

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

电 动 力 学

(第二版)

尹 真

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是“面向 21 世纪课程”系列教材之一.书中介绍了电磁场遵循的普遍规律,电磁波的产生、传播、辐射以及相对论电动力学等内容.在阐明基本概念和理论的基础上,介绍了近代电磁理论的新发展和反映当代科学技术的相关的题材.全书结构严谨,重点突出,深入浅出,并精选了适量例题和习题.

本书可作为综合大学物理、天体物理专业的教材,也可作为电子科学和材料科学以及师范院校相关专业的大学生、研究生的教材和教师参考书.

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/尹真.—2 版.—北京:科学出版社,2005

(面向 21 世纪课程教材)

ISBN 7-03-013569-5

I . 电… II . 尹… III . 电动力学-高等学校-教材 IV . O 442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063597 号

责任编辑:李鹏奇 李俊峰 刘 韩/责任校对:陈丽珠

责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1999 年 8 月南京大学出版社第一版

2005 年 4 月第 二 版 开本: B5(720×1000)

2006 年 2 月第二次印刷 印张: 27 1/4

印数: 2 501—4 500 字数: 508 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

前 言

电动力学研究电磁场和电磁波的基本性质、运动规律以及电磁波与各种形态的物质的相互作用. 1865 年麦克斯韦发表了著名的论文“论电磁场的动力学理论”^[1]. 他总结、修正和推广了前人的工作, 建立了作为物质形态的场——电磁场的运动规律的一整套完备理论, 并且预言电磁扰动以波动形式传播, 电磁波的传播速度等于光速 c . 麦克斯韦的精辟理论和预言在以后的无线电、广播、电视、通信等实践中得到了证明, 并大大促进了科学技术的飞跃发展. 在其之后, 洛伦兹预言电子的存在而创立了电子论^[2], 将物质电磁性质的宏观描述与微观描述联系起来, 弥补了麦克斯韦理论中关于“源”与“场”的关联的不足之处. 1905 年, 爱因斯坦发表论文“论运动物体的电动力学”^[3], 创立了狭义相对论. 狭义相对论的问世对 20 世纪的物理学产生了重大的影响. 相对论电动力学不仅解释了经典理论不能解释的许多现象, 而且对电动力学有了正确的表述. 目前经典电动力学已形成相当完整的理论体系, 电动力学课程也成为当今训练物理素养的一门重要的基础理论课程. 同时, 由于它与现代科学技术的发展和應用密切相关, 所以它也有很强的实用性.

作者自 20 世纪 80 年代初以来, 在南京大学给物理系、基础强化部、天文系和材料科学系学生讲授电动力学课程. 1999 年根据编写的讲义在南京大学出版社出版了《电动力学》教材. 该教材被列入教育部普通高校面向 21 世纪教学内容与课程体系改革项目. 经过教学实践, 听取了教师、学生多方面的意见和建议, 并根据 21 世纪高素质人才目标的需求, 作者对本书进行了以下几方面的探讨、增补和修订:

(1) 尽可能恰当地处理好“繁”与“简”、“深”与“浅”的矛盾, 在保持电动力学系统性、逻辑性的基础上对全书进行了修订. 重新编排了章节, 使原来的 16 章合并为 12 章, 但总的篇幅略有增加. 增补了一些遗缺的课题, 对书中的难点增加了较详细的叙述和解释, 以及增加了例题、图例、习题和思考题. 重新编序的主要是第 1~3 章和第 8 章. 第 1 章对静电场、静磁场做一简短回顾, 介绍了关于矢量势的概念, 最后给出动态电磁场的麦克斯韦方程. 第 2 章将电势和矢量势的多极展开单列为一章, 目的是强调多极展开方法的重要性, 同时为辐射场的多极展开打下基础. 此外, 将第一版中关于静电场、静磁场的边界值问题合并为第 3 章, 将相对论电动力学和运动学合并为第 8 章. 关于洛伦兹电子论(关于色散、散射、光谱线宽度、等离子体振荡和塞曼效应等)的课题, 考虑到相关课题的连贯性, 已将它们分散在各章节中

讨论.

在对全书修订时力求重点突出经典电动力学理论的精髓,强调物理概念和严谨的数学描述统一,同时力求循序渐进,深入浅出,便于读者自学.

(2) 随着科学技术的飞速发展和相关学科的交叉、渗透,“经典”电动力学理论在许多近代课题中得到新的应用和解释.本书尝试把反映近代科技动向和成就的新题材用通俗易懂的语言介绍给学生,将这些题材作为基本理论的例证写进书中.例如,电介质小球相互作用能的公式应用于电致流变液体的新技术;波导理论应用于光纤、光波导;麦克斯韦辐射压力理论应用于激光制冷;散射、衍射理论应用于光子晶体理论.此外,还介绍了电动力学在高温超导电性、等离子体振荡、拉曼效应、A-B效应、磁通量子化、磁多层膜的磁光效应等课题中的应用.这些题材大多反映了近代科研的一些重要成就,有的获得近年的诺贝尔奖,有些与现代微电子、光电子等高科技产业紧密相关.讨论这些题材一方面向学生展示经典理论新的发展,另一方面有利于学生开阔视野、引发和培养科学研究的兴趣、拓宽撰写小论文的思路.对于那些将来致力于科学研究的学生,或许可以缩小和填补基础课与研究工作之间的鸿沟.

与这些题材相关的部分重要参考文献也列于书后,以便读者查阅.

(3) 适当考虑本课程与后续课程的衔接.比如,介绍度规张量不仅让读者了解四维时空坐标的另一种描述方式,而且与广义相对论相衔接.再如,导出电磁场的拉格朗日方程和哈密顿方程,利于过渡到量子场论中去.

(4) 本书注意引导学生在掌握基础概念、基本方法的同时,了解电磁场理论的严谨、精确、美妙、和谐,启发读者对科学思维方法和技巧进行探讨.例如,对称性失效与磁单极子的存在与否的关系、不变量与物理守恒定律的关系以及周期性势场中电子德布罗意波与经典光波的对应关系等.

