

群论习题精解

马中骥 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是《物理学中的群论》配套的习题集,主要包括群的基本概念、群的线性表示理论、三维转动群、晶体的对称性、置换群、 $SU(N)$ 群、 $SO(N)$ 群和洛伦兹群、李群和李代数.后者是中国科学院研究生教学丛书之一,1998年出版以来,深受读者欢迎,已重印两次.

习题的亲手演算对于掌握群论的理论内容和计算方法都是必不可少的.本书为读者提供了一个好帮手.

本书适合于物理各专业的研究生,亦可供物理工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

群论习题精解/马中骥著. —北京:科学出版社,2002

ISBN 7-03-010390-4

I. 群… II. 马… III. 群论—解题 IV. O152—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 027305 号

责任编辑:张邦固/责任校对:柏连海

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年8月第一版 开本:B5(720×1000)

2005年3月第三次印刷 印张:23

印数:6 001—9 000 字数:425 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

谨以此书献给我亲爱的妻子戴安英

前 言

群论是研究系统对称性质的十分有效的数学工具。随着人类对客观世界的认识逐步深入到微观领域，对称性在现代物理理论中的应用越来越广泛，群论方法也逐渐深入到物理学各个领域，因而近年来群论课已成为物理专业研究生必修的基础课程。

群论本身是一门抽象的代数理论，有它自身的特点和规律性。但作为一个物理工作者，更关心的是如何把群论方法灵活地运用到实际的物理问题中去。作者从1962年开始长期担任物理系本科生或研究生的群论教学工作，同时作为理论物理的科研工作者，在科研工作中，从物理学不同角度应用群论方法来研究和处理问题。总结自己的教学经验和科研心得，也从已有的群论专著和教材中吸取营养，逐渐形成了比较适合物理专业学生学习的群论教学体系，于1998年由科学出版社出版了《物理学中的群论》(下称文献[1])一书，书中并附有适量的习题，供物理专业研究生教学使用。此书出版四年多来，承蒙广大读者的支持，已再印了两次。现已有不少高等院校和科研机构采用此书作为物理专业研究生的群论课教材或主要参考书。

在这几年教材的使用过程中，作者收到了不少教师和同学的来信来电，除了表达对作者的鼓励外，也提出了一些中肯的意见。意见归纳起来有三方面。一是感到书中有的习题比较难做，或者不容易找到简洁明了的计算方法，希望能看到供参考的习题解法。二是教材的篇幅较大，不能适应不同情况的教学需要，由于课时的限制，希望有一本简写本，能对物理学中所用群论方法有提纲式的介绍。三是结合物理科研和教学各种情况的需要，希望能提供一些供查阅的常用资料和表格，以及反映近年在物理学中所应用的群论方法的新发展。由此萌发出写一本供物理专业用的群论习题精解的想法。在科学出版社和各位朋友的鼓励和支持下，促成了本习题精解的出版。当然要想通过一本习题精解完全克服这些缺点是不现实的，也超出了作者的能力所及。作者只是希望通过本习题精解，在作者比较熟悉的领域内，尽其所能，努力在下面几方面作一些弥补和改进。

首先，习题精解涵盖了文献[1]的全部习题，尽可能采用简单的方法解答这些习题。在选用文献[1]作为群论教材时，希望习题精解会对教学工作有所帮助。为便于读者寻找，本习题精解对新增加的习题用星号加以区分。在文献[1]中包

含的习题，除作为群论方法的基本练习题外，还包括两种类型的题。一是某些群论定理或方法，让读者知道可能会有好处，由于篇幅有限，放在习题里向读者提示可能更合适。这类题有的比较简单，有的包含一些小技巧，也有的通过适当的提示是可以证明或计算出来的。作者原意并不要求读者都会计算或证明这些习题，只是知道这些结论就行。后来知道有些题使部分读者花费了过多的精力。现在把它们一一解出来，供读者参考。二是数学上一些重要结论，它们并不是群论本身的内容，放在教材中花大量篇幅讨论似乎不很合适，于是就放在习题中告诉读者，其中最典型的是把矩阵化为若尔当标准型(第一章第 15 题，以本习题精解编号为准，下同)。此结论在数学上虽有严格证明，但涉及名词概念太多，容易分散读者学习群论知识的精力。文献[1]用习题形式向读者告知这结论，本习题精解用物理工作者习惯的语言作了证明。但作者并不鼓励读者花很大精力去学懂它们，承认其结论对大多数读者已经足够。

其次，本习题精解在各节习题前面，用了相当的篇幅概括主要解题方法，有的加以简单证明，有的只是列出结论，努力去包括物理学中常用群论方法的基本方面。这些注解一方面为读者做习题提供方便，另一方面也希望为课时较少的群论课程教学提供一个提纲。后一目的能否达到，作者没有把握，也许考虑尚欠成熟，希望通过实践来加以验证或今后改进。

第三，本习题精解比原教材(文献[1])增加了一些内容。近年来的教学使作者体会到分导表示和诱导表示的概念在处理某些问题时相当有效，因而在本习题精解的第三章专门设一节作详细的介绍，并在第六章和第七章介绍了有关的应用。计算可约表示的分解和函数基的重新组合是群论方法在物理学中应用的一个重要方面，本习题精解对此问题给予了较多的关注，在各章都有较大篇幅的介绍和举例，希望能引起读者足够的重视。置换群是物理学中常见的一个有限群，在第六章不仅介绍了主要计算方法，也列出了若干计算结果供查阅，如第 6, 7, 8, 31 题。文献[1]第二章和第三章列举了正二十面体及其对称群的一些重要性质，这些内容本来是供查阅用的，书中对具体计算方法介绍不够，本习题精解在第四章第 5, 6, 12 题作了补充。有限群空间不可约基的计算，实际上提供了一类投影算符，可以很快地把波函数组合成属不可约表示的函数基。在文献[1]第三章有过介绍，本习题精解除在第三章给出计算的例子外，还在第六章第 22~25 题把此方法应用于甲烷分子对称基的计算。这方法已在物理中找到实际应用，具体可参看文献[21~23, 43, 56, 58]。非紧致李群的无穷维么正表示也是物理学中群论方法的一个应用方向，在文献[1]把这方面完全略去了。本习题精解在第四章第 24 题就一个最简单的例子作了认真的分析，其方法有普遍意义。第八章第三节介绍洛伦兹群的一些性质，也是对文献[1]的补充。量子少体系统转动自由度的分离是量子物理中的一个基本问题，从量子力学创始之初就得到大师们的关注

(见文献[26,76,41]),以后不断有新的改进(见文献[14,60,9,10]),近年来引入了新的方法(见文献[36,37]),其中充分运用了群论工具.第九章第三节把这问题当作一个群论应用的例子作了介绍.

由于作者对物理学中应用的群论方法的理解不可避免地具有局限性,对群论习题精解的编写也缺乏经验,题目和方法的选择明显表现出偏向于作者熟悉的领域,引文肯定存在挂一漏万的现象.限于作者的水平 and 写作时间,本习题精解只能作为一种尝试,希望能起到抛砖引玉的作用.作者对书中可能出现的错误事先向读者致以深深的谦意,诚恳欢迎读者的各种批评和指正.

