

# 结 构 力 学

上 册

刘玉彬 白秉三等 编

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书包括上、下两册。上册(第1章至第8章)主要内容包括绪论,结构的几何组成分析,静定梁和静定刚架,三铰拱、曲杆和悬索结构,静定桁架和组合结构,静定结构的影响线,虚功原理和结构的位移计算,力法;下册(第9章至第16章)主要内容包括位移法,渐进法和超静定结构的影响线,矩阵位移法,结构的极限荷载,结构的弹性稳定,结构的动力计算、单自由度体系的振动,多自由度体系和无限自由度体系的振动,结构自振频率和振型的近似计算。

本书可供高等院校工科类本科生及研究生阅读。

### 图书在版编目(CIP)数据

---

结构力学(上、下册)/刘玉彬,白秉三等编. —北京:科学出版社,2004  
ISBN 7-03-013575-X

I. 结... II. ①刘... ②白... III. 结构力学 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 061321 号

---

责任编辑:童安齐 / 责任校对:刘艳妮  
责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方上林工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2004年7月第一版 开本:B5(720×1000)

2007年1月第二次印刷 印张:46 1/4

印数:4 001—6 000 字数:902 000

定价:59.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

# 前 言

本教材是根据原国家教育委员会 1995 年批准修正的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)所规定的基本内容,结合教育部 1998 年颁布的普通高等学校本科专业目录中土木工程专业的业务培养目标、业务培养要求,参考现行的结构力学教材,根据一般普通院校人才培养目标,由大连民族学院、沈阳工业大学联合编写。本书可作为土木工程专业本科生的教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考。

结构力学是土木工程专业的一门重要的专业基础课,本书分上、下两册出版。上册包括绪论、结构的几何组成分析、静定结构的内力分析及位移计算、静定结构的影响线、超静定结构的力法计算等内容。下册包括超静定结构的位移法及渐近法计算、超静定结构的影响线、矩阵位移法、结构稳定计算、结构的极限荷载、结构动分析等内容。其中在节号上冠有\*号的内容可供选学,不同专业可根据专业的需要酌情取舍。每章均有思考题,以活跃思维、启发思考,加深对基本概念的认识;精选的习题对掌握基本的运算技能具有重要作用。

本教材的编写反映了参编院校多年积累的教学经验,特别是结合新专业目录中对宽口径的土建类人才培养要求方面注意了吸取其他各兄弟院校教材的优点,加强了基本概念及理论知识的阐述,力图保持结构力学基本理论的系统性、内容的先进性,并恰当地掌握内容的深度和广度,贯彻理论联系实际、由浅入深、注意培养学生的解题能力及方便教学等原则。根据目前计算机的普及应用,特别是计算机在结构分析中的应用,在选定编写内容时与矩阵位移法紧密结合,编入了刚架静力分析的源程序,使学生初步具有编写和使用结构计算程序的能力,以为后续课程的学习奠定基础。

参加本书编写的有:刘玉彬(第 1、2、3、4 章),白秉三(第 10、11、12、13 章),陈长征(第 7、8 章),罗跃纲(第 14、15 章),栗青(第 5 章),宁宝宽(第 9 章),谭素杰(第 6 章),赵天雁(第 16 章)。

在编写过程中吸取了目前流行的结构力学教材中适合一般普通院校特点的内容,在此对这些教材的作者表示衷心的感谢。由于水平有限,书中可能存在一些错误或不妥之处,请读者批评指正。

# 目 录

前言

上 册

|                         |    |
|-------------------------|----|
| 第 1 章 绪论                | 1  |
| 1.1 结构力学的研究对象、基本任务和学习方法 | 1  |
| 1.2 结构的计算简图             | 3  |
| 1.3 杆件结构的分类             | 10 |
| 1.4 荷载的分类               | 14 |
| 思考题                     | 15 |
| 第 2 章 结构的几何组成分析         | 16 |
| 2.1 几何组成分析的基本概念         | 16 |
| 2.2 几何不变体系的组成规则         | 21 |
| 2.3 瞬变体系                | 24 |
| 2.4 几何组成分析举例            | 25 |
| 2.5 结构的几何组成和静定性的关系      | 31 |
| 思考题                     | 31 |
| 习题                      | 32 |
| 第 3 章 静定梁和静定刚架          | 36 |
| 3.1 单跨静定梁的计算            | 36 |
| 3.2 多跨静定梁的计算            | 45 |
| 3.3 静定平面刚架的计算           | 48 |
| 3.4* 静定空间刚架的计算          | 58 |
| 思考题                     | 59 |
| 习题                      | 60 |
| 第 4 章 三铰拱、曲杆和悬索结构       | 65 |
| 4.1 三铰拱的内力计算            | 65 |
| 4.2 曲杆的内力计算             | 77 |
| 4.3 悬索结构的计算             | 80 |
| 思考题                     | 87 |
| 习题                      | 88 |