(5) 本书内容广泛、新颖,适用面较宽.为适应不同学科(物理、天文、材料和电子工程类)和不同层次学生使用,对于一些较深、较难的题材用“*”标记,一般学生在掌握基本要求之外可选择本专业所需的或感兴趣的题材阅读.

(6) 本书精选并增补了例题、习题与思考讨论题,引导读者掌握解题方法、技巧以及对不同解法进行比较.书后附有习题参考答案.思考讨论题可作为课堂讨论或课程小论文的题目.附录提供了阅读本书所需要的数学预备知识,对于不熟悉或不熟练有关数学运算的读者,预读一下较为有益.全书规范了物理和数学符号,与国际上的通用形式尽可能一致.

鉴于作者水平有限,加之时间匆忙,书中疏漏之处欢迎指正.

最后,作者要感谢南京大学冯端院士、陆琰院士,上海交通大学尤峻汉教授在本书成书过程中的鼓励和指教.感谢许敖敖教授、柯善哲教授和张明生教授及兄弟院校同行的支持和帮助.感谢南京大学的同事和学生在教学中的支持和有益讨论.

感谢 1997~2000 级的学生在本书修订、绘图等工作中给予的很多帮助.感谢科学出版社吕虹编审和李鹏奇编辑对本书再版给予的大力帮助和支持.

尹 真

2005 年 2 月 28 日

常用数学公式

三矢量的混合积

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

三矢量的矢积

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

在直角坐标系中

长度元 $d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$

体积元 $dV = dx dy dz$

梯度 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$

散度 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

旋度 $\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

拉普拉斯算符 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

在柱坐标系中

长度元 $d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z$

体积元 $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

梯度 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z$

散度 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} A_z$

旋度 $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$

拉普拉斯算符 $\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

在球坐标系中

长度元 $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\mathbf{e}_\varphi$

体积元 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

梯度 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$

散度 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi$

旋度 $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$

拉普拉斯算符 $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

常用微分公式

$$\nabla (uv) = u \nabla v + v \nabla u$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{A} + u(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = (\nabla u) \times \mathbf{A} + u(\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla u) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

常用积分公式

$$\int_V \nabla u \, d\tau = \oint_S u \, d\mathbf{S}$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) \, d\tau = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}$$

$$\int_S d\mathbf{S} \times (\nabla u) = \oint_C u \, d\mathbf{l}$$

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, d\tau \quad (\text{高斯定理})$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{斯托克斯定理})$$

$$\int_V (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) \, d\tau = \oint_S u (\nabla v) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{格林第一定理})$$

$$\int_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, d\tau = \oint_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{格林第二定理})$$

主要符号表示

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	晶格基矢
\mathbf{A}	矢量势
A	面积
A	安培
a_0	玻尔半径
$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$	倒格矢基矢
\mathbf{B}	磁感应强度
c	真空中光速, 比热容
C	电容
C_{ij}	感应系数
C_{ii}	电容系数
\mathbf{D}	电位移矢量
d	厚度, 晶面间距, 穿透深度
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$	矢量基矢
\mathbf{E}	电场强度
f	力密度
\mathbf{F}	力
F	自由能
\mathbf{g}	动量密度
\mathbf{g}	回旋矢量
\mathbf{G}	倒格矢
G	动量, 吉布斯自由能
\mathbf{H}	磁场强度
H	哈密顿算符
h	普朗克常量
\hbar	$\hbar = h/2\pi$
H_c	临界磁场, 矫顽场

I	光强, 电流强度
J	体电流密度
\mathcal{J}	动量流密度
k_B	玻尔兹曼常量
K	面电流密度
k	波矢
l	长度
L	拉格朗日函数
L	自感系数
L	角动量
m, M	质量
m	磁矩
M	磁化强度
M_{ij}	互感系数
N	电子浓度, 功率密度
N_0	阿伏伽德罗常量
n	折射率, 粒子数密度
P	功率, 压强
P	电极化强度, 正则动量
P_{ij}	电势系数
p	电偶极矩
\mathcal{R}	电磁角动量流
r, R	位置矢量
R	距离, 反射系数
r	距离
q	声子波矢
q, Q	电荷, 正则坐标
Q	电四极矩张量
\tilde{Q}	迹为零的电四极矩张量
\tilde{Q}_{ij}, Q_{ij}	电四极矩张量分量
S	面积
S	能流密度
t	时间
T	温度, 动能, 透射系数

U	能量
u	能量密度
\mathbf{u}	位移矢量
V	体积
v	速度
W	能量
Z	原子序数
α	分子极化率
δ	穿透深度
ϵ	介电常数
ϵ, ϵ_{ij}	介电张量, 介电张量分量
ϵ_0	真空电容率
γ	阻尼系数, 相对论因子, 谱线宽度
λ	波长, 电荷线密度
μ_0	真空导磁率
μ	导磁率
μ_{ij}	导磁率张量分量
μ_B	玻尔磁子
ν	频率
ω	圆频率, 角速度
θ	角度
ρ	电阻率, 体电荷密度
σ	散射截面, 电导率, 面电荷密度
σ	电导率张量
τ	弛豫时间, 寿命
τ	力矩
φ	角度, 相位角
Φ	静电势, 标量势
Ψ	磁通量, 序参量, 波函数
χ	极化率
χ_{ij}	极化率张量分量
Ω	立体角

目 录

前言

常用数学公式

主要符号表示

第 1 章 电磁场基本方程	1
1.1 真空中静电场的散度	1
1.2 静电势和静电场的旋度	6
1.3 存在电介质时的静电场	9
1.4 电流密度和磁感应强度	14
1.5 矢量势	19
* 1.6 矢量势的物理意义—— AB 效应	20
1.7 真空中静磁场的旋度和散度	21
1.8 磁偶极子	23
1.9 磁介质中的静磁场	25
1.10 法拉第电磁感应定律	28
1.11 位移电流	30
1.12 麦克斯韦方程组——动态电磁场基本方程	32
1.13 洛伦兹力密度	33
习题	34
第 2 章 静场的多极展开	36
2.1 电多极子场	36
2.2 磁多极子场	48
习题	51
第 3 章 静场的边界值问题	53
3.1 电势的泊松方程和拉普拉斯方程	53
3.2 静电场问题的边界条件	54
3.3 静电问题的唯一性定理	57
3.4 分离变量法	60
* 3.5 电磁流变液体的宏观模型和机理	68
3.6 电像法	69