本书编写过程中有关的科研工作得到国家自然科学基金的资助。

马中骥
高能物理研究所
2002年于北京

目 录

| | |
|--|----|
| 第一章 线性代数复习 | 1 |
| 一、矩阵的本征值和本征矢量 | 1 |
| 1. 证明矩阵的本征值之和等于矩阵迹, 本征值之积等于矩阵行列式 | 2 |
| 2* . 计算泡利矩阵 σ_1 和 σ_2 的本征值和本征矢量 | 2 |
| 3* . 计算方块矩阵的本征值和本征矢量 | 3 |
| 4* . 计算行(列)循环排列矩阵的本征值和本征矢量 | 3 |
| 5. 若 $\det R \neq 0$, 证明 $R^\dagger R$ 和 RR^\dagger 都是正定的厄米矩阵 | 3 |
| 6. 证明: 若 $R^\dagger R = 1$, 则 $RR^\dagger = 1$; 若 $R^{-1} R = 1$, 则 $RR^{-1} = 1$; 若 $R^T R = 1$, 则 $RR^T = 1$ | 4 |
| 7. 试讨论 2×2 么正矩阵, 实正交矩阵和厄米矩阵各含有多少个独立实参数, 并写出它们的一般表达式 | 4 |
| 二、相似变换和矩阵的对角化 | 5 |
| 8. 找相似变换把若干矩阵对角化 | 7 |
| 9. 找联系两矩阵的相似变换矩阵 | 8 |
| 10. 找联系三对矩阵的共同相似变换矩阵 | 9 |
| 11. 找相似变换矩阵把两矩阵的自直乘化简 | 10 |
| 12. 找使三矩阵同时对角化的公共相似变换矩阵 | 12 |
| 13. 写出既么正又厄米的 $m \times m$ 矩阵的一般形式 | 14 |
| 14. 证明 R 和 R^\dagger 乘积可以对易是矩阵 R 可通过么正相似变换对角化的充要条件 | 14 |
| 15. 证明任何矩阵都可通过相似变换化为约当标准型的直和 | 15 |
| 第二章 群的基本概念 | 24 |
| 一、群的定义和群的同构和同态 | 24 |
| 1. 试由群的定义证明: (1) $RR^{-1} = E$; (2) $RE = R$; (3) 若 $TR = R$, 则 $T = E$; (4) 若 $TR = E$, 则 $T = R^{-1}$; (5) RS 的逆元为 $S^{-1} R^{-1}$ | 24 |
| 2. 证明以乘法作为“乘积”的所有正实数构成的群和以“加法”作为乘积的所有实数构成的群同构 | 25 |
| 二、群的各种子集 | 25 |

| | |
|---|-----------|
| 3. 证明两子群的公共元素的集合也构成子群 | 26 |
| 4* . 证明阶数为素数的群只能是循环群 | 27 |
| 5. 试证明六阶群只有两种 | 27 |
| 6. 试证明, 除恒元外, 每个元素的阶都是 2 的群一定是阿贝尔群 | 27 |
| 7. 试证明由 σ_1 和 σ_2 的所有可能幂次及其乘积的集合构成群, 并证明此群和正 方形对称群同构 | 27 |
| 8. 证明由 $i\sigma_1$ 和 $i\sigma_2$ 的所有可能幂次及其乘积的集合构成群, 并证明此群和正 方形对称群不同构 | 28 |
| 9* . 试证明八阶群只有五种 | 29 |
| 10* . 试研究所有不同构的九阶群 | 30 |
| 11* . 试研究所有不同构的十阶群 | 31 |
| 12. 举例说明群 G 的不变子群的不变子群不一定是群 G 的不变子群. 反之, 证 明若群 G 的不变子群完整地属于子群 H , 则它也是子群 H 的不变子群 ... | 31 |
| 13. 对两互相共轭的元素, 计算群中使它们满足共轭关系 $S_i = PS_jP^{-1}$ 的元素 P 的个数 | 31 |
| 14. 试证明群 G 两个类作为复元素的乘积, 必由若干个整类构成 | 32 |
| 15. 试通过将 T 群的子群 C_3 的乘法表扩充的方法计算 T 群的乘法表 | 32 |
| 16. 试根据群 G 的乘法表分析此群的性质 | 34 |
| 第三章 群的线性表示理论 | 36 |
| 一、群的线性表示和标量函数变换算符 | 36 |
| 1. 设 G 是一个非阿贝尔群, $D(G)$ 是群 G 的一个不可约真实表示, 元素 R 的 表示矩阵为 $D(R)$. 现让群 G 元素 R 分别与下列矩阵对应, 问此矩阵的集合 是否分别构成群 G 的表示? (1) $D(R)^\dagger$; (2) $D(R)^\top$; (3) $D(R^{-1})$; (4) $D(R)^*$; (5) $D(R^{-1})^\dagger$; (6) $\det D(R)$; (7) $\text{tr} D(R)$ | 36 |
| 2* . 试计算标量函数变换算符在给定函数基中的矩阵形式 | 37 |
| 二、有限群的不等价不可约表示 | 39 |
| 3. 证明有限群任何一维表示的表示矩阵模为 1 | 41 |
| 4. 证明阿贝尔群的不可约表示都是一维的 | 41 |
| 5. 证明有限群两个等价的不可约幺正表示之间的相似变换矩阵, 如果限制其 行列式为 1, 必为幺正矩阵 | 41 |
| 6. 证明除恒等表示外, 有限群任一不可约表示的特征标对群元素求和为零 ... | 42 |
| 7. 试计算有限群群代数中通过左乘和右乘群元素得到的两个正则表示间的相 似变换矩阵 | 42 |
| 8. 试计算有限群的类中元素之和在不可约表示中的表示矩阵 | 43 |

| | |
|---|-----|
| 9. 证明有限群包含的自逆类个数等于自共轭的不等价不可约表示个数 | 44 |
| 10. 证明两群的直乘的不等价不可约表示都可表为两群不等价不可约表示的直乘... | 44 |
| 11. 试计算 D_3 群生成元在给定函数基中的表示矩阵, 并组合函数基使之分属 D_3 群各不等价不可约表示 | 46 |
| 12. 试通过 O 群的不变子群 D_2 之商群计算 O 群二维不可约表示的特征标和生成元的表示矩阵 | 49 |
| 13 [*] . 试由给定有限群的乘法表计算群的不可约表示特征标表 | 51 |
| 14. 试计算第二章第 16 题给出群的不可约表示特征标表 | 52 |
| 15. 试用投影算符的方法, 在 T 群的群空间计算分属各不可约表示的不可约基 | 53 |
| 16. 试用投影算符的方法, 在 O 群的群空间计算分属各不可约表示的不可约基 | 57 |
| 三、分导表示和诱导表示 | 67 |
| 17 [*] . 用诱导表示的方法计算 D_{2n+1} 群的所有不等价不可约表示 | 69 |
| 18 [*] . 用诱导表示的方法计算 D_{2n} 群的所有不等价不可约表示 | 70 |
| 19. 试计算立方体固有对称群 O 所有不等价不可约表示 | 70 |
| 20 [*] . 用诱导表示的方法计算正二十面体固有对称群 I 不可约表示的特征标表... | 73 |
| 21. 分别计算 I 群各不可约表示关于子群 C_5 、 D_5 和 T 的分导表示, 按子群不可约表示约化所得的表示种类和个数 | 75 |
| 22. 计算 I_h 群正则表示关于子群 C_{5_i} 、 D_{5_d} 和 T_h 的分导表示, 按子群不可约表示约化所得的表示种类和个数 | 77 |
| 23. 正二十面体对称群 I 的元素都可表为子群 C_5 和子群 T 元素的乘积 $T_0^a R_6^b S_1^c S_{12}^d$, 试由生成元 T_0 和 S_1 在各不可约表示的表示矩阵计算 R_6 和 S_{12} 的表示矩阵 | 78 |
| 四、克莱布施-戈登系数 | 80 |
| 24 [*] . 设两组函数基 ψ_μ 和 ϕ_ν 在群 G 变换中都按给定二维不可约表示变换, 已知群 G 生成元在该二维不可约表示中的表示矩阵, 试把乘积函数 $\psi_\mu \phi_\nu$ 组合成按群 G 各不可约表示变换的函数基 | 81 |
| 25. 计算 T 群三维不可约表示自直乘约化的相似变换矩阵 | 83 |
| 26 [*] . 试计算 O 群各不可约表示的直乘表示约化的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数 | 88 |
| 27. 试计算 I 群各不可约表示的直乘表示约化的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数 | 95 |
| 第四章 三维转动群 | 105 |
| 一、三维转动群的一般性质 | 105 |
| 1. 用数学归纳法证明辅助公式, 并由此证明 $SO(3)$ 群同态于 $SU(2)$ 群 | 106 |