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| <b>第 5 章 静定桁架和组合结构</b> .....         | 91  |
| 5.1 桁架的特点和组成分类 .....                 | 91  |
| 5.2 平面桁架的解法 .....                    | 93  |
| 5.3 平面桁架外形与受力特点 .....                | 105 |
| 5.4 静定组合结构的计算 .....                  | 108 |
| 5.5* 静定空间桁架 .....                    | 111 |
| 5.6* 零载法判别复杂体系的几何组成 .....            | 117 |
| 5.7 静定结构特性 .....                     | 120 |
| 思考题 .....                            | 123 |
| 习题 .....                             | 123 |
| <b>第 6 章 静定结构的影响线</b> .....          | 130 |
| 6.1 影响线的概念 .....                     | 130 |
| 6.2 静力法作静定梁的影响线 .....                | 132 |
| 6.3 结点荷载作用下梁的影响线 .....               | 140 |
| 6.4 静力法作静定桁架的影响线 .....               | 143 |
| 6.5 机动法作静定梁的影响线 .....                | 149 |
| 6.6 影响线的应用 .....                     | 155 |
| 6.7* 公路、铁路的标准荷载制及换算荷载 .....          | 166 |
| 6.8 简支梁的包络图和绝对最大弯矩 .....             | 169 |
| 思考题 .....                            | 173 |
| 习题 .....                             | 174 |
| <b>第 7 章 虚功原理和结构的位移计算</b> .....      | 179 |
| 7.1 位移计算概述 .....                     | 179 |
| 7.2 实功与虚功 .....                      | 180 |
| 7.3 广义力与广义位移 .....                   | 183 |
| 7.4 虚功原理 .....                       | 184 |
| 7.5 单位荷载法计算位移和位移计算的一般公式 .....        | 192 |
| 7.6 静定结构在荷载作用下的位移计算 .....            | 193 |
| 7.7 图乘法 .....                        | 201 |
| 7.8 静定结构由于初应变、温度改变和支座移动引起的位移计算 ..... | 214 |
| 7.9* 具有弹性支座的静定结构的位移计算 .....          | 219 |
| 7.10 线性变形体系的互等定理 .....               | 223 |
| 7.11* 空间刚架的位移计算公式 .....              | 225 |
| 思考题 .....                            | 226 |
| 习题 .....                             | 229 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 第 8 章 力法                 | 236 |
| 8.1 超静定结构的概念和超静定次数的确定    | 236 |
| 8.2 力法基本原理与力法典型方程        | 239 |
| 8.3 荷载作用下各类超静定结构的力法计算    | 245 |
| 8.4 对称结构的计算              | 257 |
| 8.5 超静定拱的计算              | 268 |
| 8.6 温度改变和支座移动时超静定结构的内力计算 | 276 |
| 8.7 超静定结构的位移计算           | 283 |
| 8.8 超静定结构最后内力图的校核        | 286 |
| 8.9* 交叉梁系和超静定空间刚架        | 289 |
| 思考题                      | 295 |
| 习题                       | 297 |
| 习题部分答案                   | 306 |