* 3.7 格林函数方法	76
* 3.8 恒定电流场中的电势边界值问题	82
3.9 静磁场边界条件	84
3.10 磁标势法	86
* 3.11 矢量势法和磁镜像法	94
习题	97
思考和讨论题	98
第 4 章 电磁场能量、动量、角动量及守恒定律	99
4.1 真空中静电场能量和能量密度	99
* 4.2 电势系数和电容系数	101
4.3 存在电介质时的静电能	104
4.4 电多极子在外场中的能量、力和力矩	105
4.5 自感和互感	106
4.6 磁场能量	107
4.7 磁偶极子在外场中的磁能、力和力矩	110
4.8 电磁场的能量守恒和转化	112
4.9 电磁场的动量和动量守恒	115
4.10 辐射压力	118
* 4.11 电磁场的角动量和角动量守恒	120
4.12 麦克斯韦方程的空间时间对称性	122
* 4.13 磁单极子的存在问题	123
习题	125
思考和讨论题	126
第 5 章 电磁波 (I): 电磁波的传播	127
5.1 电磁场的矢势和标势	127
5.2 Φ 和 \mathbf{A} 满足的方程	128
5.3 规范变换	129
5.4 真空中的平面电磁波	133
5.5 均匀电介质中的平面电磁波	137
5.6 电磁波的偏振	141
5.7 导体中的平面电磁波	143
5.8 稀薄等离子体中的电磁波	146
5.9 介质的色散	150
* 5.10 复介电函数的克拉默斯-克勒尼希关系	155
5.11 激光的传播、相速与群速	156

习题	159
思考和讨论题	159
第 6 章 电磁波(II):平面电磁波的边界值问题	160
6.1 边界条件	160
6.2 电磁波在非导电介质分界面的反射和折射	161
6.3 全反射	167
6.4 电磁波在导体表面的反射和折射	169
6.5 理想导体边界条件	172
6.6 波导	173
* 6.7 光波导	184
6.8 谐振腔	186
习题	189
思考和讨论题	189
第 7 章 狭义相对论基础	191
7.1 伽利略变换	191
7.2 迈克耳孙-莫雷实验	192
7.3 爱因斯坦的两个基本原理	195
7.4 “同时性”	195
7.5 洛伦兹变换	196
7.6 时间膨胀和长度收缩	199
7.7 “同时”的相对性	201
7.8 速度相加定理	205
7.9 闵可夫斯基四维时空	206
7.10 空时间隔与因果律	207
7.11 四维时空的变换关系	209
* 7.12 协变张量、逆变张量和度规张量	213
习题	217
思考和讨论题	217
第 8 章 相对论电动力学	219
8.1 电荷守恒和四维电流密度	219
8.2 四维势和波动方程	221
8.3 电磁场张量和麦克斯韦方程	222
* 8.4 四维力密度和能量动量张量	226
8.5 匀速运动带电粒子的场	228
8.6 多普勒效应和光行差	230

8.7	相对论动力学方程	234
8.8	相对论动量	237
8.9	相对论能量	238
8.10	四维动量的变换和“动心”坐标系	240
8.11	质量、能量、动量三者的关系	241
8.12	动量守恒和能量守恒	242
* 8.13	相对论粒子在电磁场中的运动	246
8.14	相对论带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数	249
* 8.15	电磁场的拉格朗日方程和哈密顿方程	251
	习题	253
	思考和讨论题	254
第 9 章	辐射场(I): 简单辐射系统	256
9.1	推迟势	256
9.2	推迟势 Φ 和 \mathbf{A} 的多极展开	259
9.3	简谐振动源的多极辐射场的计算步骤	263
9.4	电偶极辐射	265
9.5	磁偶极和电四极辐射	269
9.6	源线度与波长可比时的辐射	274
9.7	天线阵	278
	习题	280
	思考和讨论题	281
第 10 章	辐射场(II): 高速运动带电粒子的辐射	282
10.1	李纳-维谢尔势	282
10.2	加速运动带电粒子的辐射场	283
10.3	非相对论极限	286
* 10.4	拉莫尔公式的相对论性推广	286
10.5	韧致辐射和同步加速辐射	287
* 10.6	加速电荷的辐射频谱	290
* 10.7	非相对论近似下的辐射频谱	292
* 10.8	切伦科夫辐射	293
10.9	辐射阻尼和电磁质量	295
10.10	光谱线的自然宽度	297
	习题	299
	思考和讨论题	300
第 11 章	辐射场(III): 电磁波的散射、吸收和衍射	301

11.1	汤姆孙散射和康普顿散射	301
11.2	原子内束缚电子对电磁波的散射	305
11.3	电磁波的吸收	307
11.4	感应偶极子对电磁波的散射	308
* 11.5	拉曼散射的经典理论	309
* 11.6	电磁波的衍射	311
* 11.7	经典电磁理论的适用范围和局限性	315
	习题	316
	思考和讨论题	317
第 12 章	近代电磁理论的应用和进展	318
* 12.1	超导电动力学	318
* 12.2	磁流体和等离子体电动力学	329
* 12.3	各向异性介质中的电磁波	338
* 12.4	塞曼效应	342
* 12.5	旋光性的电磁理论	349
* 12.6	激光冷却原子	355
* 12.7	光子晶体的电磁理论	359
	思考和讨论题	366
	参考文献	368
	附录	370
附录 A	矢量分析	370
附录 B	立体角	377
附录 C	狄拉克(Dirac) δ 函数	378
附录 D	正交变换	380
附录 E	张量	381
附录 F	球函数	386
附录 G	柱函数	388
附录 H	傅里叶(Fourier)级数和积分	389
附录 I	克拉默斯-克勒尼希关系	392
附录 J	电磁学单位和公式换算	395
附录 K	重要常数(SI制)	400
	习题答案	402

第 1 章 电磁场基本方程

作为电动力学理论的基础,本章首先简要概括静态电磁场的基本性质和基本方程.本章将特别介绍一个新的物理量——矢量势 \mathbf{A} .引入矢量势不仅对于描述静磁场和辐射场非常方便,而且在量子物理和近代物理中都有着非常重要的意义.最后在法拉第电磁感应定律和麦克斯韦位移电流假说的基础上总结出运动形态的电磁场的基本规律——麦克斯韦方程组.