| | |
|--|-----|
| 2. 把 $SO(3)$ 群元素的指数形式展开成有限项矩阵之和 | 108 |
| 二、三维转动群的不等价不可约表示 | 109 |
| 3. 由转动变换的矩阵形式计算它的欧拉角, 并写出它在 $SO(3)$ 群表示 D^l 中的表示矩阵元素 | 112 |
| 4* . 由转动变换的转轴和转角计算它的欧拉角, 并写出它在 $SO(3)$ 表示 D^l 中的表示矩阵元素 | 113 |
| 5* . 正二十面体对称群的任意元素可表为四个元素幂次的乘积, 试计算此四元素的欧拉角 | 114 |
| 6* . 计算正二十面体对称群若干元素的欧拉角 | 114 |
| 7. 利用 $SO(3)$ 群和 $SU(2)$ 群的同态关系, 验算 O 群元素的乘积公式 | 115 |
| 8. 试用 $SU(2)$ 群绕 z 轴和绕 y 轴转动元素的表示矩阵表出绕任意轴转动元素的表示矩阵 | 116 |
| 9* . 计算 $SO(3)$ 群绕 y 轴转动元素表示矩阵 $d^l(\omega)$ 的具体矩阵元素 | 116 |
| 10. 把 $SO(3)$ 群的不可约表示 D^3 关于子群 D_3 的分导表示, 按子群不可约表示约化, 找出约化的相似变换矩阵 | 118 |
| 11. 分别对 $SO(3)$ 群的不可约表示 D^{20} 和 D^{18} 关于正二十面体固有点群 I 的分导表示, 计算按子群 I 不可约表示约化的克莱布施-戈登级数 | 120 |
| 12. 计算正二十面体固有点 I 群生成元在各不可约表示中的表示矩阵, 并由此计算 I 群各次转动方向的极角 | 122 |
| 13. 试研究 $SU(2)$ 群的类 | 127 |
| 三、李氏定理和李群的伴随表示 | 127 |
| 14* . 试由李氏第二定理计算 $SU(2)$ 群不可约表示生成元的矩阵形式 | 128 |
| 15. 对任何一阶李群, 试选择新参数, 使新的组合函数为相加关系 | 130 |
| 四、不可约张量算符和维格纳-埃伽定理 | 131 |
| 16. 试由球函数线性组合出沿给定方向轨道角动量的本征函数 | 133 |
| 17. 设函数 $\psi_m^l(x)$ 是属于 $SO(3)$ 群不可约表示 D^l m 行的函数, 试由 $\psi_m^l(x)^*$ 线性组合出轨道角动量沿 e_2 方向的本征函数 | 134 |
| 18* . 试由旋量基计算自旋沿径向分量 $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ 的本征函数 | 135 |
| 19* . 试分别计算 J^2, J_3, L^2, S^2 和 $J^2, J_3, S^2, \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ 的共同本征函数 | 135 |
| 20. 试计算 $\{d^l(\theta)(I_3^l)^2 d^l(\theta)^{-1}\}_{mm}$, 其中 $d^l(\theta)$ 是转动群的表示矩阵, I_3^l 是该表示的第三个生成元 | 136 |
| 21* . 试用升降算符 L_{\pm} 作用的办法直接计算 $SO(3)$ 群若干直乘表示分解的克莱布施-戈登系数 | 137 |
| 22. 试用克莱布施-戈登系数计算三个电子系统总自旋角动量本征函数 | 141 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 23* | . 计算 $SO(3)$ 群表示矩阵元素 $D_{\nu\mu}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ 满足的微分方程 | 143 |
| 五、 | $SO(3)$ 群和 $SO(2, 1)$ 群所有不可约么正表示 | 145 |
| 24* | . 试讨论 $SO(3)$ 群和 $SO(2, 1)$ 群的所有不等价不可约么正表示 | 146 |
| 第五章 | 晶体的对称性 | 150 |
| 一、 | 点群及其循环子群的生成元 | 150 |
| 1. | 在直角坐标系中, 写出沿 z 轴方向的 6 次固有和非固有转动轴生成元的并矢形式和矩阵形式 | 151 |
| 2. | 用直角坐标系的单位矢量表出 T_d 群和 O_h 群各固有和非固有转动轴的方向和各固有转动轴生成元的并矢形式 | 151 |
| 3* | . 试用恒等变换的并矢和转轴方向的单位矢量表出绕任意给定方向转动给定角度变换的并矢形式 | 152 |
| 二、 | 空间群和对称元 | 153 |
| 4. | 试找出晶体对称操作的对称直线位置和沿轴向的滑移矢量 | 155 |
| 5. | 试找出晶体对称操作的对称平面位置和沿平面的滑移矢量 | 156 |
| 6. | 试分析若干空间群的对称性质 | 157 |
| 三、 | 确定空间群的方法 | 160 |
| 7. | 试由点群 D_{2d} 出发, 计算全部 12 种空间群 | 162 |
| 8. | 试由点群 D_2 出发, 计算全部 9 种空间群 | 163 |
| 第六章 | 置换群 | 166 |
| 一、 | 置换变换的乘积公式 | 166 |
| 1. | 试把给定置换化为无公共客体的轮换乘积 | 167 |
| 2* | . 试把给定对换表为相邻客体对换的乘积 | 167 |
| 3. | 证明长度为 l 的轮换阶数为 l | 168 |
| 4* | . 研究置换群的生成元 | 168 |
| 5* | . 试用置换变换表出“严格的”洗牌过程 | 168 |
| 二、 | 杨图, 杨表和杨算符 | 169 |
| 6* | . 写出置换群 S_5 , S_6 和 S_7 的全部杨图 | 170 |
| 7* | . 计算置换群 S_4 , S_5 , S_6 和 S_7 各类所包含的元素数目 | 170 |
| 8* | . 计算置换群 S_5 , S_6 , S_7 , S_8 和 S_9 各杨图的正则杨表数 | 170 |
| 9. | 写出若干杨表的杨算符 | 172 |
| 三、 | 杨算符的对称性质和正交性 | 172 |
| 10* | . 自小到大写出 S_5 群对应杨图 $[3, 2]$ 的所有五个正则杨表, 并计算这些正则杨表间的置换变换 | 173 |
| 11* | . 计算联系两杨表的置换, 并验算对应的两杨算符间的关系 | 173 |