## 下 册

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 第 9 章 位移法               | 317 |
| 9.1 位移法的基本概念            | 317 |
| 9.2 等截面直杆的形常数和载常数       | 320 |
| 9.3 位移法的基本未知量和基本体系      | 327 |
| 9.4 位移法的典型方程            | 332 |
| 9.5 位移法计算连续梁和无侧移刚架      | 335 |
| 9.6 位移法计算有侧移刚架和排架       | 341 |
| 9.7 对称性的利用              | 350 |
| 9.8* 支座位移、弹性支承和温度变化时的计算 | 358 |
| 9.9 直接利用平衡条件建立位移法方程     | 365 |
| 思考题                     | 368 |
| 习题                      | 369 |
| 第 10 章 渐进法和超静定结构的影响线    | 377 |
| 10.1 概述                 | 377 |
| 10.2 力矩分配法的概念           | 377 |
| 10.3 力矩分配法的基本运算         | 382 |
| 10.4 力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架   | 387 |
| 10.5 力矩分配法与位移法的联合应用     | 399 |
| 10.6 无剪力分配法             | 402 |

|               |                       |            |
|---------------|-----------------------|------------|
| 10.7*         | 超静定结构的工程近似计算方法        | 412        |
| 10.8          | 超静定结构的影响线             | 417        |
| 10.9          | 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图     | 424        |
|               | 思考题                   | 428        |
|               | 习题                    | 428        |
| <b>第 11 章</b> | <b>矩阵位移法</b>          | <b>436</b> |
| 11.1          | 概述                    | 436        |
| 11.2          | 局部坐标中的单元刚度矩阵          | 438        |
| 11.3          | 整体坐标中的单元刚度矩阵          | 443        |
| 11.4          | 单元集成法和连续梁的整体刚度矩阵      | 447        |
| 11.5          | 刚架的整体元刚度矩阵            | 455        |
| 11.6          | 等效结点荷载                | 460        |
| 11.7          | 平面刚架的计算步骤和示例          | 464        |
| 11.8          | 忽略轴向变形时刚架的整体分析        | 470        |
| 11.9          | 桁架和组合结构的整体分析          | 476        |
| 11.10*        | 平面刚架静力分析程序            | 486        |
|               | 思考题                   | 509        |
|               | 习题                    | 510        |
| <b>第 12 章</b> | <b>结构的极限荷载</b>        | <b>513</b> |
| 12.1          | 概述                    | 513        |
| 12.2          | 极限弯矩和塑性铰、破坏机构、静定梁的计算  | 514        |
| 12.3          | 超静定梁的极限荷载             | 518        |
| 12.4          | 比例加载时判定极限荷载的几个定理和基本方法 | 525        |
| 12.5          | 刚架的极限荷载               | 530        |
| 12.6*         | 用矩阵位移法求刚架的极限荷载        | 533        |
|               | 思考题                   | 544        |
|               | 习题                    | 545        |
| <b>第 13 章</b> | <b>结构的弹性稳定</b>        | <b>547</b> |
| 13.1          | 概述                    | 547        |
| 13.2          | 用静力法确定临界荷载            | 550        |
| 13.3          | 具有弹性支座压杆的稳定           | 556        |
| 13.4          | 变截面压杆的稳定              | 561        |
| 13.5          | 用能量法确定临界荷载            | 564        |
| 13.6          | 剪力对临界荷载的影响            | 577        |
| 13.7          | 组合压杆的稳定               | 579        |

|               |                                      |            |
|---------------|--------------------------------------|------------|
| 13.8*         | 圆环及拱的稳定 .....                        | 583        |
| 13.9*         | 窄条梁的稳定 .....                         | 591        |
| 13.10*        | 弹性介质上压杆的稳定 .....                     | 594        |
| 13.11*        | 用矩阵位移法计算刚架的稳定 .....                  | 597        |
|               | 思考题.....                             | 606        |
|               | 习题.....                              | 607        |
| <b>第 14 章</b> | <b>结构的动力计算 单自由度体系的振动 .....</b>       | <b>613</b> |
| 14.1          | 概述.....                              | 613        |
| 14.2          | 单自由度体系的自由振动.....                     | 617        |
| 14.3          | 单自由度体系的无阻尼受迫振动.....                  | 628        |
| 14.4          | 单自由度系统的有阻尼受迫振动.....                  | 636        |
|               | 思考题.....                             | 640        |
|               | 习题.....                              | 641        |
| <b>第 15 章</b> | <b>多自由度体系和无限自由度体系的振动 .....</b>       | <b>645</b> |
| 15.1          | 两个自由度体系的自由振动.....                    | 645        |
| 15.2          | 两个自由度体系在简谐荷载下的受迫振动.....              | 656        |
| 15.3          | 多自由度体系的自由振动.....                     | 664        |
| 15.4          | 多自由度体系在任意动荷载作用下的受迫振动——振型分解法<br>..... | 674        |
| 15.5          | 无限自由度体系的自由振动.....                    | 680        |
|               | 思考题.....                             | 689        |
|               | 习题.....                              | 689        |
| <b>第 16 章</b> | <b>结构自振频率和振型的近似计算 .....</b>          | <b>692</b> |
| 16.1          | 能量法——瑞利法.....                        | 692        |
| 16.2          | 等效质量法.....                           | 695        |
| 16.3          | 集中质量法.....                           | 699        |
| 16.4          | 矩阵位移法.....                           | 701        |
| 16.5          | 瑞利-里茨法 .....                         | 705        |
|               | 思考题.....                             | 708        |
|               | 习题.....                              | 708        |
|               | 习题部分答案 .....                         | 712        |

