gabor 展开, 基函数  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  具有较好的局部性, 但却不能保证展开系数  $\{c_j\}$  也能反映出信号的局部属性。当  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  在联合时频域内局部性较差时, 系数  $\{c_j\}$  根本不能描述出信号的时变特性。

当一紧框架也是线性独立的, 则它将形成一正交基。这时由正交基展开的变换计算将不含有内冗余性。例如, 与谐波相关的复正弦基  $\{e^{i2\pi nt/T}\}$ , 因此, 对于具有周期为  $T$  的任意周期信号  $\tilde{s}(t) = \tilde{s}(t + lT)$  ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 可分解为  $\{e^{i2\pi nt/T}\}$  的线性组合——傅里叶级数, 即

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi nt/T} \quad (1-2-96)$$

此时, 基函数与其对偶函数具有相同的形式, 因此, 由式 (1-2-1) 内积获得的系数为

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{s}(t) e^{-i2\pi nt/T} dt \quad (1-2-97)$$

式 (1-2-97) 中的系数  $c_n$  表明了信号与这组谐波复正弦基  $\{e^{i2\pi nt/T}\}$  的相似性, 是信号在复正弦函数  $\{e^{i2\pi nt/T}\}$  上的正交投影, 其大小代表了信号中含有频率  $2\pi n/T$  成分的多少。

另一个众所周知的正交基是由 sinc 函数构造的完备正交基  $\{\text{sinc}(t - nT)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ , 即

$$\langle \text{sinc}(t - nT), \text{sinc}(t - n'T) \rangle = T\delta(n - n') \quad (1-2-98)$$

其中

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (1-2-99)$$

如果信号  $s(t)$  为限带信号, 即当  $\omega > \pi/\Delta t$  时,  $|\hat{s}(\omega)| = 0$ , 其中,  $\hat{s}(\omega)$  为信号的频谱,  $\Delta t$  为抽样间隔。则信号  $s(t)$  可由正交基  $\{\text{sinc}(t - nT)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  展开

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \text{sinc}(t - nT) \quad (1-2-100)$$

其中,  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \text{sinc}(t - nT) dt$  代表了信号在  $nT$  时刻抽样。式 (1-2-100) 就是众所周知的抽样重构公式。

在信号分析中, 内积和展开 (expansion) 是两个重要的基本概念。当涉及信号展开时, 首先要解决的问题是要选择理想的基函数  $\varphi(t)$ , 所谓理想的基函数

$\varphi(t)$  基主要指：①基函数应具有较好的物理解释；②由基函数  $\varphi(t)$  形成的函数族  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  容易构造。

为了揭示信号在不同频率处的信号特性，我们希望基函数在频率域内具有较好的集中性，如  $\{e^{i2\pi nt/T}\}$  在相应的频率点  $2\pi n/T$  具有冲激，并构成正交空间，同时基函数与对偶函数具有相同的形式。这样内积  $\langle s(t), e^{i2\pi nt/T} \rangle$  准确地表明了信号在频率  $2\pi n/T$  处的属性。若要在时域和频域同时刻画信号的属性，基函数必须在时域和频域都具有局部特性，如加窗复正弦函数——Gabor 基函数，或紧支波形的小波。

同时，也希望由基函数能方便地构造函数族。例如，在 Gabor 展开和小波变换中，由基函数能非常方便地构造函数族。在 Gabor 展开中，函数族则由原型函数  $\{h(t - mT)e^{in\Omega t}\}$  的时移和频率调制构成，而在小波变换中，函数族则由基小波函数  $\psi(t)$  的平移和伸缩来完成  $\psi((t - b)/a)$ ，这一点我们将在后面章中作详细介绍。

当基函数选定后，接下来的问题是如何计算对偶函数。通常由物理解释引入的基函数往往不能构成紧框架。因此，信号的理想展开实现并非像傅里叶级数那样简单。为了得到较好的结论，在允许的冗余情况下，通常采用几乎紧框架。当期望的函数族不是正交且冗余不能接收时，我们可以采用自适应表示。

最后，值得一提的是，根据框架理论，信号展开有两种形式，即

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \varphi_j \quad (1-2-101)$$

或

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j \quad (1-2-102)$$

因此，我们可以根据实际分析的问题来选择相应的展开式。如我们关心的是展开系数，这是大多数短时傅里叶变换和小波变换应用中关心的问题，这时可选择式 (1-2-102)，即选择  $\varphi_j(t)$  作为分析函数，这样可以较方便地实现我们的要求。

对于信号的展开，我们只简单地介绍了一些框架理论，对框架理论感兴趣读者可参阅相关的参考书。

### 1.3 傅里叶级数与傅里叶变换

在信号分析中，对信号的基本刻画往往采用两种最基本形式，即时域形式和频域形式。把时间或空间位置作为自变量，把信号的某一数字化特征作为因变量来描述信号的方式是常用方式。然而信号在固定时间或固定时间区域的孤立值本身很少有意义，因此，对信号人们往往作另一描述，即用它的傅里叶变换来描述它的频率特性。

事实上，众所周知的傅里叶变换分为两种不同的情况<sup>[38-40]</sup>。一是应用于具有周期性的周期信号傅里叶变换——傅里叶级数；另一种是对能量有限的非周期信号的傅里叶变换。

### 1.3.1 傅里叶级数

先考虑定义在  $(0, 2\pi)$  上能量有限的情况，即

$$\int_0^{2\pi} |s(t)|^2 dx < +\infty \quad (1-3-1)$$

的可测函数全体的集合  $L^2(0, 2\pi)$ 。 $L^2(0, 2\pi)$  中任何一个信号  $s(t)$  都具有一个傅里叶级数表达式

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad (1-3-2)$$

其中级数的系数  $c_n$  定义为

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (1-3-3)$$

该系数称为  $s(t)$  的傅里叶系数。这里级数收敛是在  $L^2(0, 2\pi)$  中，意思是

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} \int_0^{2\pi} \left| s(t) - \sum_{n=-N}^M c_n e^{int} \right|^2 dt = 0 \quad (1-3-4)$$

在傅里叶级数表达式 (1-3-2) 中，有两个独特的性质：

(1)  $L^2(0, 2\pi)$  中任何信号  $s(t)$  都分解成无穷多个相互正交的分量  $g_n(t) = c_n e^{int}$  之和。

所谓正交分量是指

$$\langle g_m, g_n \rangle = 0, \quad m \neq n \quad (1-3-5)$$

因为由内积的定义有

$$\begin{aligned} \langle g_m, g_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_m(t) g_n^*(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_m c_n^* e^{i(m-n)t} dt = c_m c_n^* \delta(m-n) \end{aligned} \quad (1-3-6)$$

式 (1-3-5) 说明了如下事实，函数系

$$\varphi_n(t) = e^{int}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (1-3-7)$$

是  $L^2(0, 2\pi)$  的正交基。

(2) 该正交基  $\{\varphi_n(t) = e^{int}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  可由一个单函数

$$\varphi(t) = e^{it} \quad (1-3-8)$$

的“伸缩”生成。这就是说，对所有的整数  $n \in \mathbf{Z}$  有

$$\varphi_n(t) = \varphi(nt), \quad n \in \mathbf{Z} \quad (1-3-9)$$