| | |
|--|-----|
| 12. 设 R 联系两乘积不为零的杨表, 计算 R 并把 R 表成属杨表的横向置换和纵向置换的乘积 | 174 |
| 13* . 试把对应杨图 $[2,1]$ 的非正则杨算符表成正则杨算符的组合 | 174 |
| 四、置换群的原始幂等元 | 175 |
| 14. 具体写出 S_4 群恒元按杨算符的展开式 | 176 |
| 15* . 计算对应杨图 $[2,2,1]$ 的正交原始幂等元 | 177 |
| 16* . 计算对应杨图 $[4,2]$ 的正交原始幂等元 | 178 |
| 17* . 计算对应杨图 $[3,2,1]$ 的正交原始幂等元 | 179 |
| 18* . 计算对应杨图 $[3,3]$ 和 $[4,1,1]$ 的正交原始幂等元 | 180 |
| 19* . 举例说明最小左理想对应的原始幂等元不是惟一的 | 181 |
| 五、对应杨图 $[\lambda]$ 的置换群不可约表示 | 181 |
| 20. 分别在标准基和正交基下计算 S_3 群不可约表示 $[2,1]$ 自乘分解的克莱布施-戈登系数 | 183 |
| 21. 计算不可约表示 $[3,1]$ 标准基, 并用列表法计算相邻客体对换在此表示中的表示矩阵 | 186 |
| 22. 计算 S_4 群相邻客体对换在不可约表示 $[3,1]$ 中的实正交表示矩阵形式和正交基表达式 | 188 |
| 23* . 计算在 S_4 群空间不可约表示 $[2,1,1]$ 的标准基和正交基, 以及相邻客体对换的表示矩阵 | 192 |
| 24* . 计算在 S_4 群空间不可约表示 $[2,2]$ 的标准基和正交基, 以及相邻客体对换的表示矩阵 | 196 |
| 25* . 试计算甲烷分子伸展振动波函数的对称基 | 198 |
| 26. 用列表法计算 S_5 群生成元在不可约表示 $[2,2,1]$ 中的表示矩阵 | 199 |
| 六、计算置换群不可约表示特征标的图解方法 | 201 |
| 27. 分别计算 S_6 群相邻客体对换在对应两关连杨图表示中的实正交表示矩阵形式 | 202 |
| 28* . 用图解方法计算置换群 S_5 表示 $[2,2,1]$ 的特征标 | 203 |
| 29. 用图解方法计算 S_6 群各类在若干不可约表示中的特征标 | 204 |
| 30* . 用图解方法计算 S_N 群的特征标表, 其中 $3 \leq N \leq 7$ | 204 |
| 七. 置换群不可约表示的内积 | 206 |
| 31* . 利用表示的特征标计算 S_N 群各不可约表示直乘分解的克莱布施-戈登级数, 其中 $3 \leq N \leq 7$ | 207 |
| 32* . 计算 S_5 群不可约表示 $[3,2]$ 自直乘分解的克莱布施-戈登系数 | 210 |
| 八、置换群不可约表示的外积 | 222 |

| | |
|---|-----|
| 33. 用立特武德-理查森规则计算若干置换群表示外积的约化 | 224 |
| 34. 用立特武德-理查森规则计算 S_6 群若干不可约表示关于子群 $S_3 \otimes S_3$ 的分 导表示按子群不可约表示的约化 | 225 |
| 35. 试由 S_3 群的二维不可约表示 $[2, 1]$ 诱导出 S_4 群的表示, 具体计算 S_4 群 生成元在该诱导表示中的表示矩阵 | 226 |
| 第七章 SU(N) 群 | 228 |
| 一、SU(N) 群的不等价不可约表示 | 228 |
| 1. 计算 SU(3) 群和 SU(6) 群若干用杨图标记的不可约表示的维数 | 232 |
| 2. 对 SU(3) 群和 SU(6) 群, 分别计算若干表示直乘分解的克莱布施-戈登级 数, 并用维数公式检验 | 233 |
| 3*. 试用正则张量杨表方法, 具体写出 SU(3) 群三阶张量子空间 $\mathcal{Y}^{\mathcal{A}}$ 的完备基, 其中杨算符 \mathcal{Y} 对应杨图 $[2, 1]$ | 234 |
| 4*. 对于 SU(3) 群的不可约表示 $[3, 1]$, 试把所有非零张量杨表表为正则张量 杨表的线性组合 | 235 |
| 5*. 设 \mathcal{Y} 是对应杨图 $[3, 1]$ 的正则杨算符, 试具体写出 SU(3) 群四阶张量子空 间 $\mathcal{Y}^{\mathcal{A}}$ 中所有正则张量杨表的具体展开式 | 237 |
| 6. 把 SU(6) 群的若干无迹混合张量表示变换成协变张量表示, 并计算这些表示 的维数 | 238 |
| 7. 证明公式 $\sum_{A=1}^{N^2-1} (T_A)_{ac} (T_A)_{bd} = \frac{1}{2} \delta_a^d \delta_b^c - \frac{1}{2N} \delta_a^c \delta_b^d$ | 239 |
| 二、SU(N) 群生成元的谢瓦莱基和表示的盖尔范德基 | 240 |
| 8*. 画出 SU(3) 群的不可约表示 $[3]$ 的方块权图, 并计算降算符不为零的矩阵 元. 对方块权图中的每一个权, 请计算相应的正则张量杨表, 并标出归 一化系数 | 243 |
| 9*. 画出 SU(3) 群的不可约表示 $[2, 1]$ 的方块权图, 并计算降算符不为零的矩 阵元. 对方块权图中的每一个权, 请计算相应的正则张量杨表, 并标出归 一化系数 | 245 |
| 10. 画出 SU(3) 群的不可约表示 $[4]$ 的方块权图, 并计算降算符不为零的矩 阵元. 对方块权图中的每一个权, 请计算相应的正则张量杨表, 并标出归 一化系数 | 247 |
| 11. 画出 SU(3) 群的不可约表示 $[3, 1]$ 的方块权图, 计算降算符不为零的矩阵 元, 并对表示中的重权, 计算各状态的正则张量杨表及其按张量基 Θ_{abcd} 的 展开式 | 249 |
| 12*. 对 SU(3) 群的不可约表示 $[2, 1]$, 请把用正则张量杨表表出的正交基与盖 尔范德基联系起来 | 254 |

| | |
|---|-----|
| 13. 对 $SU(3)$ 群的不可约表示 $[3,1]$, 把每一个正交归一基都用正则张量杨表的线性组合表出, 并请把正交归一基与盖尔范德基联系起来 | 256 |
| 14. 试用方块权图方法, 计算 $SU(3)$ 群直乘表示 $[2] \otimes [1]$ 的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数 | 262 |
| 三、$SU(3)$ 群的平面权图和强子波函数的组合 | 266 |
| 15. 画出 $SU(3)$ 群的不可约表示 $[3,1]$ 的平面权图, 对每一个权, 标上相应的正则张量杨表(不必正交归一) | 267 |
| 16. 中子由一个 u 夸克和两个 d 夸克组成, 试写出 $S_3 = -1/2$ 的中子味道部分和自旋部分波函数的形式 | 268 |
| 四、分导表示 | 269 |
| 17* . 把 $SU(4)$ 群表示 $[3,1]$ 关于 $SU(3)$ 群的分导表示约化, 并列出的 $SU(3)$ 群各不可约表示状态基的正则张量杨表 | 270 |
| 18* . 把 $SU(6)$ 群若干不可约表示, 作为子群 $SU(3) \otimes SU(2)$ 的分导表示, 分别按子群不可约表示分解 | 271 |
| 19* . 把 $SU(5)$ 群表示 $[1]$, $[1,1]$ 和 $[2,1^3]$ 作为子群 $SU(3) \otimes SU(2)$ 的分导表示, 分别按子群不可约表示分解 | 273 |
| 五、$SU(N)$ 群的开西米尔算子 | 274 |
| 20* . 计算 $SU(N)$ 群一行杨图 $([1^r])$ 对应表示的开西米尔 $T_2([1^r])$ 和 $A([1^r])$ | 277 |
| 21. 计算 $SU(6)$ 群不可约表示 $[3]$ 的开西米尔 $T_2([3])$ 和 $A([3])$ | 277 |
| 22. 计算 $SU(5)$ 群一行杨图 $([\lambda] = [\lambda, 0, 0, 0])$ 对应表示的开西米尔 $T_2([\lambda])$ 和 $A([\lambda])$ | 278 |
| 第八章 $SO(N)$ 群和洛伦兹群 | 280 |
| 一、$SO(N)$ 群的不可约张量表示 | 280 |
| 1. 计算若干用杨图标记的 $SO(6)$ 群不可约表示的维数 | 281 |
| 2. 将若干 $SU(7)$ 群不可约表示按 $SO(7)$ 群不可约表示分解 | 282 |
| 3. 计算若干不可约张量表示直乘分解的克莱布施-戈登级数 | 285 |
| 二、$SO(N)$ 群的旋量表示 | 285 |
| 4. 计算若干用杨图标记的 $SO(6)$ 群不可约旋量表示的维数 | 288 |
| 三、$SO(4)$ 群和洛伦兹群 | 290 |
| 5. 讨论 $SO(4)$ 群的类并计算它们在不可约表示 D^{jk} 中的特征标 | 295 |
| 6. 计算若干固有洛伦兹变换的参数 | 295 |
| 7* . 研究狄拉克旋量表示的共轭表示的性质 | 296 |
| 8* . 试讨论固有洛伦兹群的类 | 297 |
| 9* . 试把固有洛伦兹群任意元素表成矩阵的指数函数形式 | 301 |

