中外数学史概论

傅海伦　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书在吸收中外数学史研究最新成果的基础上，通过对丰富的数学史料的分析，全面系统地阐述了中外数学发展过程中重要的数学史实、数学家及其成就、数学名著、数学思想方法以及中外数学文化的特点比较等，并结合新课程改革背景下现行数学课程与教材的内容，注重体现数学史在数学教育中的价值和作用，提升数学的科学价值和文化价值。该书是作者多年致力于数学史与数学教育相结合研究的成果和教学实践的总结。对本书所论及的中外数学史的每一个专题内容，都力争做到从内史与外史相结合的角度，选材典型，内容丰富，论述深刻，并对当前的数学教学有实际指导意义。

本书可作为高等师范院校本、专科《数学史》课程的教材，可作为数学课程与教学论专业、教育硕士专业学位(学科：数学)研究生的学习用书，还可作为从事数学史、数学教育研究专业人员的参考用书和中小学数学教师培训的教材。

图书在版编目(CIP)数据

中外数学史概论/傅海伦编著.—北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-018477-1

Ⅰ.中... Ⅱ.傅... Ⅲ.数学史—世界 Ⅳ.011

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 009004 号

责任编辑：陈 露 谭宏宇/责任校对：连秉亮
责任印制：刘 学 /封面设计：一 明

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
南京展望文化发展有限公司排版
江苏省句容市排印厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 2 月第一次印刷 印张：19¾
印数：1—3 200 字数：383 000

定价：32.00 元

前　言

简单来说，数学史是研究数学的产生、发展过程及其发展规律的学科。学习和研究数学史，不仅要追溯数学内容、思想和方法的演变、发展过程，而且还要探索影响这种过程的各种因素，以及历史上数学科学的发展对人类文明所带来的重要影响。因此，数学史的研究对象不仅包括具体的数学内容，而且还涉及历史学、哲学、文化学、宗教等社会科学与人文科学的内容。从这个意义上说，数学史又是一门综合性的交叉性学科。

数学史研究的地位在于：弄清中外数学发展过程中的基本史实，再现其本来面貌，对数学成就、理论体系与发展模式作出客观、公正、合理的解释说明与评价，进而探究数学科学发展的规律与文化本质。作为数学史研究的基本方法与手段，常用的有历史考证、数理分析、比较研究等方法。从数学史的研究材料上说，考古资料、历史档案材料、数学原始文献、社会学、民族学资料、文化史资料，以及对数学家的访问记录，等等，都是重要的可依据或可参考的素材，其中数学原始文献是最常用、最重要的第一手研究资料。从数学史的研究范畴来说，既包括数学本学科理论和概念的演变史、数学思想方法的传播与交流史、数学家传记（包括数学家的生平、数学贡献、重要的思想方法等内容）等内史研究，同时还包括数学产生与发展的社会历史背景、数学与人类社会及历史文化的互动关系的外史研究。

在全面推进和贯彻落实素质教育的当今，我国的教学观念已发生重要的变革。科学与人文教育已成为素质教育中的一个重要组成部分。特别是当前在国家新一轮基础教育课程改革的大背景下，随着数学课程与教学改革的不断深入，数学的人文价值更明确地强调出来，已普遍受到重视。2001 年教育部制定的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》给出了未来十年内我国数学教育的基本目标和实施建议，在其基本理念中，强调指出：“数学是一种文化，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。”在 2003 年教育部制定的《普通高中数学课程标准（实验稿）》中，将“体现数学的人文价值”作为十大基本理念之一，并特别强调指出：“数学是人类文化的重要组成部分。数学课程应适当反映数学的历史、应用和发展趋势，数学对推动社会发展的作用，数学的社会需求，社会发展对数学发展的推动作用，数学科学的思想体系，数学的美学价值，数学家的创新精神。数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观。”不仅如此，《普通高中数学课程标准（实验稿）》中还设立了数学建模、数学探究、数学文化等，并作出了内容规定和教学要求。同时，在选修课程系列 3 中又设置了“数学史选讲”、“三等分角与数域扩充”、“欧拉公式与闭曲面分类”等在规定的时间内开设，以体现数学史和数学文化的重要内容。2005 年底，依据《普通高中数学课程标准（实

验稿)》所编写的选修课程系列 3《数学史选讲》教材已正式出版。

我们认为,研究和学习数学史,在当前形势下具有重要的意义。

1) 了解历史,掌握规律,以史为鉴,继往开来。正如法国大数学家庞加莱(J. H. Poincare, 1854～1912)所说:“如果我们想预见数学的未来,适当的途径就是要研究这门科学的历史和现状。”研究和学习数学史,可以培养和增进学习者的史学观念,有利于全面分析和系统比较人类积累起来的数学知识和数学思想方法的特点,使学习者能够站在历史的高度,全面、客观、辩证地看问题,从而把握数学知识的深刻内涵,全面理解数学思想的本质和精髓。

2) 研究和学习数学史,可以丰富数学文化内涵,提高学习者自身的文化素养,也有利于当前新课程改革形势下数学教学中情感态度与价值观目标的实现。数学史中蕴含着丰富的人文教育素材,探索数学概念和数学命题产生、发展的过程和规律,充分发掘历史材料的科学和人文价值,不仅能够提高数学教育者本身的数学素养,特别是人文素养,增强对数学的感受和情感体验,而且还可作为日后数学研究和教学各方面的启迪和借鉴。

3) 学好数学史,可以帮助我们回归、溯源、思考原始问题,启迪思维。数学史上有大量的中外数学问题的原型、体现民族文化特色和思维特点的数学研究方法和重要结论。大力挖掘数学问题的教育价值,可以使数学研究者获得创造的灵感和智慧,体会数学的精神、思想和方法。将这些方面应用到日常的数学教学中,对于增进学生的数学问题意识,培养学生的数学思考的习惯和独立钻研的能力,启导思维和方法,提高数学创新水平等,都具有重要的不可替代的作用。

《中外数学史概论》是我们在对高等师范院校数学史课程进行了广泛的研讨,结合我们主持的全国教育科学“十五”重点青年专项课题——“数学史在数学教育中的应用”的研究成果和多年来本科教学经验的基础上编写的。其指导思想就是从认真系统研究中外数学发展的历史入手,结合新课程改革背景下现行数学课程与教材的内容,深入挖掘数学史中蕴藏的丰富的科学与人文思想教育因素,充分发挥数学史在数学教育中的作用,提升数学的科学价值和文化价值。自 2005 年,我们承担了山东师范大学“面向基础教育课程改革的数学教育课程体系与教学方法研究”课题和教育硕士专业学位重点课程——《数学教学论》的建设与教学改革研究,其中一项重要的内容就是加强数学史的研究和教学。2006 年 3 月,我们又申报了中国高等教育学会教育科学“十一五”规划重点研究课题——“高师院校数学史教育课程改革与教学方法研究”。该书的出版集中反映了这三项课题的部分研究成果。

本书的特色主要有以下几点:

(1) 发展性与实用性的统一

本书充分体现现行的教学要求,以中外数学史的最新成果为依据,对现代数学

发展中重要而基础的内容，从历史发展的角度全面系统地研究和分析，注重中外中学数学的发展过程和发展动态，关注数学史的最新教学研究成果的运用，从适应未来中学数学教师教学工作的需要出发，介绍具体的与现行教材相关的教学史知识和中外数学思想方法，体现数学史在数学教育中的作用与价值，因而具有很强的实用性和可操作性，也具有很强的推广价值。