1.1 真空中静电场的散度

1.1.1 库仑定律

1785 年库仑(Coulomb)根据实验研究电荷相互作用力,得到两个静止的点电荷之间的作用力与每个电荷的电量成正比,与电荷间距离的平方成反比,方向沿着两电荷连线的方向.这就是著名的库仑定律.真空中库仑定律可以表述为

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (1.1.1)$$

$$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (1.1.2)$$

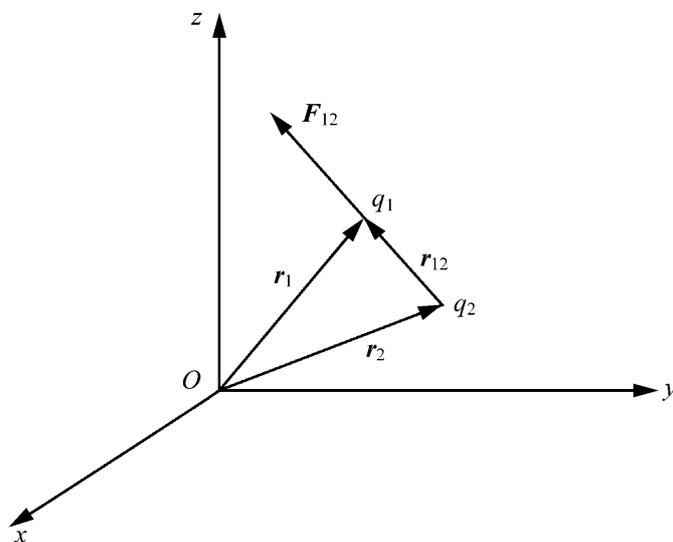


图 1-1-1

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (1.1.3)$$

式中, q_1 和 q_2 分别表示两个点电荷的电量, r_{12} 是两电荷间的距离, \mathbf{e}_{12} 是两电荷相对位置矢量 \mathbf{r}_{12} 的单位矢量(见附录 A.80), \mathbf{e}_{12} 的方向由 q_2 指向 q_1 , 如图 1-1-1 所示. \mathbf{F}_{12} 表示 q_2 对 q_1 的作用力. 若 q_1 和 q_2 为同号电荷, \mathbf{F} 取正值表示两电荷间为斥力, 若 q_1 和 q_2 为异号电荷, \mathbf{F} 取负值表示两电荷间为吸引力. k 是比例系数, 决定于所选用的单位制. 本书采用有理化 MKSA 单位制(见附录 J), 比例系数 k 为

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ m/F} \quad (1.1.4)$$

这里 ϵ_0 是真空电容率

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (1.1.5)$$

值得注意的是, 库仑定律仅对点电荷成立, 因此当 $r_{12} \rightarrow 0$ 时, 不能再认为两个带电体是几何点, 而要考虑带电体的形状及其电荷分布情况.

1.1.2 电场强度

近代物理认为, 电荷间的相互作用是通过场传递的, 库仑定律实质上是一个电荷在空间激发电场, 该电场对另一个电荷产生作用力, 反之亦然. 电场可以脱离电荷而存在. 为描述电场的强弱, 定义**电场强度** \mathbf{E} , 它是检验电荷在电场中受到的力与该检验电荷的电量之比, 表示为

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1.1.6)$$

这里 q_0 为检验电荷. 电场强度的单位是伏/米 (V/m).

在图 1-1-2 中, 假设空间一点 (x', y', z')

有一点电荷 q .

根据定义, 在 $P(x, y, z)$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1.7)$$

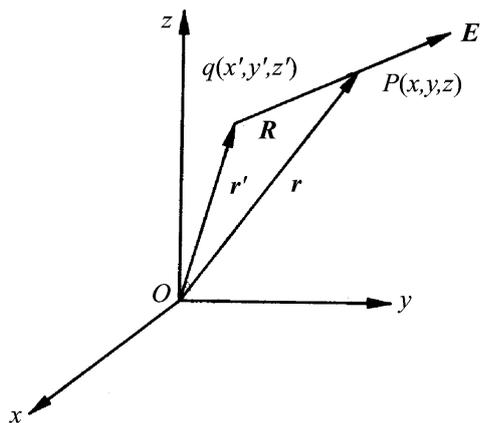


图 1-1-2

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1.1.8)$$

通常把空间位置划分为**源点**和**场点**. 电荷 q 所在位置称**源点**, 源点矢径用带撇符号表示为 \mathbf{r}' . 观测电场的点称为**场点**, 场点矢径用不带撇符号表示为 \mathbf{r} . 场点和源点的相对位矢为 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (见附录 A.80).