| | |
|---|-----|
| 10. 利用坐标矩阵 $X = -i x_4 \mathbf{1} + \sum_{a=1}^3 x_a \sigma_a$ 证明固有洛伦兹群和 $SL(2, C)$ 群的 同态关系 | 302 |
| 第九章 李群和李代数 | 305 |
| 一、半单李代数的分类 | 305 |
| 1. 证明单纯李代数的根链长度不大于 4 | 307 |
| 2* . 试证明 l 秩李代数有 l 个线性无关的素根 | 307 |
| 3* . 试研究两素根间夹角的可能取值和夹角与素根长度平方比的关系 | 308 |
| 4* . 试由 E_6 李代数的邓金图计算它的嘉当矩阵 | 308 |
| 5* . 已知某单纯李代数的嘉当矩阵, 试画出它的邓金图 | 309 |
| 6* . 试由嘉当矩阵计算 C_2 李代数的全部正根 | 309 |
| 7* . 试由嘉当矩阵计算 B_3 李代数的全部正根 | 310 |
| 8* . 试由嘉当矩阵计算 D_4 李代数的全部正根 | 311 |
| 二、不可约表示和谢瓦莱基 | 312 |
| 9. 画出 C_2 李代数的两个基本表示 $(1, 0)$, $(0, 1)$ 和伴随表示 $(2, 0)$ 的方块权图 和平面权图 | 315 |
| 10. 计算 C_2 李代数直乘表示 $(1, 0) \times (1, 0)$ 分解的克莱布施-戈登级数和克莱 布施-戈登系数 | 316 |
| 11. 计算 C_2 李代数直乘表示 $(0, 1) \times (0, 1)$ 分解的克莱布施-戈登级数和克莱 布施-戈登系数 | 319 |
| 12. 试用 l 维空间对称分布的 $(l+1)$ 个基 V_j 表出 C_l 李代数的基本主权和全部 根矢量 | 324 |
| 13. 已知各有关表示维数, 外尔轨道长度和表示所包含各主权重数, 试计算 G_2 李代数直乘表示 $(1, 0) \times (1, 0)$ 分解的克莱布施-戈登级数 | 325 |
| 14. 已知各有关表示维数, 外尔轨道长度和表示所包含的各主权重数, 试计算 F_4 李代数直乘表示 $(0, 0, 0, 1) \times (0, 0, 0, 1)$ 分解的克莱布施-戈登级数 ... | 327 |
| 三、D 维欧氏空间的角动量算符和本征状态 | 329 |
| 15* . 分别计算 D 维空间总角动量平方算符在 $SO(D)$ 群最高权表示中的本征 值, 其中 $D=2n$ 或 $D=2n+1$ | 332 |
| 16* . 在 D 维空间计算各向同性的二体系统的角动量本征函数基, 并由此简化 薛定谔方程 | 335 |
| 17* . 在 D 维空间计算各向同性的三体系统的角动量本征函数基, 并由此简化 薛定谔方程 | 340 |
| 参考文献 | 344 |

第一章 线性代数复习

一、矩阵的本征值和本征矢量

★ m 维矩阵 R 的本征值 λ 和本征矢量 \mathbf{a} 满足

$$R\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \quad (1.1)$$

这是关于本征矢量分量 a_i 的联立线性齐次方程，方程有非零解的充要条件是方程的系数行列式为零

$$\det(R - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} R_{11} - \lambda & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} - \lambda & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} - \lambda \end{vmatrix} \quad (1.2)$$
$$= (-\lambda)^m + (-\lambda)^{m-1} \operatorname{tr} R + \cdots + \det R = 0.$$

其中 $\operatorname{tr} R$ 是矩阵的迹，即矩阵对角元之和， $\det R$ 是矩阵的行列式。方程(1.2)称为矩阵的久期方程，它是关于 λ 的 m 次代数方程，包括重根共有 m 个复根。这些根就是矩阵的本征值。对于每一个给定的本征值 λ ，由本征方程(1.1)，至少可解得一个本征矢量 \mathbf{a} 。本征矢量包含有一个可乘的非零常数因子。

如果本征值 λ 是 n 重根，由本征方程(1.1)不一定可算出 n 个线性无关的本征矢量。如果矩阵 R 的 m 个行(或列)矢量中只有 r 个是线性无关的，则称矩阵 R 的秩为 r 。若矩阵 $(R - \lambda \mathbf{1})$ 的秩为 r ，则由久期方程可找到 $(m - r)$ 个线性无关的本征矢量。对应同一本征值的本征矢量之任意线性组合都是对应此本征值的本征矢量。零矢量是任何矩阵的平庸的本征矢量，我们只讨论非平庸的本征矢量。

对于维数较低的矩阵，或包含较多零矩阵元素的矩阵，本征值和本征矢量有时可以根据经验猜出来，或由计算和猜测相结合得到，只要猜出的本征值和本征矢量满足本征方程(1.1)，它们就是正确的结果。另一方面，即使是计算得的结果，也应该代入方程(1.1)进行验算。

★ $R^\dagger = R$ 的矩阵称为厄米矩阵， $R^\dagger = R^{-1}$ 的矩阵称为么正矩阵。实的厄米矩阵是实对称矩阵，实的么正矩阵是实正交矩阵。本征值都是正数的矩阵称为正定的

矩阵, 不包含负本征值的矩阵称为半正定的矩阵. 同样可定义负定或半负定的矩阵.

1. 证明矩阵的本征值之和等于矩阵迹, 本征值之积等于矩阵行列式.

证 对于一个 m 维矩阵 R , 久期方程是一个 m 次代数方程, 它的包括重根在内的 m 个复根 λ_j , 就是矩阵 R 的本征值. 因此久期方程又可以表为

$$\begin{aligned}\det(R - \lambda \mathbf{1}) &= \prod_{j=1}^m (\lambda_j - \lambda) \\ &= (-\lambda)^m + (-\lambda)^{m-1} \sum_{j=1}^m \lambda_j + \cdots + \prod_{j=1}^m \lambda_j = 0.\end{aligned}$$

与(1.2)式比较, 得 R 矩阵的矩阵迹等于本征值之和, R 矩阵的行列式等于本征值之积. 证完.