（2）数学史与数学教育相结合

数学史与数学教育的结合，既是数学史界一直重视的学术问题，也是一个当前数学教育界研究的重要课题。重视数学史在数学教育中的作用在现阶段也是一种国际趋势，因此，在我国高等院校特别是师范院校开设数学史课程已普遍受到重视。它不仅可以更好地发挥高师院校的教师教育性、示范性，也能大大推动数学史的应用研究，因而具有重要的学术价值和现实教学指导意义。本书的特点正是通过精选中外数学发展过程中的典型的数学史材料，与当今的数学教学活动相结合，系统挖掘数学史在当前中小学数学教育和教学中的应用。从写作方法上，本书的编写与当前的国家《数学课程标准》规定的数学内容体系相结合，尽力为数学教师提供丰富的可以实用的数学史教育素材，深入探索数学史在数学教育中的作用和价值，以体现《数学课程标准》中倡导的数学的文化价值，形成数学史与数学教育研究相结合的教材特色。

本书在写作过程中，参阅了许多科技史、科学哲学与数学史方面的论著和文献资料，也吸收了不少前辈及同仁近些年来的研究成果，在此表示诚挚的感谢。初稿完成后，在笔者的研究生孙晓康、张杰、孙中芳、杨秀梅帮助下查阅并整理了部分有价值的资料，特别是孙晓康和张杰还帮笔者仔细校对了书稿。由于本人学陋识薄，在研究过程中深感一些问题并没有解决，还有一些重要的数学史内容没有在本书中体现，本书中也一定有不少疏漏及错误之处，恳请各位前辈、同仁和广大师生批评指正。

本书得到了山东师范大学出版基金的资助。在出版过程中还得到了科学出版社上海办事处的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。

傅海伦

2006 年 12 月

于山东师范大学

目　　录

下篇　世界数学史概论

上篇　中国数学史概论

第一章　中国传统数学概述

人类进入文明时代以来，数学中心已经经过了几次大转移。公元前 19 世纪至公元前 6 世纪的古巴比伦最先进入文明社会，他们的数学知识自然超前其他民族。巴比伦数学以计算为主。公元前 6 世纪，数学中心转移到了古希腊，以研究空间形式为主，形成了严密的公理化体系，十分发达。公元前 2 世纪前后，古希腊数学走向衰落，以探讨数量关系为主的中国传统数学后来居上。在文艺复兴（14～16 世纪）之前，中国传统数学（到 14 世纪初）以及后来发展起来的印度、阿拉伯数学占据了世界数学舞台的中心。文艺复兴之后，世界数学中心转移到了欧美。

中华民族有 5 000 年文字可考的历史，勤劳勇敢的炎黄子孙在各个文化领域都做出了杰出的贡献。中国传统数学正是中国文化宝库的一个重要组成部分，同时也是世界数学之林中最古老挺拔的一枝，它在中国特定的历史条件和社会环境中以自己的方式积累了丰富的知识，有许多杰出的成就。从公元前 2 世纪至公元 14 世纪初的，长达一千六七百年时间内，中国传统数学虽有高潮、低潮，却一直走在世界的前列，在众多的领域内保持世界领先的水平。

中国数学可以分成远古至春秋的萌芽，战国至秦汉框架的确立，三国至唐初理论的奠基，唐中叶至宋元的高潮，明初至清中的衰落，清中至清末中西数学的合流以及中国近现代数学的奠基与发展等几个重要阶段。中国传统数学密切联系社会实际，长于计算，其算法具有程序化、机械化的特点，有的可以直接用于电子计算机，并对现今的数学教育、数学研究有重要的价值和启迪作用。

中国数学与西方数学各自独立发展而又相互影响，风格独特，自成体系，影响深远，在世界数学史上占有极为重要的地位，值得我们认真学习和研究。

一、算术、算法、算经、算学和数学

在我国古代，数学称为算术。也就是说，古代的算术，是和英语中 mathematics 相对应，而不是对应于 arithmetic。它包括了今天初等数学中的算术、代数、几何和三角等多方面的内容。算术的名称，反映出中国古代数学以计算为中心的特点。“算”字有一个同音字“筭”，两者的古代含义有些区别。东汉许慎《说文解字》说：“筭，长六寸，计历数者。从竹从弄，言常弄乃不误也。”“算，数也。从竹从具，读若筭。”可见二字之本义：筭指中国古代的计算工具算筹，而算则是用算筹摆成的数。从现存资料看，“算术”一词最早见于公元前 1 世纪编成的《周髀算经》卷上：“……此皆算术之所及……算数之术，是用智矣。”算术，就是用以处理实际问题的计算方法，这反映出中国古代数学以研究算法为中心的实际情况。汉唐数学著作原来都

称为“××算术”，如《九章算术》、《五经算术》等。后来为提高这些著作的地位，将“××算术”改称“××算经”，如《五曹算经》、《孙子算经》、《缉古算经》等。“算术”后来又称为“算学”、“算法”或“数学”。隋唐国子监设有算学馆，元代朱世杰著有《算学启蒙》，“算学”就是计算之学问。宋元时期及明代的数学著作又常冠以“算法”之名，如《详解九章算法》、《九章算法比类大全》、《算法全能集》、《丁巨算法》、《详明算法》、《算法统宗》等。同时，“数学”一词也开始使用，例如南宋数学大家秦九韶说他“尝从隐君子受数学”，他的著作《数书九章》曾名《数学大略》或《数学九章》，而朱世杰被莫若称作“数学名家”。宋元以后，“算学”、“数学”一直通用。1935年，中国数学名词审查委员会仍主张二词并用。1939年6月才正式确定用“数学”一词，而不用“算学”。

二、中国传统数学的突出成就

“数学是中国人民擅长的学科”(华罗庚语)。数学在中国古代是最发达的基础学科之一，出现了《九章算术》及其刘徽注、《缀术》、《数书九章》、《测圆海镜》、《四元玉鉴》等一系列辉煌杰作，造就了刘徽、祖冲之、贾宪、秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰等一批堪与欧几里得、阿基米德、丢番图、阿尔·卡西等相媲美的数学家，取得了具有世界意义的重大成就。十进位置值制记数法被马克思誉为“人类最美妙的发明之一”；当西方19世纪还在为负数的合法性争论时，我国早在公元前1世纪就把负数毫不迟疑地用于求解线性方程组的算法中了。从公元前1世纪到14世纪初的1 500年间，我国数学家在很多方面取得了令世人惊叹的重大成果，主要有：① 算筹、筹算与十进位置值制记数法；② 分数理论；③ 率的理论；④ 正负数及其运算法则；⑤ 线性方程组及其解法；⑥ 设未知数列方程及一般高次方程数值解法；⑦ 多元高次方程组及其解法；⑧ 一般高阶等差级数求和；⑨ 一次同余式解法；⑩ 割圆术及其对圆周率的科学推算；⑪ 勾股、重差理论及其应用；⑫ 无穷小分割和极限思想；⑬ 多边形面积和多面体体积公式的推导与证明；⑭ 珠算技术等。

中国数学家以自己的聪明才智在世界数学史上树起了一座座丰碑。从希腊文明走向衰落到文艺复兴前的一千四五百年间，中国古代数学长期繁荣发达，占据着世界数学舞台的中心，在人类文明史上写下了光辉的篇章。

三、中国数学史的分期

中国数学史分期是一个有争议的问题。要进行恰当的分期，既应注意历史的沿革，又要重视数学本身的发展。中国数学史的分期应依据中国社会历史条件和数学自身的特征，坚持以数学本身的特征为主要依据，要把时期划在有代表性的成