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 结构力学的研究对象、基本任务和学习方法

在土木工程中,由建筑材料按照合理的构造方式组成并能承受、传递荷载而起骨架作用的部分称为工程结构,简称为结构。房屋中的梁柱体系,水工建筑物中的闸门和水坝,公路铁路上的桥梁和隧洞等,都是工程结构的典型例子。

结构是由若干相互联系的构件组成的整体。按其构件的几何性质可分为三类:

### (1) 杆件结构。

这类结构是由若干杆件按照一定的方式联结起来组合而成的体系,例如多高层房屋的钢筋混凝土框架或钢框架、大跨度钢桁架桥以及钢或钢筋混凝土电视塔架等(图 1.1)。杆件的几何特征是横截面尺寸要比长度小得多。

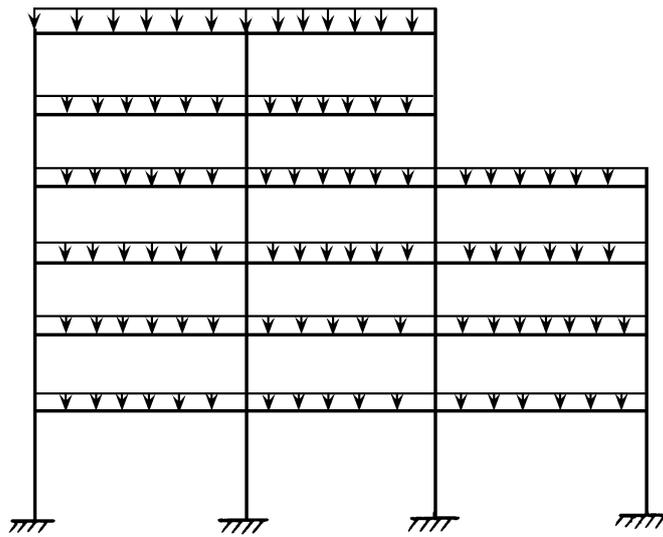


图 1.1 多高层框架结构简图

### (2) 板壳结构。

这类结构由薄壁构件组成,故也可称为薄壁结构。其几何特征是厚度要比长度和宽度小得多。形状呈平面状的为板,曲面状的则为壳,例如楼板、薄壳屋面等(图 1.2)。

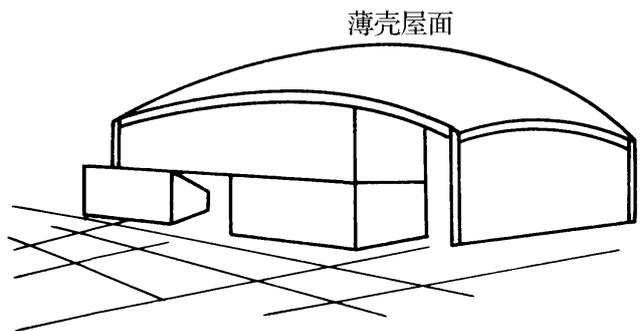


图 1.2 板壳结构

### (3) 实体结构。

这类结构的长、宽、厚三个尺度大

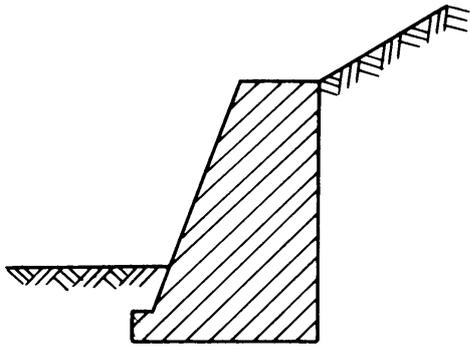


图 1.3 挡土墙

小相仿,例如水工结构的重力坝、块体基础以及挡土墙等(图 1.3)。

狭义的结构往往指的就是杆件结构,而通常所说的结构力学就是指杆件结构力学。因而结构力学的主要研究对象就是杆件结构。对于板壳结构(薄壁结构)和实体结构的受力分析将在弹塑性力学中进行研究。