2. 计算泡利矩阵 σ_1 和 σ_2 的本征值和本征矢量

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

解 σ_1 矩阵对矢量的作用是把矢量上下两个分量交换, 如果矢量的两分量相等, 则它是 σ_1 矩阵的本征值为 1 的本征矢量, 如果矢量的两分量互差负号, 则它是 σ_1 矩阵的本征值为 -1 的本征矢量,

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

同理可知, 如果矢量的两分量相差 $\pm i$, 则它是 σ_2 矩阵的本征矢量:

$$\sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

当矩阵 R 包含许多零矩阵元素时, 有时会以直和或直积形式包含着 σ_1 或 σ_2 矩阵, 此时 R 矩阵的某些本征值和本征矢量可以利用上面结果猜出来. 所谓矩阵 R 以直和形式包含一个二维子矩阵是指在给定的 a 和 b 行(列), 有 $R_{ac} = R_{ca} = R_{bc} = R_{cb} = 0$, 其中 c 是所有不等于 a 和 b 的行(列)指标.

3. 计算下面 R 矩阵的本征值和本征矢量

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 矩阵 R 可以看成两个子矩阵 σ_1 的直和, 其中一个子矩阵处在第一和第四行(列), 另一个子矩阵处在第二和第三行(列). 根据上题的计算结果知, R 矩阵有两个本征值为 1, 另两个本征值为 -1 , 对应的本征矢量分别为

$$1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下面 R 矩阵的本征值和本征矢量

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 这是 σ_1 矩阵的推广, 它对矢量的作用是把矢量的三个分量顺序变换, 变换三次则恢复原状, 即 $R^3 = \mathbf{1}$, 因此 R 矩阵的本征值为 1, $\omega = \exp\{-i2\pi/3\}$ 和 ω^2 , 本征矢量两个相邻分量之比为本征值. 下面依次列出各本征值对应的本征矢量:

$$1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega: \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \omega^2: \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}.$$

5. 若 $\det R \neq 0$, 证明 $R^\dagger R$ 和 RR^\dagger 都是正定的厄米矩阵.

解 显然, $R^\dagger R$ 和 RR^\dagger 是厄米矩阵. 设 λ 和 \mathbf{a} 是 $R^\dagger R$ 的本征值和非零的本征矢量,

$$(R^\dagger R)\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} > 0,$$

则

$$\lambda \{ \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \} = \mathbf{a}^\dagger (R^\dagger R) \mathbf{a} = (R\mathbf{a})^\dagger (R\mathbf{a}) \geq 0,$$

即 $\lambda \geq 0$. 由于 $\det R \neq 0$, $\det(R^\dagger R) \neq 0$, 则本征值 λ 不为零, 因此 $(R^\dagger R)$ 是正定的. 把 R^\dagger 看成新的 R , 同样可证 RR^\dagger 是正定的.

6. 证明: (1) 若 $R^\dagger R = \mathbf{1}$, 则 $RR^\dagger = \mathbf{1}$;
 (2) 若 $R^{-1} R = \mathbf{1}$, 则 $RR^{-1} = \mathbf{1}$;
 (3) 若 $R^T R = \mathbf{1}$, 则 $RR^T = \mathbf{1}$.

证 三个小题的证法完全相同, 这里以小题(1)为例来证明.

由于 $R^\dagger R = \mathbf{1}$, R^\dagger 是非奇的. 设 S 是 R^\dagger 的逆矩阵, $SR^\dagger = \mathbf{1}$, 于是有 $RR^\dagger = (SR^\dagger)RR^\dagger = S(R^\dagger R)R^\dagger = SR^\dagger = \mathbf{1}$. 把第一小题中的 R^\dagger 换成 R^{-1} 或 R^T , 同样可证明后两个小题.

7. 试讨论 2×2 么正矩阵, 实正交矩阵和厄米矩阵各含有多少个独立实参数, 并写出它们的一般表达式.

解 2×2 复矩阵包含四个复参数, 即八个实参数. 对么正矩阵, 两个列矩阵的归一条件给出参数的两个实条件, 列矩阵正交给出一个复条件, 即两个实条件, 共四个实条件, 因此 2×2 么正矩阵包含四个独立实参数. 对厄米矩阵, 对角元是实数, 即它们的虚部为零, 给出两个实条件, 一对非对角元互为复共轭, 给出一个复条件, 因此 2×2 厄米矩阵也包含四个独立实参数.

2×2 实矩阵包含四个实参数. 对实正交矩阵, 两个列矩阵的归一条件给出参数的两个实条件, 列矩阵正交给出一个实条件, 共三个实条件, 因此 2×2 实正交矩阵只包含一个独立实参数.

取任意 2×2 么正矩阵 u , 行列式为 $\det u = \exp\{i\varphi\}$, 提出因子 $\exp\{i\varphi/2\}$, 得

$$u = e^{i\varphi/2} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

根据定义,

$$aa^* + bb^* = cc^* + dd^* = 1, \quad ac^* + bd^* = 0, \quad ad - bc = 1.$$

由此得

$$\begin{aligned} a &= a(cc^* + dd^*) = d^* (-bc + ad) = d^*, \\ b &= b(cc^* + dd^*) = c^* (bc - ad) = -c^*. \end{aligned}$$

因此, 2×2 么正矩阵的一般形式为

$$u = e^{i\varphi/2} \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \quad aa^* + bb^* = 1.$$

其中受限制的复参数 a 和 b 包含三个实参数, 加上 φ , 共四个独立实参数.

实正交矩阵也是么正矩阵, 行列式可等于 ± 1 . 当行列式为 1 时, a 和 b 取实数, 满足条件 $a^2 + b^2 = 1$, 常取 $a = \cos \theta$, $b = \sin \theta$. 当行列式为 -1 时, 常把第一行矩阵元素改号, 得 2×2 实正交矩阵的一般形式为

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad R' = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

2×2 厄米矩阵的一般形式为

$$R = \begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix},$$

其中 a, b, c 和 d 都是独立实参数.

二、相似变换和矩阵的对角化

★ 在 m 维空间 \mathcal{L} 中, 选定基 e_μ 后, 任何矢量 a 可按基展开,

$$a = \sum_{\mu=1}^m e_\mu a_\mu. \quad (1.3)$$

a_μ 称为矢量 a 关于基 e_μ 的分量, 把这些分量排成 m 行一列的列矩阵 \underline{a} , 称为矢量 a 关于基 e_μ 的列矩阵形式.

★ 设 m 维空间 \mathcal{L} 对算符 R 保持不变, 则算符 R 作用在基 e_μ 上得到基的线性组合,

$$R e_\mu = \sum_{\nu=1}^m e_\nu D_{\nu\mu}(R). \quad (1.4)$$

组合系数 $D_{\nu\mu}(R)$ 排列起来得到的 $m \times m$ 矩阵 $D(R)$ 称为算符 R 关于基 e_μ 的矩阵形式.

★ 选择一组新基 e'_ν , 把它们在原基 e_μ 中的列矩阵形式, 作为列矩阵排列成 S 矩阵:

$$e'_\nu = \sum_{\mu=1}^m e_\mu S_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

此 S 矩阵称为两组基间的变换矩阵,它是 m 维非奇矩阵.关于新基 e'_ν , 矢量 a 的列矩阵形式和算符 R 的矩阵形式分别为

$$a = \sum_{\mu=1}^m e'_\mu a'_\mu, \quad R e'_\nu = \sum_{\rho=1}^m e'_\rho \overline{D}_{\rho\nu}(R), \quad (1.6)$$

它们与关于原基的矩阵形式间的联系为

$$a' = S^{-1} a, \quad \overline{D}(R) = S^{-1} D(R) S. \quad (1.7)$$

通常称“ $D(R)$ 矩阵经过相似变换 S 变成 $\overline{D}(R)$ 矩阵”,有的书上把 $D(R)$ 矩阵和 $\overline{D}(R)$ 矩阵称为等价的矩阵,它们是同一个算符关于不同基的矩阵形式.由相似变换相联系的矩阵有共同的本征值.