果形成之前或之后，同时要兼顾中国传统数学的含义。为此我们对中国数学史分为以下几个阶段：

第一时期：中国数学的萌芽——远古至春秋；

第二时期：中国传统数学框架的形成——战国至两汉；

第三时期：中国传统数学理论的奠基——魏晋至南北朝；

第四时期：中国数学专科教育的诞生——隋唐；

第五时期：中国传统数学的高潮——唐中叶至宋元时期；

第六时期：中国数学的衰落——明初至清中(1840 年)；

第七时期：中西数学的合流——清中至清末(1911 年)；

第八时期：中国近现代数学的奠基与发展——清末至今。

第二章　中国早期的数学知识和数学思想

§2.1　中国早期的数学工具——算筹与规、矩

中国传统数学以计算为中心，在算法的构造性和机械化方面取得了十分辉煌的成就。其中，十进位置值制记数法、筹算和珠算在数学发展中所起的作用及其显示出来的优越性，在世界数学史上占有重要的地位。

一、计算工具——算筹

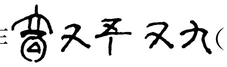
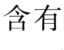
算筹即用于计算的小竹棍，它是中国人创造的计算工具。珠算产生以前，我们的祖先用算筹来计算。算筹又称筹、策、算子等。算筹起源于何时，已难征考。"算"和"筹"二字出现在春秋战国时期的著作(如《仪礼》、《孙子》、《老子》、《法经》、《管子》、《荀子》等)中。因此，最迟在春秋末年，算筹的使用已相当普遍，书中多有记载，如"孟子持筹而算之"(《七发》)，《老子》说："善数不用筹策"，等等。在这以前，算筹已经历了相当长的时间。

算筹常用竹制成，也有用木、骨或石做的，近年来出土的算筹用骨制成。据《汉书·律历志》记载，"算法用竹，径一分，长六寸"，分别合今 0.23 cm、13.8 cm，这与 1971 年陕西省千阳县出土的西汉骨质算筹基本吻合。1954 年在长沙的一座战国楚墓中挖出一个竹筒，内装竹棍 40 根，是为算筹之实物。这种算筹是当时世界上最灵巧的计算工具，简便、灵活，可进行复杂的计算。但是，用算筹计算也有三个缺点：一是算筹较长，用筹计算时占用的地方大；二是截面呈圆形，容易滚动造成错乱。为克服这些缺点，人们不断改进算筹，把算筹由长改短，由圆变方(石家庄出土的东汉算筹截面呈方形，长度也缩短到 7.8～8.9 厘米，后来的算筹又有缩短)；三是中间步骤不能保留，因此不便于检验。此外，从现代观点看，过分依赖于算具，也不利于数学的符号化和抽象化。算筹自产生以来，一直是中国最主要的计算工具，直到元明时代才逐渐被珠算所代替。

二、算筹记数依据十进位置值制

先秦典籍中有"隶首作数"、"结绳记事"、"刻木记事"的记载，说明我们的先民在生产和生活的实践活动中，从判别事物的多寡中逐渐认识了数。中国古代的记

数据《易·系辞》记载:“上古结绳而治,后世圣人易之以书契。”三国时吴人虞翻在《易九家义》中也说:“事大,大结其绳;事小,小结其绳,结之多少,随物众寡。”这些记载说明在文学产生之前,曾用绳结的多少表示事物数量的多少,这是原始社会普遍使用的记数法。此外还有刻画记数,这是比结绳记数更进步的一种记数法。

从有文字记载开始,我国的记数法就遵循十进制。殷代的甲骨文(公元前14～公元前11世纪)和西周的钟鼎文都有一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等13个记数单字,在殷墟出土的甲骨文卜辞中出现最大的数字为“三万”,十万以内自然数的记数用合文书写,其中已经蕴含有十进位置值制的萌芽。例如二千六百五十六写作(甲骨文),六百五十九写作(钟鼎文)。这种记数法含有明显的位置值制意义,“”字表示隔开多值数字。实际上,只要把“千”、“百”、“十”和“又”的字样取消,便和位置值制记数法基本一样了。

春秋战国时期是我国从奴隶制转变到封建制的时期,生产的迅速发展和科学技术的进步提出了大量比较复杂的数字计算问题。为了适应这种需要,劳动人民创造了一种十分重要的用算筹计算的方法。中国最晚在春秋末年人们已经掌握了完备的十进位置值制记数法,普遍使用了算筹这种先进的计算工具。人们已谙熟九九乘法表、整数四则运算,并使用了分数。

算筹计数的具体方法见于公元400年左右的《孙子算经》:

“凡算之法,先识其位。一纵十横,百立千僵,千、十相望,万、百相当。”

古代算筹的功用大致和后来的算盘珠相仿,五以下数用几根筹表示几,6,7,8,9四个数目,用一根筹放在上边表示五,余下来每一根筹表示一,放在下边。用算筹表示数时有纵、横两种方式(图2-1):

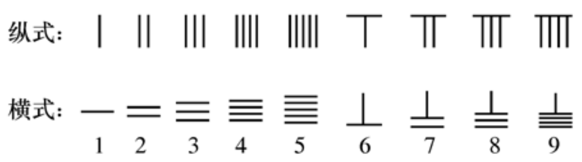
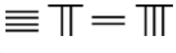


图2-1

这是九个基数,零则以空位显示。我国的算筹采用位置佐制记数法,即将万,千,百,十等意义,通过数码所在位置加以表示,若要表示一个多位数,可像现在用阿拉伯数码记数一样,把各位的数目从左到右横排。个位数用纵式表示,十位数用横式,百位、万位用纵式,千位、十万位用横式,以此类推,交替使用纵横两式。如4728用算筹表示出来是,遇到数字有空位,如39057则用算筹表示为,这时百位上是空位,不放算筹,由于每位数字记法需纵横相间,中间有没有空位是容易辨别的。显然这种位置值制记数法,比同时代的罗马记数法要先

进多了。

算筹以 18 种筹式符号，再加上空格，可以表示任意的自然数，是典型的十进位置值制记数法。在古代文明中，古巴比伦采用六十进位置值制记数法；古希腊（以及后来的古罗马）虽使用十进制记数法，但不是位置值制，十、百、千用不同的符号表示，使用起来远不及中国的十进位置值制记数法方便。我国的这种记数法，对世界文明的发展具有重大意义，著名科技史家李约瑟博士认为："如果没有这种十进位制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了。"

中国古代用算筹进行计算，称作筹算。中国古代数学的光辉成就，大都得益于筹算的便利。依据位置值制，整数四则运算需要熟练掌握。古时乘法口诀从"九九八十一"开始，故称"九九乘法表"或简称"九九"。《管子》等书中便记载着"九九"歌诀，顺序与今正好相反。春秋战国时代，"九九" 歌已是家喻户晓的常识了。《吕氏春秋》记载，齐桓公（公元前 685～公元前 643 年在位）求贤纳士，有一个人以懂得"九九"之术自荐，齐桓公让人戏弄他说："九九足以见乎？"那人答道："九九薄能耳，而君礼之，况贤于九九者乎？"桓公听了以后觉得很有道理，于是以礼待之。一月之间，四方有能之士竞相投奔桓公，为他所用，终于成就了桓公的霸业，对此，《韩诗外传》和《战国策》等也有记载。从这个故事可知，春秋时代做乘法已是一件很容易的事，加减法自然不在话下。作乘除运算必须先会加减法。《孙子算经》、《夏侯阳算经》记载了古代用算筹进行乘除运算的方法，已与现在的方法和步骤基本一致。