电荷是量子化的、不连续的, 但是对于宏观物体, 常常可以把电荷看成连续分布的. 如图 1-1-3 所示, 我们把区域 V 内一个无限小范围 $d\tau'$ 内分布的电荷写为 dq' , 并且处理为一个点电荷. 根据场的叠加原理, 体积 V 内的全部电荷在 P 点的电场强度为

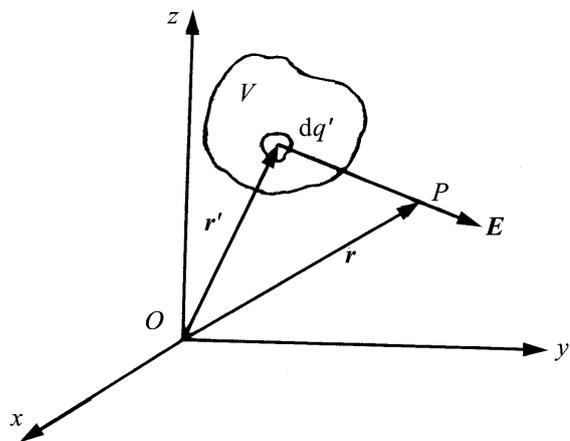


图 1-1-3

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1.9)$$

定义单位体积的电荷为**体电荷密度** $\rho(\mathbf{r}')$, 那么

$$dq' = \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (1.1.10)$$

因此电场强度表示为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' \quad (1.1.11)$$

这里小体积元 $d\tau'$ 应该是指在宏观上、实验室尺度上是小的, 而在微观上、原子尺度上它又是足够的大, 以至于可以包含许多原子或分子. 仅在这种条件下可以把电荷密度 ρ 处理为位置的连续变化的函数. 式(1.1.11)积分是对电荷所在区域的体积 V 进行的.

类似地, 对分布在表面或界面上单位面积的电荷定义为**面电荷密度** σ , 有

$$dq' = \sigma(\mathbf{r}') dS' \quad (1.1.12)$$

则电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (1.1.13)$$

这里积分是对电荷所在的表面 S 进行的.

对于分布在一条线上的电荷,定义单位长度上的电荷为**线电荷密度** λ ,有

$$dq' = \lambda(\mathbf{r}')dl' \quad (1.1.14)$$

则电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' \quad (1.1.15)$$

这里积分是对电荷所在的曲线 C 进行的.

例 1-1-1 半径为 a 的环形线,电荷密度为 λ ,求轴上场强.

解 如图 1-1-4 所示,环上 dq' 产生的电场为

$$d\mathbf{E} = \frac{dq'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1.16)$$

式中场点矢径 $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$,源点矢径 $\mathbf{r}' = ae'_\rho$.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = z\mathbf{e}_z - ae'_\rho$$

$$dq' = \lambda a d\theta'$$

由对称性可知,合场强在 z 方向,所以

$$\begin{aligned} E_z &= \int_C \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z\lambda a d\theta'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

这里 $q = 2\pi a\lambda$.

1.1.3 高斯定理和散度方程

电场对某曲面的面积分 $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 被称作为**电通量**.对于一个点电荷,通过包围该电荷的任意闭合曲面的总的电通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

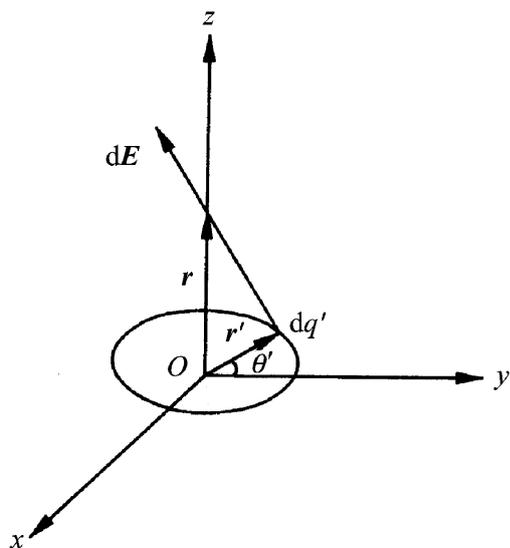


图 1-1-4

这里我们已假定坐标原点在点电荷位置,并且利用了立体角元 $d\Omega$ 的性质(见附录 B).

式(1.1.18)表明电场通过某闭合曲面的总的电通量等于该闭合曲面内的电量与 ϵ_0 之比,这就是著名的高斯(Gauss)定理.

如果点电荷在所考虑的闭合曲面以外,那么由于该曲面对原点所张立体角的积分 $\oint d\Omega = 0$,电场对该曲面的电通量为零.

对于多个点电荷被包围在闭合曲面内情形,高斯定理可表示为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (1.1.19)$$

对于电荷连续分布情形,式(1.1.19)中的求和用积分替代后表示为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \quad (1.1.20)$$

式中, V 是被曲面 S 包围的体积,式(1.1.20)通常称为高斯定理的积分形式.对式(1.1.20)左边利用数学上的高斯定理(见附录 A),则

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d\tau \quad (1.1.21)$$

由于 τ 是任意的,比较式(1.1.21)最后一个等式两边可得到静电场的散度方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (1.1.22)$$

这是高斯定理的微分形式,是描述静电场性质的第一个微分方程,又称为散度定理.散度定理说明,空间某点的电场的散度只与该点的电荷密度有关,与空间其他位置的电荷密度无关.电荷密度为正时电场散度为正,电力线从正电荷源发出;反之电场散度为负,电力线终止于负电荷.实验证明式(1.1.22)对运动电荷的场也是适用的.

1.1.4 δ 函数表示的电荷密度

通常电荷密度 ρ 是与空间位置有关的有限连续函数.如果 ρ 不是有限连续的,例如点电荷,或分布在一表面上或一曲线上的电荷,我们可以用狄拉克(Dirac) δ 函数来表示它们.

例如将点电荷的场强表示式(1.1.7)代入式(1.1.22)中,利用附录 C.16 我们

有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\end{aligned}\quad (1.1.23)$$

因此我们可以表示一个点电荷的电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.24)$$

一组点电荷的电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i) \quad (1.1.25)$$

一个在原点处的电偶极子的电荷密度为(见习题 1.4)

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{p} \cdot \nabla)\delta(\mathbf{r}) \quad (1.1.26)$$

我们也可以在曲线坐标系中用 δ 函数表示电荷密度. 例如, 在球坐标系中均匀分布在半径为 R 的球壳上的电荷为 q , 则电荷密度为

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \quad (1.1.27)$$

在柱坐标系中均匀分布于半径为 b 的圆柱面上每单位长度的电荷为 λ , 则电荷密度为

$$\rho(r) = \frac{\lambda}{2\pi b} \delta(r - b) \quad (1.1.28)$$

1.2 静电势和静电场的旋度

式(1.1.11)显示静电场与距离平方成反比, 它与引力场一样也是保守场, 即从空间某一点到另一点的线积分与路径无关, 因此我们可以定义**静电势** Φ . 静电场强可以表示为电势的负梯度. 静电场强 \mathbf{E} 是矢量场, 静电势 Φ 是标量场, 下面我们利用矢量分析公式来说明场强 \mathbf{E} 和电势 Φ 的关系.