把相似变换关系写成矩阵元素形式:

$$\sum_{\rho=1}^m D_{\mu\rho}(R) S_{\rho\nu} = \sum_{\rho=1}^m S_{\mu\rho} \overline{D}_{\rho\nu}(R), \quad D(R) S_{\nu} = \sum_{\rho=1}^m S_{\rho} \overline{D}_{\rho\nu}(R). \quad (1.8)$$

因为 S 矩阵的列矩阵正是新基在原来基中的列矩阵形式,而(1.8)式中的 $\overline{D}_{\rho\nu}(R)$ 是作为组合系数出现的,所以(1.8)式是(1.6)式在原来基 e_μ 中的矩阵形式.这形式在以后的计算中非常有用.

★ 如果 S 矩阵的第一列是 $D(R)$ 矩阵的本征值为 λ_1 的本征矢量,则 $\overline{D}(R)$ 的第一列只有第一个分量等于 λ_1 , 其余分量都为零.如果 S 矩阵的所有列矩阵都是 $D(R)$ 矩阵的线性无关的本征矢量,则 $\overline{D}(R)$ 矩阵是对角矩阵,对角元依次是各本征矢量对应的本征值.这就是矩阵通过相似变换对角化的本质.

把 m 维 $D(R)$ 矩阵对角化的充要条件是 $D(R)$ 矩阵存在 m 个线性无关的本征矢量.把 $D(R)$ 矩阵对角化的相似变换矩阵 S 的各列矩阵正是 $D(R)$ 矩阵的线性无关的本征矢量.这样的 S 矩阵并没有完全确定,它允许右乘一个与对角化的 $\overline{D}(R)$ 矩阵相对易的矩阵 X .如果 $D(R)$ 矩阵的 m 个本征值互不相同,则 X 矩阵是对角矩阵,它的存在说明每个本征矢量允许乘一个任意常数.如果 $D(R)$ 矩阵各本征值 λ_j 的重数分别为 n_j , $\sum_j n_j = m$, 则 X 矩阵是方块矩阵,包含 $\sum_j n_j^2$ 个任意常数,这些常数表明,对应同一本征值的本征矢量之间允许作任意线性组合.

★ m 维幺正矩阵和厄米矩阵都存在 m 个正交归一的本征矢量,因此它们可通过幺正的相似变换对角化. m 维实对称矩阵(也是厄米矩阵)存在 m 个正交归一的实本征矢量,因此可通过实正交相似变换对角化.但 m 维实正交矩阵(也是幺正矩阵)不一定可以通过实正交相似变换对角化.

8. 找相似变换把下列矩阵对角化:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

解 设题中给出的矩阵为 $D(R)$.

(1) 矩阵 $D(R)$ 的久期方程为

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (2 - \lambda)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

解得本征值为 $2, 2i$ 和 $-2i$. 注意到 $D(R)/2$ 矩阵是实正交矩阵, 它的三个本征向量是互相正交的. 由 $D(R)$ 矩阵的第二行可以看出, 若本征向量的第一和第三分量相等, 第二分量为零, 则在 $D(R)$ 矩阵作用后, 第二分量保持为零. 再由 $D(R)$ 矩阵的第一和第三行知, 它正是 $D(R)$ 矩阵的本征值为 2 的本征向量, 它的转置为 $(1, 0, 1)$. 根据正交性, 其他两个本征向量的转置取 $(1, a, -1)$ 的形式, 代入本征方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \pm 2i \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix},$$

解得 $a = \mp i\sqrt{2}$. 归一化后得

$$X^{-1} D(R) X = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵 $D(R)$ 的久期方程为

$$\lambda^2 - 2(\cos \theta)\lambda + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta}) = 0,$$

解得本征值为 $\exp(\pm i\theta)$. 代入本征方程,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = e^{\pm i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

解得 $a = \mp i$. 归一化后得

$$X^{-1} D(R) X = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

9. 找相似变换矩阵 M 使

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 设相似变换前的矩阵为 $D(R)$, 相似变换后的矩阵为 $\overline{D}(R) = M^{-1} D(R) M$. $\overline{D}(R)$ 矩阵是 $-i\sigma_2$ 和 0 的直和, 故可与下面矩阵对易

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

因此, 若 M 矩阵满足式 $M^{-1} D(R) M = \overline{D}(R)$, 则 MX 矩阵也满足此式, 其中 X 中的参数反映了相似变换 M 的不完全确定性.

由 $\overline{D}(R)$ 矩阵的形式可知, $D(R)$ 矩阵的本征值是 0 和 $\pm i$, 而 M 矩阵的第三列正是对应零本征值的本征矢量, 前两列则是对应本征值为 $\pm i$ 的本征矢量之线性组合. 先计算 $D(R)$ 的零本征值的本征矢量. 取本征矢量的第三个分量为 $\cos\theta$, 由 $D(R)$ 矩阵的前两行知, 本征矢量的前两个分量分别为 $\sin\theta\cos\varphi$ 和 $\sin\theta\sin\varphi$. 这相当选择了参数 γ . 令

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \sin\theta\cos\varphi \\ b_1 & b_2 & \sin\theta\sin\varphi \\ c_1 & c_2 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

代入

$$D(R) M = M \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 \\ b_2 & -b_1 & 0 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{aligned} a_2 &= -b_1 \cos \theta + c_1 \sin \theta \sin \varphi, \\ b_2 &= a_1 \cos \theta - c_1 \sin \theta \cos \varphi, \\ c_2 &= -a_1 \sin \theta \sin \varphi + b_1 \sin \theta \cos \varphi, \\ -a_1 &= -b_2 \cos \theta + c_2 \sin \theta \sin \varphi, \\ -b_1 &= a_2 \cos \theta - c_2 \sin \theta \cos \varphi, \\ -c_1 &= -a_2 \sin \theta \sin \varphi + b_2 \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned}$$

把前三式代入后三式,或后三式代入前三式,得

$$\begin{aligned} a_1 \sin \theta \cos \varphi + b_1 \sin \theta \sin \varphi + c_1 \cos \theta &= 0, \\ a_2 \sin \theta \cos \varphi + b_2 \sin \theta \sin \varphi + c_2 \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

这两个关系说明 M 矩阵的前两列与第三列正交.这是 $D(R)$ 矩阵的反对称性所决定的,因为若 $D(R)\underline{a} = \lambda\underline{a} \neq 0$, $D(R)\underline{b} = 0$, 则 $\underline{b}^T D(R)\underline{a} = 0$,

$$0 = \underline{b}^T D(R)\underline{a} = \lambda \underline{b}^T \underline{a}$$

现在为方便起见,选择 $c_1 = -\sin \theta$,则由上式可得一组特解: $a_1 = \cos \theta \cos \varphi$ 和 $b_1 = \cos \theta \sin \varphi$.这相当对参数 α 和 β 的一种选择.再由前面公式可解得 $a_2 = -\sin \varphi$, $b_2 = \cos \varphi$ 和 $c_2 = 0$.最后得 M 是一个实正交矩阵:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

10. 找相似变换矩阵 M 使

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} M = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 第一式是一个把矩阵对角化的相似变换关系,相似变换前的矩阵的三个本征矢量,构成了 M 矩阵的三个列矩阵.为了满足后两个公式,本征矢量必须保留可乘因子,即 M 矩阵可取为

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ ia & 0 & -ic \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

可以取 $b=1$,这相当对相似变换的可乘因子的一种选择.代入第二式,为了避免计算 M^{-1} 矩阵,可先把 M^{-1} 移到等式右面去,得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ -a & 0 & c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & a+c & 0 \\ 0 & i(a-c) & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

解得 $a = -c = -\sqrt{1/2}$,

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

经过检验,它确实也满足第三式.