结构力学的基本任务就是研究结构的组成规律和合理形式,研究结构在载荷和其他外界因素作用下的内力和变形,即结构的强度、刚度、稳定性以及动力反应的计算原理和计算方法。具体地说,包括以下几个方面:

- (1) 研究结构的组成规律、合理形式以及结构计算简图的合理选择。
- (2) 研究结构内力和变形的计算方法,以便进行结构强度和刚度的验算。
- (3) 研究结构的稳定性以及在动力荷载作用下的结构反应。

结构力学问题的研究手段包含理论分析、实验研究和数值计算三个方面。实验研究方法的内容在实验力学和结构检验课程中讨论,理论分析和数值计算方面的内容在结构力学课程中讨论。

在结构分析中,首先把实际结构简化成计算模型,称为结构计算简图,然后再对计算简图进行计算。结构力学的计算问题分为两类:一类为静定性的问题,只需根据下面三个基本条件的第一个条件——平衡条件,即可求解;另一类为超静定性的问题,必须满足以下三个基本条件,方能求解。三个基本条件是:

- (1) 力系的平衡条件或运动条件。

在一组力系的作用下,结构的整体及其中任何一部分都应满足力系的平衡条件。

- (2) 变形的几何连续条件。

连续的结构发生变形后,仍是连续的,材料没有重叠或缝隙;同时结构的变形和位移应满足支座和节点的约束条件。

- (3) 应力与变形间的物理条件(或称本构方程)。

把结构的应力和变形联系起来的物理性条件,即物理方程或本构方程。

以上三个基本条件,贯穿在本课程的全部计算方法中,只是满足的次序和方式不同而已。

结构力学与理论力学、材料力学、弹塑性力学有着密切的关系。结构力学的先修课程理论力学主要研究物体机械运动的基本规律和力学的一般原理;材料力学主要研究单个杆件的强度、刚度和稳定性。结构力学则以理论力学和材料力学的知识为基础,主要研究杆件结构的强度、刚度、稳定性和动力反应等问题,从而为钢筋混凝土结构、钢结构、组合结构等后续专业课程及以后结构设计提供一般的计算原

理与分析方法。结构力学的后续课程弹塑性力学主要分析研究实体结构和板壳结构。

学习时要注意结构力学与其他课程的联系。在学习结构力学的过程中,经常要运用高等数学、理论力学、材料力学等先修课程的知识,应当根据情况进行必要的复习,并在运用中得到巩固和提高。

学习时要注意理论联系实际。从解决工程实际问题的角度来看,结构力学的内容可分为三个部分:

- (1) 将实际结构简化为计算简图。
- (2) 研究各种计算简图的计算方法。
- (3) 将计算结果运用于实际结构的设计和施工。

显然,从分量来看,第二部分所占的比重最大。但从理论联系实际的角度来看,第一、三两部分则是重要环节,应予以充分重视。

学习时要注意分析方法与解题思路。在本课程中讲述了各种具体的计算方法,均是结构计算三个基本条件的具体体现,要注意各种方法在其计算过程中是怎样实现三个基本条件的要求的。学习时要着重掌握各种方法的解题思路,特别是要从这些具体的算法中学习分析问题的一般方法,例如:如何由已知领域逐步过渡到未知新领域的方法,如何将整体分解成局部再由局部综合成整体的方法,如何把有关几个问题加以对比的方法,等等。

学习时要注意多练。做题练习,是学习结构力学的重要环节。不做一定数量的习题,是很难掌握其中的概念、原理和方法的。但是做题也要避免各种盲目性:不看书,不复习,埋头做题,这是第一种;贪多求快,不求甚解,这是第二种;只会对答案,不会自己校核,这是第三种;错题不改正,不会从中吸取教训,这是第四种。