利用矢量分析公式(见附录 A.74)

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.1)$$

将式(1.2.1)代入式(1.1.11), 我们有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau' \quad (1.2.2)$$

算符 ∇ 仅对坐标 \mathbf{r} 微分而与 \mathbf{r}' 无关,故可将 ∇ 提出积分号之外,则

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \quad (1.2.3)$$

我们将式(1.2.3)方括号中的量记为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.4)$$

因此,电场 \mathbf{E} 可用标量场 $\Phi(\mathbf{r})$ 的梯度表示为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (1.2.5)$$

$\Phi(\mathbf{r})$ 为函数,这正是我们熟知的**静电势**,单位是伏特(V).

如果电荷分布在一表面上或一曲线上,我们可以分别将静电势写为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.6)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2.7)$$

根据附录 A.56,梯度的旋度为零,即

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (1.2.8)$$

利用式(1.2.5),我们有**静电场的旋度方程**为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.9)$$

式(1.2.9)是描述静电场特性的第二个微分方程,表示静电场是无旋的,这是静电场的特有的性质.对于随时间变化的场, \mathbf{E} 不是无旋的,而可能是涡旋场,因此式(1.2.9)不适用于随时间变化的场.

利用斯托克斯(Stokes)定理,式(1.2.9)可以写成积分形式

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.10)$$

上式左边是对闭合路径 C 的积分,右边是对该路径包围的面积 S 的积分.将式(1.2.9)代入式(1.2.10)右边,立即有

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.2.11)$$

这是式(1.2.9)的积分形式,它表示静电场的路径积分与路径无关,即静电场是保守场.

静电场中两点之间的电势差可以用场强 \mathbf{E} 的路径积分表示为

$$\Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1) = \int_1^2 d\Phi = \int_1^2 (\nabla\Phi) \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.2.12)$$

由于标量势 Φ 可以附加一任意常数而不影响电场强度的值.为方便常常取大地作为电势零点.对于电荷分布在有限区域情形,通常取无限远点的电势为零,即在式(1.2.12)中取 $\Phi(\mathbf{r}_1) = \Phi(\infty) = 0$,则

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.2.13)$$

例 1-2-1 求线电荷密度为 λ 的无限长直线 l 周围的电势.

解 如图 1-2-1 选取柱坐标系, P 点电势为

$$\Phi(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z'^2 + \rho^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(z' + \sqrt{z'^2 + \rho^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} \quad (1.2.14)$$

积分结果出现无穷大,这是因为电荷分布在无限长直线上的缘故.为了避免无穷大,取另一点 P_0 为参考点,计算 P 和 P_0 两点电势差为

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) - \Phi(\rho_0) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z' + \sqrt{z'^2 + \rho^2}}{z' + \sqrt{z'^2 + \rho_0^2}} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

取 $\Phi(\rho_0) = 0$, 则

$$\Phi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.2.16)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho \quad (1.2.17)$$

该题的另一种解法是用普通物理熟知的方法,选取圆柱形高斯面,由高斯定理先求出场强

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho, \text{再代入式(1.2.13)计算出电势}$$

$\Phi(\rho)$.

例 1-2-2 求电偶极子产生的电场.

一对电量为 q 的正负电荷相距为 l ,当 $l \rightarrow 0$ 时称为电偶极子.定义电偶极矩为

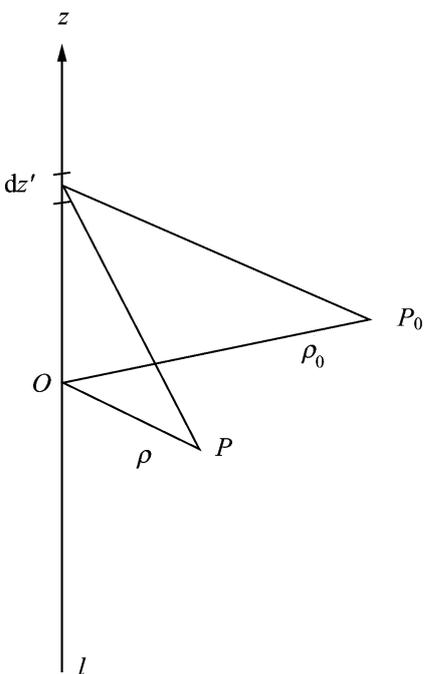


图 1-2-1

$$\mathbf{p} = \lim_{l \rightarrow 0} q\mathbf{l} \quad (1.2.18)$$

\mathbf{p} 取向为由负电荷指向正电荷,如图 1-2-2 所示.场点 P 处的电势可表示为

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l\cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

利用附录 A.78 得到 P 点电场为

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} \quad (1.2.20)$$

在球坐标系中,若 \mathbf{p} 与 z 轴方向一致,可将 \mathbf{p} 的电场表示为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} (2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \quad (1.2.21)$$

熟记电偶极子的电势和电场的表示式是十分有益的,不仅在以后讨论到电磁辐射时要用到它们,而且在量子力学、电介质物理和铁电学等其他学科中,电偶极矩的公式亦常常用到.

例 1-2-3 在三种坐标系中均匀电场的电势.