11. 设

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

找相似变换矩阵 X 使

$$X^{-1}(R \times R)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}(S \times S)X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

解 根据矩阵直乘的定义,

$$R \times R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S \times S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$R \times R$ 已经是对角矩阵, 容易看出, 它的本征值为 1 和 -1 的本征矢量分别为

$$+1: \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad -1: \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix},$$

因此 X 矩阵取如下形式

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ 0 & c & 0 & c' \\ 0 & d & 0 & d' \\ b & 0 & b' & 0 \end{pmatrix}.$$

在代入第二式前, 先把 X^{-1} 矩阵移到等式的右面, 得

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} a+3b & \sqrt{3}(c+d) & a'+3b' & \sqrt{3}(c'+d') \\ -\sqrt{3}(a-b) & c-3d & -\sqrt{3}(a'-b') & c'-3d' \\ -\sqrt{3}(a-b) & -3c+d & -\sqrt{3}(a'-b') & -3c'+d' \\ 3a+b & -\sqrt{3}(c+d) & 3a'+b' & -\sqrt{3}(c'+d') \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a & 0 & -a' & -\sqrt{3}a' \\ 0 & 2c & \sqrt{3}c' & -c' \\ 0 & 2d & \sqrt{3}d' & -d' \\ 2b & 0 & -b' & -\sqrt{3}b' \end{pmatrix}.$$

解得 $a=b$, $c=-d$ 和 $c'=d'=-a'=b'$. 由于相似变换的不完全确定性, 可选 $a=c=c'=\sqrt{1/2}$, 得

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. 找使下面三矩阵同时对角化的公共相似变换矩阵 X ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 前两个矩阵都是方块矩阵, 除了行列排列的区别外, 它们都是三个 σ_1 矩阵的直和, 第一个矩阵中, 子矩阵涉及的行列是 $(1,4)$, $(2,5)$ 和 $(3,6)$, 而对第二个矩阵

则为(1,4),(2,6)和(3,5).因此,两矩阵各有三个本征值为1,三个本征值为-1.两个矩阵的本征矢量分别为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ -a' \\ -b' \\ -c' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ d \\ f \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ e' \\ f' \\ -d' \\ -f' \\ -e' \end{pmatrix}.$$

1 -1 1 -1

第三个矩阵的本征方程为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t+u \\ s+t+u \\ s+t+u \\ p+q+r \\ p+q+r \\ p+q+r \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}.$$

除了本征值为零的情况外,前三个分量必须相等,后三个分量也必须相等,因此本征值是±3.相应的本征矢量是

$$+3: \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -3: \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

这两个矢量也是前两个矩阵的本征矢量,本征值为1和-1.在余下的子空间中,第

三个矩阵的本征值都是零,而前两个矩阵的本征值分别是 ± 1 .适当排列后,得相似变换矩阵为

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & 0 & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

经过此相似变换,三个矩阵都变成对角矩阵,列举如下:

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{1, -1, 1, 1, -1, -1\}, \\ & \text{diag}\{1, -1, 1, -1, 1, -1\}, \\ & \text{diag}\{3, -3, 0, 0, 0, 0\}. \end{aligned}$$

13. 写出 m 行 m 列既么正又厄米矩阵的一般形式.

解 么正矩阵和厄米矩阵都可以通过么正的相似变换对角化,对角化后,么正矩阵对角元的模为 1,而厄米矩阵的对角元为实数.因此,既么正又厄米的矩阵经过么正的相似变换对角化后,对角元只能取 ± 1 .适当排列后记作 Γ_n ,它是对角矩阵,前 n 个对角元为 1,后 $m-n$ 个对角元为 -1 .因此既么正又厄米的矩阵一般可表为 $U\Gamma_n U^{-1}$,其中 U 矩阵是行列式为 1 的么正矩阵.

14. 证明若 R 和 R^\dagger 乘积可以对易,则 R 和 R^\dagger 可通过共同的么正相似变换对角化.进一步再证明矩阵 R 能通过么正相似变换对角化的充要条件是 R 和 R^\dagger 乘积可以对易.

证 本题第一部分的证明,与证明么正或厄米矩阵能通过么正的相似变换对角化的方法很类似.取 R 矩阵的任一本征值 λ_1 和相应归一化的本征矢量 $S_1^{(1)}$,以 $S_1^{(1)}$ 为第一个列矩阵,找一组完备的正交归一的列矩阵,把它们排列起来构成么正矩阵 $S^{(1)}$.经过 $S^{(1)}$ 相似变换, $(S^{(1)})^{-1} R^\dagger (S^{(1)})$ 和 $(S^{(1)})^{-1} R S^{(1)}$ 仍互为转置共轭矩阵,且仍互相对易.因为

$$(S^{(1)})^{-1}RS^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \{ (S^{(1)})^{-1}R^{\dagger}S^{(1)} \}^{\dagger},$$

两矩阵的两种次序的乘积得到的第一行第一列矩阵元素应该相等

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_1|^2 + \sum_{n=2}^m |r_n|^2.$$

可见所有 r_n 都等于零. 余下的子矩阵 $R^{(1)}$ 仍与 $(R^{(1)})^{\dagger}$ 对易, 可以重复前面的步骤, 通过一系列的么正相似变换把 R 和 R^{\dagger} 同时对角化.

反之, 若 R 可以通过么正相似变换 S 对角化, 则 R^{\dagger} 也可以通过 S 相似变换对角化, 因对角矩阵互相对易, 得出对角化前的矩阵 R 和 R^{\dagger} 也可对易. 证完.

15. 证明任何矩阵都可通过相似变换化为若尔当(Jordan)标准型的直和, 若尔当标准型是

$$R_{a,b} = \begin{cases} \lambda, & \text{当 } a = b \\ 0 \text{ 或 } 1, & \text{当 } a + 1 = b \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证 我们已经知道, 对久期方程解得的每一个本征值, 至少可以找到一个本征矢量与它相对应, 但当有重本征值出现时, 不一定能找到与重数相同个数的线性无关的本征矢量. 若 R 矩阵存在 m 个线性无关的本征矢量, 把它们作为列矩阵排列起来, 就得到能把 R 矩阵对角化的相似变换矩阵. 现在我们需要研究的是当久期方程存在重根, 又找不到与重数相同个数的线性无关的本征矢量的情况. 下面分三步来证明. 第一步证明, 任何矩阵 R 都可通过相似变换化为上三角矩阵, 矩阵的对角元就是本征值, 而且相同的本征值排在一起, 第二步证明, 可进一步通过相似变换, 把 R 矩阵化为方块矩阵, 其中每一个子矩阵都只与一个确定的本征值相联系. 换言之, 如果一个非对角元, 它所在的行和列的对角元(本征值)不相同, 则可通过相似变换把它化为零. 第三步证明, 每一个与确定本征值相联系的子矩阵可通过相似变换化为若尔当标准型. 因此任何矩阵都可通过相似变换化成若干个若尔当型矩阵的直和.

第一步, 用数学归纳法来证明. 对一维矩阵, 此性质显然满足. 现在假设此性质对任意 $n \leq m-1$ 维矩阵都成立, 要证此性质对 m 维矩阵 R 也成立. 设 R 矩阵有 d 个不同的本征值 λ_j , 重数分别为 n_j ,