学好结构力学,掌握杆件结构的计算原理与方法,是学好工程结构课程的重要条件,同时也是作为一名结构工程师所必须具备的基础知识。因而在学习本门课程过程中,务必要充分重视和加倍努力,充分培养分析能力、计算能力、自学能力和表达能力,以顽强的毅力克服学习中可能遇到的各种困难,一定要学好它,也一定能学好它。

## 1.2 结构的计算简图

实际结构是很复杂的,完全按照结构的实际情况进行力学分析是不可能的,也是不必要的。因此,对实际结构进行力学分析时,总是需要做出一些简化和假设,略去某些次要因素,保留其主要的受力特征,把实际结构抽象和简化为既能反映实际受力情况又便于计算的图形。这种简化的图形就是计算时用来代替实际结构的力学模型,一般称为结构计算简图,或结构计算模型。

结构计算简图是对结构进行力学分析的依据,同时结构计算简图的力学分析

结果又是实际结构杆件截面设计的依据。如果结构计算简图不能准确地反映结构的实际受力情况或选择错误,就会使计算结果产生很大的误差,甚至造成工程事故。所以对结构计算简图的选择,必须持慎重的态度。

结构计算简图的选择应遵循下列两条原则:

(1) 结构计算简图应能正确地反映实际结构的主要受力情况和变形性能,使计算结果接近实际情况。

(2) 保留主要因素,略去次要因素,使结构计算简图便于计算。

应当指出,结构计算简图的选择在上述原则指导下,要根据当时当地的具体要求和条件来选用,并不是一成不变的。对于同一结构,根据不同的情况可以取不同的计算简图。例如在结构初步设计阶段,可以采用较为粗略但比较简单的计算简图;而在技术设计阶段则应采用较为复杂但比较精确的计算简图。在进行动力计算或稳定性计算时,由于计算比较复杂,可以采用较为粗略但比较简单的计算简图;在进行静力计算时,则应采用较为复杂但比较精确的计算简图。此外,由于使用的计算工具不同,所选取的计算简图也可不同。例如,手算时计算简图应力求简单,而用计算机计算时可采用较为精确的计算简图。

合理的结构计算简图,既要恰当地反映实际结构的受力情况,又要使计算简化。在选取计算简图时,对实际结构可从下列几个方面进行简化:

(1) 结构体系的简化。

严格地说,一般结构实际上都是空间结构,各部分相互连接成为一个空间整体,以承受各个方向可能出现的荷载。但在多数情况下,常可以忽略一些次要的空间约束而将实际结构分解为平面结构,使计算得以简化。本书主要讨论平面结构的计算问题。当然也有一些结构具有明显的空间特征而不宜简化成平面结构,本书也将涉及这方面的内容。

(2) 杆件的简化。

杆件的截面尺寸(宽度、厚度)通常比杆件长度小得多,截面变形符合平截面假设,截面上的应力可根据截面的内力(弯矩、剪力、轴力)来确定,截面上的变形也可根据轴线上的应变分量来确定。因此,在结构计算简图中,杆件用其纵轴线表示。如梁、柱等构件的纵轴线为直线,就用相应的直线表示;又如曲杆、拱等构件的纵轴线为曲线,则用相应的曲线表示。对由单个杆件联结起来的结构,杆件之间的连接区用结点表示,杆长用结点间的距离表示,而荷载的作用点也转移到纵轴线上。但当截面尺寸增大时(例如超过杆长的 $1/4$ ),杆件用其轴线表示的简化,将引起较大的误差。

(3) 杆件间连接的简化。

结构中杆件与杆件之间的相互连接处,简化为结点。钢结构、混凝土结构及组合结构中杆件与杆件之间相互连接的构造方式虽然很多,但其结点通常简化为以下两种理想情形:

1) 铰结点。被连接的杆件在连接处不能相对移动,但可相对转动,即在连接处可以承受和传递力,但不能承受和传递力矩。这种理想情况,实际结构中是很难遇到的,只是近似简化而已。理想铰结点可用一个小圆圈表示。如图 1.4 所示梯形钢桁架的结点,是通过结点板把各杆件焊接在一起的,实际上各杆端是不能相对转动的,但在桁架中各杆主要是承受轴力,因此计算时仍可将这种结点简化为铰结点。