解 在直角坐标系中由均匀电场 \mathbf{E}_0 求得电势为

$$\Phi(\mathbf{P}) - \Phi(0) = -\int_0^{\mathbf{P}} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = -\mathbf{E}_0 \cdot \int_0^{\mathbf{P}} d\mathbf{l} = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (1.2.22)$$

取 $\Phi(0) = 0$, 则

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (1.2.23)$$

在柱坐标中均匀场的电势为

$$\Phi(\rho) = -E_0 \rho \cos\varphi \quad (1.2.24)$$

在球坐标中均匀场的电势为

$$\Phi(r) = -E_0 r \cos\theta \quad (1.2.25)$$

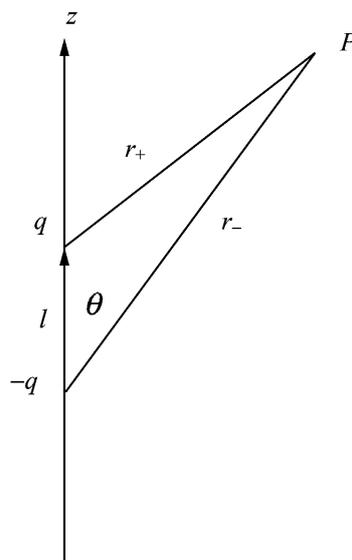


图 1-2-2

1.3 存在电介质时的静电场

1.3.1 电介质

前面描述的是在真空中的电荷激发的场,当存在物质时,物质内外的电场都不

同于真空中的场.微观上,一切物质都是由分子、原子组成,原子中又包含电子、质子等带电粒子.在导体中,由于存在自由电荷,当施加电场时,电荷分布在导体表面,而导体内部的电场为零.在电介质中没有可以自由移动的电荷,当施加外电场时,在介质内部沿电场方向出现宏观的电偶极矩,并在表面出现束缚电荷,这种现象称为介质的极化.

从微观机理上看,极化大致可分为三种:

(1) 介质是由正负电荷中心重合的所谓“无极性分子”组成.施加外场后,正负电荷沿相反方向产生一小的相对位移(在原子尺度范围以内),导致分子具有不为零的电偶极矩.我们说分子具有了“感应偶极矩”,或者介质被“感应极化”了.

(2) 介质由具有内禀电偶极矩(或者固有电偶极矩)的“极性分子”组成,例如水分子.未施加外电场时,由于热扰动各分子偶极矩无规则取向,因此没有净的宏观偶极矩.当施加电场后,介质中部分极性分子的取向趋向于外电场方向,即有序化,使介质具有宏观电偶极矩.这种现象称为“取向极化”.

(3) 一些介质在相变温度 T_c 以上与上述两种介质类似,不显示宏观电偶极矩.而当温度下降到 T_c 以下时,即使不施加外场,仍然出现宏观电偶极矩,即“自发极化”现象.产生自发极化的原因可以归为“位移型”或“有序无序型”或二者皆有的“混合型”.这种介质称为铁电体.

为了描述电介质极化的程度,我们定义电极化强度矢量 \mathbf{P} 为单位体积中的净的电偶极矩,其数学表达为

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} \quad (1.3.1)$$

这里 \mathbf{p}_i 是第 i 个分子的有效电偶极矩, $\sum_i \mathbf{p}_i$ 是对体积 ΔV 内的所有的分子的偶极矩求和.式(1.3.1)表示当体积 ΔV 趋向于零时, ΔV 内的净的电偶极矩与 ΔV 之比就是电极化强度 \mathbf{P} , \mathbf{P} 又被称为偶极矩密度,它是位置的函数,所以 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ 反映了介质中各处极化的强弱.

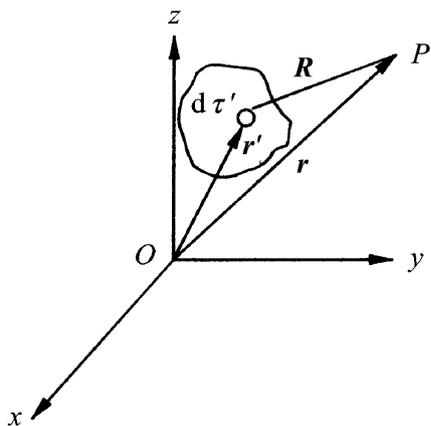


图 1-3-1

在一个小体积元 $d\tau$ 内的总偶极矩为

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r})d\tau \quad (1.3.2)$$

体积 V 内介质的总偶极矩为

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}')d\tau' \quad (1.3.3)$$

\mathbf{P} 的单位是库仑/米² (C/m^2).如果已知电介质的极化强度 \mathbf{P} ,可以根据 \mathbf{P} 的分布求出介质外空间各点的电势.

如图 1-3-1 所示,体积元 $d\tau'$ 内的偶极矩

$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')d\tau'$, 根据电偶极子势公式(1.2.19), $d\mathbf{p}$ 在 P 点的势是

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}d\tau'}{R^3} \quad (1.3.4)$$

对 $d\Phi$ 积分得总的 Φ 为

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}d\tau'}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left[\frac{1}{R} \right] d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{P}}{R} \right] - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P} \right] d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} d\tau' \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{P_n dS'}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R} d\tau' \quad (1.3.6)$$

式中, S 是体积 V 的表面积, $d\mathbf{S}'$ 的方向是垂直于表面向外的方向, $d\mathbf{S}'$ 的法向单位矢量为 \mathbf{n}' . 将式(1.3.6)的两项分别与式(1.2.6)和式(1.2.4)进行比较, 式(1.3.6)中的 P_n 和 $(-\nabla' \cdot \mathbf{P})$ 分别对应于面电荷密度和体电荷密度, 我们分别称他们为束缚面电荷密度

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n \quad (1.3.7)$$

束缚体电荷密度

$$\rho_b = -\nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (1.3.8)$$

因此在极化介质之外, 电势可写为

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b dS'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b d\tau'}{R} \quad (1.3.9)$$

式(1.3.9)说明极化的电介质在它外面产生的势可归结为与电介质极化有关的束缚面电荷和束缚体电荷产生的势.