三、中国古代的测绘工具——规、矩

在中国出土的新石器时代的陶器大多为圆形或其他规则形状，陶器上有各种几何图案，通常还有三个着地点，这些都是早期几何知识的萌芽。传说伏羲创造了画圆的"规"、画方的"矩"。规、矩是我国十分优越的两种测绘工具。中国的测量术长期发达，得益于此。规即用来画圆的规，矩是直角拐尺，用来画直线形，其形状为一等腰直角三角形。商代甲骨文中已有"规"和"矩"的象形字，所以它们最迟在商代已经出现。春秋战国时期，这两种工具被普遍用于测量和几何作图，并延续后代。在汉代出土的砖石画中，例如汉武梁祠的石室造像中，通常可见伏羲执矩，女娲执规的形象。

§2.2 春秋战国时期的数学知识和数学思想

相传西周初年，周公（公元前 11 世纪）制礼，数学成为贵族子弟教育中六门必修课程——"六艺"之一。《周礼 · 地官司徒》说："保氏掌谏王恶而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。"艺者，

技艺，把数学作为一种技艺来传授是中国古代非常独特的数学教育观念，这符合中国古代文化的特点，也为后来数学教育的发展规定了方向。不过，当时学在官府，数学教育的目的是培养具有一定数学知识(技艺)的官吏，以使他们能胜任官职，数学教育的发展是相当缓慢的。“九数”就是数学的九部分内容，当时是些什么样的内容，已不可考。东汉经学大师郑玄(公元127～200年)引东汉初大司农郑众(?～公元83年)的说法：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。”这些项目与成书于西汉的《九章算术》除少量差异外，大部分相同。公元3世纪刘徽说《九章算术》就是从“九数”发展而来，这是可信的。这种“九数”大体到战国时才有较完备的内容，涉及算术、几何、代数等多方面的内容。而关于整数的四则运算，某些比例和比例分配方法、若干面积和体积公式、勾股和测望的某些方法则可能在春秋时代已经具备。

值得注意的是，人们在商代甲骨文和西周金文的基础上，逐渐懂得把字写在竹片(或木片)上，用绳子穿成册，这就是早期的书。写上字的竹片称为简，或竹简。春秋时期的大批数学成果，便是通过竹简流传下来的。

战国时代，各诸侯国相继完成了向封建制度的过渡。思想界、学术界诸子林立，百家争鸣，学术思想十分活跃。这一时期形成的诸子百家，为中国古代科学文化的发展创造了良好的条件，影响极大。数学园地更是生机盎然，朝气蓬勃。

一、《墨经》中的数学知识与数学思想

1.《墨经》中的几何与逻辑知识

《墨经》是以墨翟(约公元前490～公元前405年)为首的墨家学派的著作。墨翟，鲁国人，春秋战国时代杰出的政治家、思想家、科学家，被尊为墨子。《墨经》分《经上》、《经下》、《经说上》、《经说下》四篇，另有《大取》、《小取》二篇。《墨经》是诸子百家中阐述自然科学理论和学说最丰富的著作，包括光学、力学、逻辑学、几何学等各方面的知识。

《墨经》讨论的几何概念可以看作数学理论研究在中国的最初尝试，该书的显著特色是试图把形式逻辑用于几何研究，在这一点上，它同欧几里得(Euclid，约公元前330～公元前275年)《几何原本》相似，一些几何定义也与《几何原本》中的定义等价。下面略举几例：

1) 经：“平，同高也”——两线间高相等，叫做“平”。这实际是平行线的定义。

2) 经：“同长，以正相尽也”——“正相尽”是正相合的意思，这里给出了两线段等长的定义，即如果两条线段重合，就叫“同长”。

3) 经：“中，同长也”——到线段两端的距离相同的点叫“中(点)”。

4）经："圜，一中同长也"——"圜"通"圆"，是环绕的意思。这里是讲到一个中心距离相同的图形叫做"圆"。这与欧几里得《几何原本》中圆的定义颇为相似。

5）经："直，参也"——这是以三点共线定义为"直"。后来刘徽在《海岛算经》中用"参相直"说明三点在一直线上。

6）经："端，体之无厚，而最前者也"——这是现代几何学中的点，点不可分。

说："端，是无间也"——点，没有空隙。

7）经："方，柱隅四匝也"——"柱隅四"是棱柱的四个角，"匝"是环绕一周的意思，这里给出了正方形或长方形的定义。

《墨经》注重抽象性和思辨性，以逻辑学作为其论说的工具，《墨经》中逻辑思想十分丰富，其中数学中有一条重要记载："小故，有之不必然，无之必不然。大故，有之必然。"用现代语言说，"大故"是"充分条件"，而"小故"则是"必要条件"。

2.《墨经》中的无限分割思想

有限与无限的矛盾，是数学中的一对基本矛盾。对这一问题认识的不断深化，推动着古今数学的发展。《墨经》中有丰富的无限思想，其中也讨论了分割物体的问题。例如"端"的概念，就是通过无限分割，而最终分到一个不可再分的"端"。《墨子·经下》："非半弗 [1]，则不动，说在端。"《经说下》解释道："非。 半，进前取也，前则中无为半，犹端也。前后取，则端中也。 必半，毋与非半，不可 也。"他们认为，如果把一条线段分成前后两半（比如以左为前，以右为后），保留前半而弃去后半（图 2-2 中 OB），再弃去前半的后半（即 CO），如此不断地分割和取舍，剩余部分小到不能再分为两半，就是端（A 点）。如果采用前后取的办法，即第一次取线段前半，第二次取前半的后半，第三次取后半的前半……取到最后，也会出现一个不可分割的"端"，这个端在线段中间而不在边缘（位于 CO 之间），这就是《墨经》所云"前则中无为半，犹端也。前后取，则端中也"。很明显，这种思想与近代极限理论是相符的。数学分析中用区间套来限定数轴上一个实数点的方法与此类似。所以，我们可以把这种分割思想看作区间套原理的雏形，其中蕴含着"点是线段无限分割之极限"的思想。墨家认为无限分割的结果终究会达到一个不可再割的"端"，是一种实无限思想。

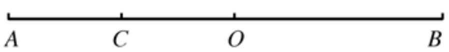


图 2-2

关于无穷的思想，古代也有萌芽。墨家在度量过程中明确给出"有穷"及"无穷"的定义：

[1] ，读 zhuó。

经："穷，或有前不容尺也。"

说："穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。"

即用一个长度单位"尺"去量一个区域，若能达到距边缘不足这个长度单位"尺"的程度，则称这个区域为有穷；如果继续量下去，前面总是长于这个长度单位"尺"，则称这个区域为无穷。

总之，以上《墨经》中讨论的无限分割以及对"大故"与"小故"的区分等逻辑思想，在哲学史和数学史上都是十分重要的事件。可惜的是，墨家并未发展成为我国思想文化的主流。随着墨家的衰落，墨家数学理论在形成体系之前便夭折了。

3. 惠施对数学中"无限"的认识

据战国时成书的《庄子·天下篇》记载，名家宋国人惠施（约公元前370～公元前310年）曾提出："至大无外，谓之大一，至小无内，谓之小一"的观点。其中"大一"、"小一"可理解为无穷大，无穷小。这段话的意思是：大到没有外部，称为无穷大，小到没有内部，称为无穷小。《庄子·天下篇》书中还有"一尺之棰①，日取其半，万世不竭"的著名命题，可以看作是对"小一"的发挥，其中体现了物质无限可分的思想。显然，名家与墨家的命题是不同的。名家认为无限分割的过程永远不会完结，类似于古希腊的潜无限。

惠施曾任梁国的宰相，论辩奇才，是庄子的朋友，他与公孙龙并列为名家的代表人物。惠施的著作多已亡佚，只能从其他诸家的论述中看到他的言行片段。他的学说强调万物的共相，因而事物之间的差异只是一种相对的概念，现存与惠施有关的许多奇怪命题，如"轮不辗地"、"矩不方"、"规不可以为圆"、"飞鸟之影未尝动也"、"镞矢之疾而有不行不止之时"，等等，过分强调抽象的数学思想和哲学思辨，与"火不热"、"鸡三足"等概念游戏不能同日而语。