根据上述束缚电荷的定义我们可以求得极化电介质的偶极矩为

$$\mathbf{p} = \oint \sigma_b \mathbf{r}' dS' + \int \rho_b \mathbf{r}' d\tau' = \int_S \mathbf{r}' (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) dS' - \int_V \mathbf{r}' (\nabla' \cdot \mathbf{P}) d\tau' \quad (1.3.10)$$

1.3.2 宏观静电场方程

由上节可知在极化介质之外的电场可以利用束缚电荷来计算. 如果要求电介

质内的电场,需要测量放在电介质内部的检验电荷的受力情况.但是这样作是困难的,因为我们事先不知道束缚电荷分布情况,并且如果在介质中挖一个洞产生了新的边界面,将引入新的束缚体电荷和新的束缚面电荷.于是我们用微观场的平均来近似地决定宏观的场.宏观电场 \mathbf{E} 被定义为在一个小体积中的微观电场 \mathbf{e} 的空间和时间的平均值.这个小体积应是宏观上无限小,其尺度约 10^{-8} m(当尺度小于 10^{-5} m 时变数可看为宏观连续的),而在微观上该小体积相当大,可以包含大量的分子(分子尺度约 10^{-10} m).

按洛伦兹^[2](Lorentz)电子论,将 \mathbf{E} 和 \mathbf{e} 的关系表示为

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle, \quad \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.3.11)$$

宏观的微分算符 ∇ 与小体积内对 \mathbf{e} 的空时平均可交换次序,所以

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{e} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{e} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho \rangle \quad (1.3.12)$$

$$\langle \nabla \times \mathbf{e} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{e} \rangle = \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.3.13)$$

式(1.3.12)最后等式的 $\langle \rho \rangle$ 是微观电荷密度的平均值,应等于宏观上的自由电荷密度 ρ_f 和束缚电荷密度 ρ_b 之和,即

$$\rho = \langle \rho \rangle = \rho_f + \rho_b \quad (1.3.14)$$

因此介质中的宏观电场满足如下的微分方程

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f + \rho_b)} \quad (1.3.15)$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \quad (1.3.16)$$

用式(1.3.8)表示的 ρ_b 代入式(1.3.15),我们有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (1.3.17)$$

移项整理后,得

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (1.3.18)$$

定义一个新的矢量 \mathbf{D} ,称为电位移矢量

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (1.3.19)$$

将 \mathbf{D} 矢量代入式(1.3.18),我们得到介质中的散度方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.3.20)$$

\mathbf{D} 的散度只与自由电荷有关, \mathbf{D} 的旋度不为零. 旋度方程(1.3.16)和散度方程(1.3.20)也称为介质的**宏观场方程**.

介质中宏观场方程的积分形式为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_f \quad \text{和} \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.3.21)$$

式(1.3.21)是介质中的**高斯定理**和介质中的**环路积分定理**. 必须指出, 场强 \mathbf{E} 是基本的场量, 而 \mathbf{D} 并没有明确的物理意义, 它只是为了数学上方便而引入的.

1.3.3 本构关系

极化矢量 \mathbf{P} 与电场 \mathbf{E} 之间的关系或电位移矢量 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系称**本构关系**. 它们之间的函数关系不能由宏观描述的电磁理论导出, 只能由实验来决定, 这种关系与物质本身性质有关, 所以又称为**物质方程**.

如果介质极化矢量 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 成简单的线性关系, 并且介质不同方向的 \mathbf{P} 值都相同, 称之为**线性各向同性介质**^①, 其本构关系为

$$\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} = \chi_e \mathbf{E} \quad (1.3.22)$$

常数 χ_e 为**电极化率**. 对于线性各向同性介质, \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.3.23)$$

$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ 称为**电容率**或**介电常数**.

相对介电常数定义为

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.3.24)$$

如果某种物质 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 或 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系式与 \mathbf{E} 的二次式以上的高级项有关, 这些介质是**非线性介质**. 我们可以用张量形式将 \mathbf{P} 的各分量按 \mathbf{E} 的高次幂分量作级数展开为(见附录 E 中张量表示)

^① 某些物质的物理性质例如介电常数、折射率等与测量方向无关, 称为各向同性物质; 物理性质与测量方向有关的称为各向异性物质, 一般晶体具有各向异性性质, 例如双折射、压电性、弹性、极化和磁化等.

$$\frac{P_i}{\epsilon_0} = \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \quad (1.3.25)$$

式中,相同脚标表示求和(见附录 D.3),脚标 i, j, k 代表 x, y, z 三个不同方向取值.类似地 \mathbf{D} 的展开式为

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j + \epsilon_{ijk} E_j E_k + \epsilon_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \quad (1.3.26)$$

在式(1.3.25)中的 χ_{ijk} 和 $\chi_{ijkl} \dots$ 称为非线性极化率张量,式(1.3.26)中的 ϵ_{ijk} 和 $\epsilon_{ijkl} \dots$ 称为非线性介电张量.例如某些陶瓷、 LiNbO_3 和 KH_2PO_4 晶体等属于非线性介质.

当式(1.3.25)和式(1.3.26)只取级数第一项时, \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 成线性关系,满足线性本构关系的介质称为线性介质,即

$$\frac{P_i}{\epsilon_0} = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j, \quad (\chi_{ij}) = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3.27)$$

χ_{ij} 是线性极化率张量的分量.在不同方向施加电场,介质的极化不同,则介质是各向异性的,这时 χ_{ij} 有九个分量(见附录 E.4).对于各向同性介质式(1.3.27)退化为式(1.3.22).

电位移矢量取展开式第一项时, \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 也呈线性关系,即

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j, \quad (\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3.28)$$

式中, ϵ_{ij} 是线性介电张量的分量,一般 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 不平行. ϵ_{ij} 也显示介质的各向异性,许多晶体属于这一类情况,例如石英晶体是线性各向异性介质.对于各向同性介质式(1.3.28)退化为式(1.3.23).

一些特殊的材料的介电行为不能用上述表示式表示,例如超导体、磁流体等.我们将在第 12 章中进一步讨论.

1.4 电流密度和磁感应强度

1.4.1 电流密度

电荷的定向流动形成电流,电流强度被定义为