二、《周易》中的数学知识与数学思想

《周易》又称《易经》，成书于春秋时期，著者不可考，是中国最古老的书籍之一，被认为是中国文化的源头，儒家经典之首，成为仕人必读之书。

《周易》，包括《经》、《传》。《周易》的"易"，即为变，变换之意，"穷则变，变则通，通则久"，充盈辩证法思想，给后人以重要的启迪。

《周易》的宇宙变换模式：《易传·系辞》"易生太极，是生两仪，两仪生四象，四

① 棰，读 chuí。

象生八卦”,《易卦》可看作由阴爻(⚋否定)和阳爻(⚊肯定)组成的二元符号系统。其中包含的数学思想主要有:

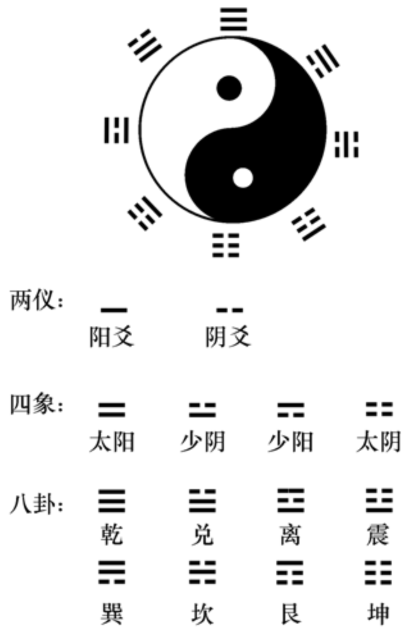


图 2-3

1. 组合数学的萌芽

组合数学虽是现代数学的分支,它的思想却可以追溯到遥远的古代。《易经》便含有组合数学的萌芽。书中通过阴阳卦爻预言吉凶。阳爻⚊和阴爻⚋,合称“两仪”。

每次取两个,按不同顺序排列,生成“四象”:太阴⚏、少阴⚍、少阳⚎、太阳⚌。

每次取三个,生成八卦:坤☷、震☳、坎☵、兑☱、艮☶、离☲、巽☴、乾☰(图 2-3)。

每次取六个,则生成六十四卦。分别表示 64 种事物或现象的可能状态。四象、八卦与六十四卦的排列,相当于组合数学中的有重排列:从 n 种元素中每次取 r 个,共有 n^r 种排列法。

2. 二进制思想

在数学史上,二进制数系是与德国伟大的数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646～1716)的名字联系在一起的。莱布尼兹发明二进制后不久,通过来中国传教的传教士白晋(J.Bouvet,1656～1730)了解了中国的许多事情,他还见到了从中国寄去的八卦。莱布尼兹对《周易》很感兴趣,他认为中国的八卦中蕴含着二进制思想,因此惊叹不已,他用中国的二进制来解释自己手摇计算机的原理。实际上,若把“⚊”和“⚋”两种卦爻分别用 1 和 0 代替,八卦就转换成二进制的数码,即可表示为

000(坤)001(震)010(坎)011(兑)
100(艮)101(离)110(巽)111(乾)

莱布尼兹说,“八卦”是“流传于宇宙的科学中最古老的纪念物”,这项发明“对于中国人民实在是值得庆幸的事情”。莱布尼兹也因此产生对中国古代文明的崇敬,特别希望到中国来,但由于种种原因,他未能如愿。据说,出于对中国的向往,莱布尼兹曾复制了一台自己发明的手摇计算机送给中国的康熙皇帝,成为中、德关系史上的一段佳话。

3. 坐标系思想

若把阳爻看作“＋”的数学符号，把阴爻看作“－”，八卦中每一卦的三个爻分别作为 x,y,z，则八卦就是：$+x+y+z$，$-x+y+z$，…，$-x-y-z$。正好代表笛卡儿空间坐标系的八个卦限。有材料说，卦限的“卦”字，就是从“八卦”借用过来的。

《周易·系辞传上》记载：“河出图，洛出书，圣人则之。”这是古代文献中关于河图洛书的最早记载。后来发展成为九宫图，实际上是中国最古老的三阶幻方。用现代数字表示就是图 2－4。另外，《周易》极言数学的重要性，说它可以“通神明”(《系辞传》)、“顺性命(《说卦传》)，这一观点对秦九韶等宋代数学家的影响很大。”

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 2－4

§2.3　《周髀算经》与勾股定理

一、《周髀算经》的成书

现今认为《周髀算经》是中国最早的一部天文、数学著作，成书确切年代没有定论，约成书于公元前 1 世纪。它本是一部以数学方法阐述盖天说的天文著作。“髀”原义是股或股骨，这里借指测量用的表(标杆)，因书中记载了不少周代的天文知识，故名《周髀》。唐初选定数学课本时，取名《周髀算经》。

二、《周髀算经》的主要内容和数学成就

《周髀算经》是周代传下来有关测量的理论和方法。卷上记载了“商高答周公问”和“陈子答荣方问”。其中就有中国最早的勾股定理。

1. 勾股定理

《周髀算经》提出的勾股定理包括特殊和一般两种情形：

此书第一章记述西周开国时期(约公元前 1000 年)周公姬旦与商高的问答：

昔者周公问于商高曰：“窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？”商高曰：“数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩，以为句广三、股修四、径

隅五……"

这里,"句"即"勾",这就是著名的勾股定理的特例 $3^2+4^2=5^2$。

卷上另一处叙述周公后人荣方与陈子(约公元前 6、7 世纪)的对话。其中包含了陈子利用勾股定理测量太阳高度的方法:

> 陈子曰:"若求邪至日者,以日下为句,日高为股,句、股各自乘,并而开方除之,得邪至日……"

这里用勾股定理及比例算法测太阳高远,这是从天文测量中总结出来的普遍原理。周公与商高对话形式中实际上已给出勾股定理的一般形式,故也称之为"商高定理"。它的公式是:

$$弦=\sqrt{勾^2+股^2}。$$

这时开平方已有记载,只是没有开方过程。

2.《周髀算经》的重差术

《周髀算经》中有较详细的记载。周公曰:"大哉言数!请问用矩之道?"商高曰:"平矩以正绳,偃矩以望高,覆矩以测深,卧矩以知远,环矩以为圆,合矩以为方。"这六句话中的前四句是说"矩"的四种用法,即如何测直、测高、测深和测远。后两句是说"矩"能形成圆方。"平矩以正绳"即是说矩可用来确定铅垂线和水平线,"偃矩以望高"就是说把矩竖直放着可以测高。如果不知目的物的远近,要量它的高,必须两次"偃矩"测望;要量它的深,必须两次"覆矩"测望;要量二目的物之间的距离,必须两次"卧矩"观测。后来数学家称这种测量方法为重差术。《周髀算经》还讨论了测量"日高"的方法。如图 2-5,设在 A、B 处立表(即"髀")AA'与 BB',记表高为 h,表矩为 m,而表日影差为 n($n=BD-AC$),《周髀算经》相当于得出日高公式:$PO=PO'+h=\dfrac{h\cdot m}{n}+h$。其他用法,道理与望离类似,这一记载显示了商高时代我国的测量数学水平。我国的陈子也因此被人誉为世界"测量学之祖"。

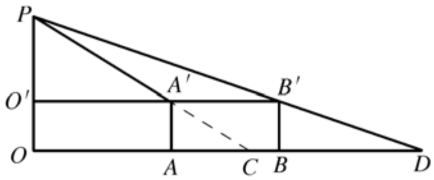


图 2-5

除此之外,《周髀算经》的其他数学成就还有:

1) 分数运算。如四分历的表示,不仅有分数的加减运算,还有乘除运算的实例,有的还相当复杂。

2) 等差数列和圆周长求法。

3) 一次内插法。《周髀算经》给出了最简单的等间距一次内插法,如已经测得

二十四节气中冬至、夏至的日影长，即可推算其节气的日影长。一般地，设 $f(a)$，$f(h)$分别表示夏至、冬至日影长，$f(n)$是夏至到冬至的第 n 个节气的影长，则 $f(n)=f(a)+n\Delta$，其中，$\Delta=\frac{1}{12}[f(h)-f(a)]$，因为二十四个节气是循环的，而以冬至、夏至为分界点，它们各在前半年和后半年，即各十二节气。

3. 赵爽对勾股定理的证明

赵爽，一名婴，字君卿，身世不详，三国时代吴国数学家，全面注《周髀算经》，其中“日高图注”奠定了重差术的理论基础。《周髀算经》注中的“勾股圆方图注”共600余字，是数学史上的极有价值的文献。它概括了两汉以来的勾股理论及其应用，对勾股定理进行了表述，并作了理论证明，这也是我国数学家对勾股定理的最早证明，充分表现出中国数学的独特思想方法。

赵爽将勾股定理表述为：

“句股各自乘，并之，为弦实。开方除之，即弦。”

其证明方法叙述为：

“按弦图，又可以句、股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以句股之差自相乘为中黄实。加差实，亦成弦实。”

根据弦图，由四个全等的勾股形和一个正方形所组成，设勾股形的三边分别为 a, b, c，则正方形的边长等于勾股差，由图 2－6 和术文可得：

$$2ab+(b-a)^2=c^2,$$

将 $(b-a)^2$ 展开即得勾股定理。

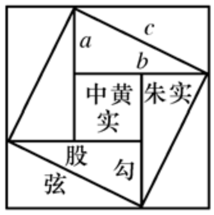


图 2－6

赵爽的这个证明可谓独具匠心，体现了中国数学证明的特点：① 利用构造方法，而不是通过演绎方法，对几何图形的截、割、拼、补，利用面积或体积关系来证明，简洁、形象、直观，易于理解和掌握，且极富创新意识，这种方法开创了中国出入相补原理的先河，成为中国“析理以辞，解题用图”的先导。以后的数学家大多也保持了这一风格并且有重要发展。例如稍后一点的刘徽在证明勾股定理及解决平面和立体图形的问题时也是将具体图形进行不同的分合移补，利用出入相补原理来实现的。② 该证明是以形证数，数形结合思想的集中体现。赵爽对勾股定理的证明，利用几何图形的面积与体积关系，来证明代数式之间的恒等关系，这种方法既具有严密性，又体现了数学的整体性，是数学研究的一种重要方法，也是数学发展的一个极其重要的条件。这不仅为中国古代以形证数、形数统一、代数和几何紧密结合、互不可分的独特风格树立了一个

典范，而且在世界数学史上具有独特的贡献和地位。正如当代中国数学家吴文俊所说："在中国的传统数学中，数量关系与空间形式往往是形影不离地并肩发展着的……17 世纪笛卡儿解析几何的发明，正是中国这种传统思想与方法在几百年停顿后的重现与继续。"

4. 西方对勾股定理的研究

勾股定理是初等几何中的一个基本定理。这个定理有着十分悠久的历史，几乎所有文明古国(希腊、中国、埃及、巴比伦、印度等)对此定理都有所研究。勾股定理在西方被称为毕达哥拉斯定理，相传是古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 580～约公元前 500 年)于公元前 550 年首先发现的。据说当他证明了勾股定理以后，欣喜若狂，杀牛百头，以示庆贺。故西方亦称勾股定理为"百牛定理"，但毕达哥拉斯对勾股定理的证明方法已经失传。著名的希腊数学家欧几里得(Euclid，公元前 330～公元前 275 年)在巨著《几何原本》(第Ⅰ卷，命题 47)中给出一个证明，现介绍如下。

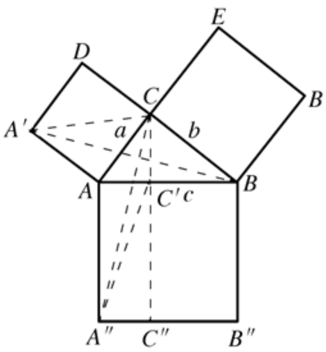


图 2-7

证明：图 2-7 所示，分别以 Rt△ABC'的三边向外作正方形 $AA'DC'$，$BB'EC'$和 $AA''B''B$，连接 $A'B$，连接 $A'B$，$A''C'$，∵ $AA'=AC'$，$AB=AA''$，$\angle A'AB=\angle C'AA''$。

$$\therefore \quad \triangle ABA' \cong \triangle AA''C\text{(SAS)}。$$

过 C 向 $A''B''$引垂线，交 AB 于 C'，交 $A''B''$于 C''。

连接 $A'C$，$A''C'$，

$$\because \quad S_{\triangle AA'B}=S_{\triangle AA'C}\text{(同底等高)}$$

$$S_{\triangle AA''C}=S_{\triangle AA''C'}\text{(同底等高)}$$

而 $\triangle ABA' \cong \triangle AA''C$。

$$\therefore \quad S_{\triangle ABA'}=S_{\triangle AA''C}。$$

$$\therefore \quad S_{\triangle AA'C}=S_{\triangle AA''C'}$$

易知

$$S_{\text{正方形}AC'DA'}=2S_{\triangle AA'C}，$$

$$S_{\text{矩形}AA''C''C'}=2S_{\triangle AA''C'}$$

$$\therefore \quad S_{\text{正方形}AC'DA'}=S_{\text{矩形}AA''C''C'}。$$

同理可得，

$$S_{\text{正方形}BB'EC'}=S_{\text{矩形}B''BC'C''}。$$

$$\therefore \quad S_{\text{正方形}AA''B''B}=S_{\text{正方形}ACDA'}+S_{\text{正方形}BB'EC}，$$

即
$$a^2+b^2=c^2。$$

很有意思的是，美国第二十任总统伽菲尔德也曾对勾股定理给出过证明。现简述如下：

如图 2－8，将 Rt△ABC'竖起，得到 Rt△BED，

$$S_{梯形AC'DE}=\frac{1}{2}(a+b)^2$$
$$=\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2), \qquad ①$$

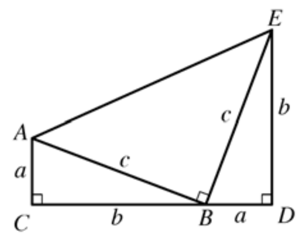


图 2－8

又
$$S_{梯形AC'DE}=S_{\triangle ABC'}+S_{\triangle EBD}+S_{\triangle ABE}$$
$$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ba+\frac{1}{2}c^2$$
$$=\frac{1}{2}(2ab+c^2)。 \qquad ②$$

比较以上二式，便得
$$a^2+b^2=c^2。$$

1876 年 4 月 1 日，伽菲尔德在《新英格兰教育日志》上发表了他对勾股定理的这一证明。5 年后，伽菲尔德就任美国第二十任总统。后来，人们为了纪念他对勾股定理直观、简捷、易懂、明了的证明，就把这一证法称为勾股定理的“总统”证法，这在数学史上被传为佳话。

人们对勾股定理感兴趣的原因还在于它可以作出推广得出许多有价值的结论。例如：

欧几里得在他的《几何原本》中给出了勾股定理的推广定理：“直角三角形斜边上的一个直边形，其面积为两直角边上两个与之相似的直边形面积之和。”

从上面这一定理可以推出下面的定理：“以直角三角形的三边为直径作圆，则以斜边为直径所作圆的面积等于以两直角边为直径所作两圆的面积之和。”

勾股定理还可以推广到空间：

以直角三角形的三边为对应棱作相似多面体，则斜边上的多面体的表面积等于直角边上两个多面体表面积之和。

三个侧面两两垂直的四面体的各个侧面面积的平方和等于底面面积的平方。

若以直角三角形的三边为直径分别作球，则斜边上的球的表面积等于两直角边上所作两球表面积之和。

如此等等。

第三章 《九章算术》及其突出成就

§3.1 《九章算术》简介

一、《九章算术》的成书

《九章算术》是中国最重要的数学经典，约成书于公元前1世纪，稍晚于《周髀算经》。《九章算术》集先秦到西汉数学知识之大成。据东汉末大学者郑玄（公元127～200年）引东汉初郑众（？～公元83年）说，西汉在先秦"九数"基础上又发展出勾股、重差两类数学方法。刘歆（？～23年）按"九数"的"九"分为九类，又采用九个名称，称为九章：乡田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、勾股，把"差分"改为"衰分"，用"勾股"代替了"旁要"。魏刘徽说，《九章算术》是由九数发展而来的，由于秦朝焚书而散坏，西汉张苍（？～公元前152年）、耿寿昌（公元前1世纪）收集秦火遗残，加以整理删补，便成为《九章算术》[①]。

二、《九章算术》的结构、内容和体例

《九章算术》确定了中国古代数学的框架、内容、形式、风格和思想方法的特点。全书共分九章，章有标题，有90余条抽象性算法、公式，246道例题及其解法，基本上采取算法统率应用题的形式，包括丰富的算术、代数和几何内容。《九章算术》是以计算为中心以解决实际问题为目的的算法体系，在结构上总体可分："问"、"答"、"术"。如果几个相连的题的解法完全相同，就把"术"改在这类题的最后一题的"答"之后，作为一般性的算法。还有几章，在章名之后，第一题之前给出了"术"，带有全章总术的性质，这是更为一般性的抽象算法。书中的246题，几乎全是应用题，这些问题按不同的用途归为九大部分，故名《九章算术》。

下面简介各章内容和主要成就：

"方田"章：（38问）主要讲平面图形的计算，包括系统的分数算法，提出了完整的分数运算法则，各种多边形、圆、弓形等的面积公式。

"粟米"章：（46问）粮食交换中的比例问题，讨论了各种比例算法。

"衰分"章：（20问）"衰"是按比率，"分"是分配。这里是比例算法在分配物资等问题中的应用，提出了比例分配法则。

---

① 郭节春，《中国古代数学》，商务印书馆，1997年，第6～7页。

“少广”章:(24 问)开平方、开立方问题,给出了完整的开平方、开立方程序。

“商功”章:(28 问)“商”是估算,“功”是工程量。这里是土木工程中的体积计算,讨论各种立体体积公式及工程分配方法。

“均输”章:(28 问)主要是纳税和运输方面的计算问题,解决赋役中的合理负担,也是比例分配问题,还有若干结合西汉社会实际的比较复杂的比例算法。

“盈不足”章:(20 问)算术中盈亏问题的解法。用盈不足术解决的一般算术问题。

“方程”章:(18 问)主要讲线性方程组解法,还论及正负数概念及加减运算法则。

“勾股”章:(24 问)主要是勾股定理的应用、出入相补原理及其在几何中的应用和各种测量术。

三、《九章算术》的主要成就

《九章算术》中的数学成就是多方面的:

1) 在算术方面,主要成就有中国建立了世界上最早、最系统的分数理论,包括分数的四则运算及比较分数的大小,求整数的最大公约数和最小公倍数算法、从最简单的比例问题到“盈不足”算法以及“方程术”,都体现了中国以率作为“算法之纲纪”的特点。《九章算术》在粟米、衰分、商功章中有许多比例问题,在世界上是比较早的。“盈不足”算法需要给出两次假设,是一项创造,中世纪欧洲称它为“双设法”,有人认为它是由中国经中世纪阿拉伯国家传去的。在中世纪阿拉伯国家的数学著作中,这种算法常被称为“契丹算法”,说明是由中国传入的。在欧洲早期的著作中,也有人沿用“契丹算法”这一名称。

2) 在代数方面,主要有线性方程组的解法、不定方程及其解、开平方、开立方、一元二次方程解法等。“方程术”实为线性方程组的解法。“方程”形成完全对应于现代数学中线性方程组的增广矩阵。解“方程”的过程实际上就相当于对上述矩阵施行的种种行的变换的过程。“方程”一章还在世界数学史上首次引入了负数及其加减法运算,还有世界上最早的开平方、开立方程序算法。

3) 在几何方面,主要是提出了各种平面图形的面积、多面体等体积的计算公式,给出了重要的“以盈补虚”的方法和勾股理论的应用。在处理几何问题时,往往归结为数的运算,体现了中国形数结合的思想,“以盈补虚”的方法后来发展成为中国传统的出入相补原理。

四、《九章算术》的历史地位及其影响

1.《九章算术》在中国数学史上的地位和影响

《九章算术》是我国算经之首,在中国数学史上是一部承前启后的极其重要的

著作,对后世数学发展产生了深远的影响。

(1)《九章算术》为中国古代数学著作提供了数学著作的范例和样板

《九章算术》的体例对后世著作影响深远。以后的数学著作,大体采取两种方式:一种是以《九章算术》为楷模编撰新的著作,如《孙子算经》、《张丘建算经》、《数书九章》、《四元玉鉴》等,它们大都采取术文统率应用问题的形式,具有如《九章算术》那种数学理论密切联系实际需要,以计算为中心的特点。另一种是采取为《九章算术》作注的形式,以《九章算术》研究为内容,造就了赵爽、刘徽、祖冲之、祖暅之等有名的数学家,如刘徽注、李淳风等注释、贾宪细草、杨辉详解等,尤以刘、贾、杨的注最为杰出。在这两种形式的著作中,数学家所取得的数学成就都很辉煌。在13世纪中叶以前,中国传统数学的主要成果大多是在研究《九章算术》中取得的。可以说,在秦九韶《数书九章》问世以前,中国传统数学基本上都是在《九章算术》的基础和框架下发展的。

(2)《九章算术》已经建立了中国古代数学的基本框架

从结构和内容上说,《九章算术》之后,新编撰的算经虽然有的在一些方面超过《九章算术》,讨论了新的问题,但从总体上讲,除同余式解法和高阶等差级数求和之外,中国传统数学基本上是在《九章算术》的框架之内发展,有的著作就是在《九章算术》的一部分甚至一个题目的术文上演化而来,有的著作也称为"九章",还有更多的著作甚至径直沿用《九章算术》各卷的卷名、章名,足见其影响之深远。

(3)《九章算术》奠定了中国古代数学教育体系的基础

《九章算术》既是中国最重要的数学经典,同时又是我国古代算学教科书的典范,《九章算术》奠定了中国古代数学教育体系的基础。唐以来被钦定为主要数学教科书,影响极其深远。

《九章算术》的十分显著的特点是为我国数学教育的教材体系打下了基础,形成了中国古代数学教育内容体系的特点:

1)开放的、归纳的、应用体系

《九章算术》的内容几乎都是来自于社会生产、生活的实践,数学教育的目的主要在于"经世致用",就是为了解决这些实际问题,掌握数学实用技能和技艺。因此,数学表达体系采用由个别到一般的推导方式组成,按数学方法进行归纳、综合、形成各章,解决各种类型的实际问题,这种开放的归纳体系实际上是一种应用数学的体系。

2)算法化的内容

书中设有"问"、"答"、"术"。"术"即算法,是《九章算术》着重指出的内容,以"术"设题,改进和发展算法是数学的根本,是中算家孜孜以求的目标,正因为如此,《九章算术》的教育内容体系驾驭了中国数学教育两千多年,并为充实和形成我国数学教育的教材体系打下了坚实的基础。

2.《九章算术》在世界数学史上的地位

《九章算术》不仅在中国数学史上具有巨大的影响,在世界数学史上也占有崇高的地位。作为一部世界科学名著,《九章算术》在隋唐时期就已传入朝鲜、日本,现在它已被译成日、俄、德、英、法等多种文字。它之于中国和东方数学,大体相当于《几何原本》之于希腊和欧洲数学。在世界古代数学史上,《九章算术》与《几何原本》像两颗璀璨的明珠,东西辉映。

1)《九章算术》决定了世界数学研究重心由地中海沿岸的希腊地区转换到了太平洋西海岸的华夏大地。在《九章算术》成书之前,古希腊数学从公元前 6 世纪开始,得到了快速发展,出现了毕达哥拉斯、欧多克索斯、欧几里得、阿基米德等一大批数学泰斗,但从阿基米德、阿波罗尼奥斯以后,希腊数学呈现衰落的趋势,至公元前 1 世纪前后,已是强弩之末了。此时《九章算术》如异军突起,出现在亚洲的东方,这是世界数学史上的一件大事。

2)《九章算术》标志着数学研究的对象和成果形态的重要转变,即由以空间形式的性质为主,以几何学为研究中心,以严密的公理化体系为理论系统的数学,向以数量关系为研究对象,以计算为中心,以术文统帅应用问题为体例的数学转变。在世界数学著作中,《九章算术》可以与《几何原本》相媲美,两书东西辉映,对世界数学的发展都发挥了重要作用。

§3.2 中国古代分数算法

在人类数学史上,人们认识分数比认识小数早得多,中华民族是世界上使用分数最早的民族之一,公元前 4、5 世纪时,分数已在中国广泛应用了,先秦典籍和《周髀算经》中有大量分数运算的记载。中国古代数学经典《九章算术》集其大成,在世界上第一次建立了完整的分数理论,并发展成为以解题为中心的机械化算法体系。

一、《九章算术》中的分数四则运算

《九章算术》中有比较完整的分数计算方法,包括四则运算、通分、约分、化带分数为假分数(我国古代称为“通分内子”,“内”读为“纳”)等,其步骤与方法大体与现代相同。

《九章算术》提出了一系列完整的分数运算的法则,如分数加法法则——合分术;分数减法法则——减分术;分数乘法法则——乘分术;分数除法法则——经分术。此外,还提出了比较分数大小的方法——课分术以及求分数平均值的方法——平分术等。这些“术”均言简意赅,实质都是一个个机械化的算法程序。

对于分数加减运算,《九章算术》已明确提出先通分,使两分数的分母相同,然后进行加减。

合分术为:“母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一。”这里“实”是分子,“法”是分母。“实如法而一”也就是用“法”去除“实”,进行除法运算,用现代数学符号来表示,就是

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}。$$

减分术为:“母互乘子,以少减多,余为实,母相乘为法,实如法而一。”即

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}。$$

乘分术为:“母相乘为法,子相乘为实,实如法而一。”即

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}。$$

《九章算术》对分数除法虽然没有提出一般法则,但算法也很清楚。如方田章的第 18 题:

“有三人三分人之一,分六钱三分钱之一,四分钱之三。问人得几何?”

“答曰:人得二钱八分钱之一。”$\left(\text{即每人得 } 2\frac{1}{8}\text{ 钱}\right)$

经分术为:以人数为法,钱数为实,实如法而一。题中告诉我们,这里人数为 $3\frac{1}{3}$,钱数为$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)$。按照算法,即:$\left(6\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 3\frac{1}{3}=2\frac{1}{8}$ 自然在计算过程中首先需要把带分数化为假分数,然后分数相除,即相当于现在所说的“颠倒相乘”。

二、约分与最大公约算法程序

分数算法的一个重要程序是约分。《九章算术》方田章在提出各种分数运算法则之前,首先就是约分术,约分即化简分数,而不改变分数值。在合分术、减分术、课分术以及平分术中都需要通分。约分和通分是整个分数算法的关键技术,包括对整数最大公约数和最小公倍数的算法,更体现了中国古代数学以筹为算具的筹式演算的特点和计算方法程序化、机械化的思想特征。

中算家无质因数的概念和算法,故没采取将整数分解成质因数进行约分,而是采用“更相减损”这样一套机械化的算法,求“等数”来约分。

《九章算术》的约分程序是:

“可半者半之,不可半者,副置分母、子之数,以少减多,更相减损,求其等也。以等数约之。”

按以上程序,分数约分实为三个步骤:

1)“可半者半之”:即进行观察,若分子、分母都是偶数,可先取其半;

2)“不可半者,副置分母、子之数,以少减多,更相减损,求其等也。”直至求出“等数”;

3)“以等数约之。”

其中第2)步“以少减多,更相减损”是约分之关键,又是典型的机械化程序。若用现代语言翻译其程序,即为:设要约简的分数为 $b/a(b<a)$,则依次从 a 中减去 b,若减 q_1 次($q_1\geqslant 1$)后得余数 $r_1<b$ ($r_1=a-bq_1$),则再从 b 中依次减去 r_1,若减 q_2($q_2\geqslant 1$)次后,余数 $r_2<r_1$($r_2=b-r_1q_2$),则再从 r_1 中减去 r_2…… 如此更相减损,步步重复按规则机械化操作,直至 $r_{n-1}=r_n$,得到等数,即为 a,b 的最大公约数。

由此看来,中国古算约分术即求等数的方法,其实质是术文中的更相减损过程,由于此过程终可在有限步骤内实现,故它是一种构造性方法。其构造性原理在于:等数犹如量之最大公度,分子、分母皆为其整数倍,因而每一辗转相减所得余数也为其整数倍。余数随计算过程减而损之,因而进行有限步后必然得到等数。如刘徽注所说:“其所以相减者,皆等数之重叠,故以等数约之。”目前算术教科书中的辗转相除法可以说是与中国古代的更相减损术相一致的。

此“更相减损求等”法与欧几里得《几何原本》第七卷第二题求最大公约数法的原理是相通的。以《九章算术》方田章第6问约简为例,用现代形式写出两种方法的程序如图3-1:

[49, 91] → [49, 42]
[7, 42] → [7, 35]
→… → [7, 7]

更相减损求等法

	91	49	1
	49	42	
1	42	7	6
	42		
	0		

辗转相除法

图3-1

显然,除最后一步外,两种方法程序完全对应。欧几里得在这个问题中引入了许多概念,给出了冗长的逻辑证明。尽管如此,他还是暗用了一条未加说明的公理,即如果 a, b 都被 c 整除,则 $a-mb$ 也能被 c 整除;中国筹算所采用的“更相减损”方法,实际上也暗用了一条未加说明的公理,即若 a 和 $a-b$ 可以被 c 整除,则 a, b 能被 c 整除。但二者的差异在于:古希腊数学把不证自明的公理放在逻辑演绎的前提条件中,追求的是逻辑的构造;中国古代数学则是把公认的事实作为一种不言自明的公理,运用到筹算操作的每一步骤之中,追求的是筹算运演的机械性构造。

正因为约分术是利用筹算进行演算的机械化算法,可以将其译为现代计算机