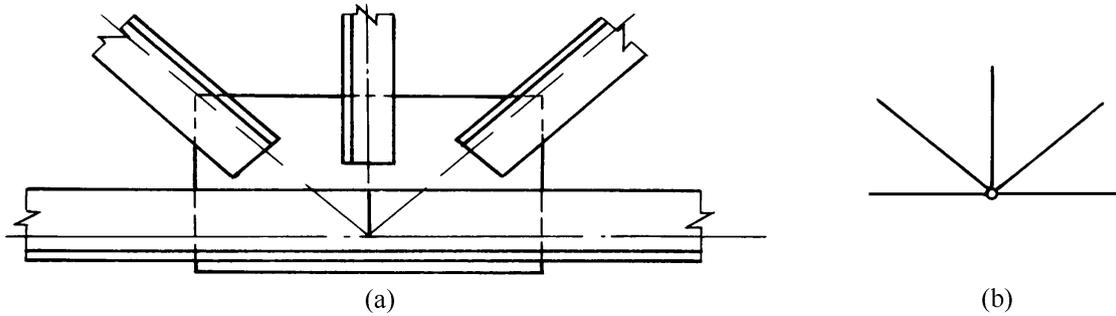


图 1.4 钢桁架结点——铰结点  
(a) 钢桁架结点做法;(b) 铰结点计算图

2) 刚结点。被连接的杆件在连接处不能相对移动,也不能相对转动,即在连接处不但能承受和传递力,而且能承受和传递力矩。图 1.5 所示是一钢筋混凝土框架边柱和梁的结点,由于梁和柱之间的钢筋布置以及混凝土将它们浇筑成整体,使梁和柱不能产生相对移动和转动,计算时简化为一刚结点。

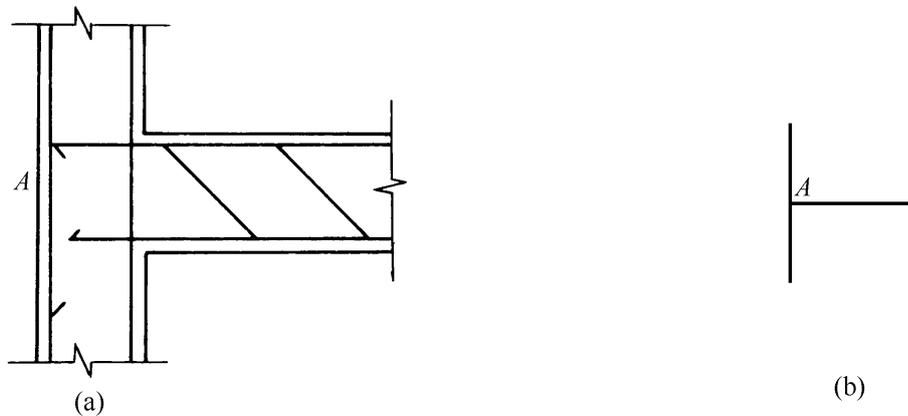


图 1.5 钢筋混凝土梁柱结点——刚结点  
(a) 钢筋混凝土梁柱结点做法;(b) 刚结点计算图

#### (4) 支座的简化。

结构与基础或支承部分相连接的装置称为支座。支座的作用是把结构固定于基础或支承结构上,限制了结构沿某一个或几个方向的运动,同时结构所受的荷载通过支座传到基础或支承结构上。支座对结构的反作用力称为支座反力。平面结构的支座,一般简化为下面四种形式:

1) 可动铰支座。桥梁结构中常用的辊轴支座和摇轴支座均属可动铰支座。这种支座的特点是:它既容许结构在支承处绕圆柱铰  $A$  转动,又容许结构沿支承面

方向转动,但  $A$  点不能沿垂直于支承面的方向移动。当不考虑摩擦力时,这种支座的反力  $R_A$  将通过铰  $A$  的中心并与支承平面垂直,即反力的作用点和方向都是确定的,只有它的大小是一个未知量。根据活动铰支座的位移和受力特点,在计算简图中可以用一根垂直于支承面的链杆  $AB$  来表示,如图 1.6 所示。此时结构可绕铰  $A$  转动;链杆又可绕  $B$  转动,当转动很微小时, $A$  点的移动方向可看成是平行于支承面的。

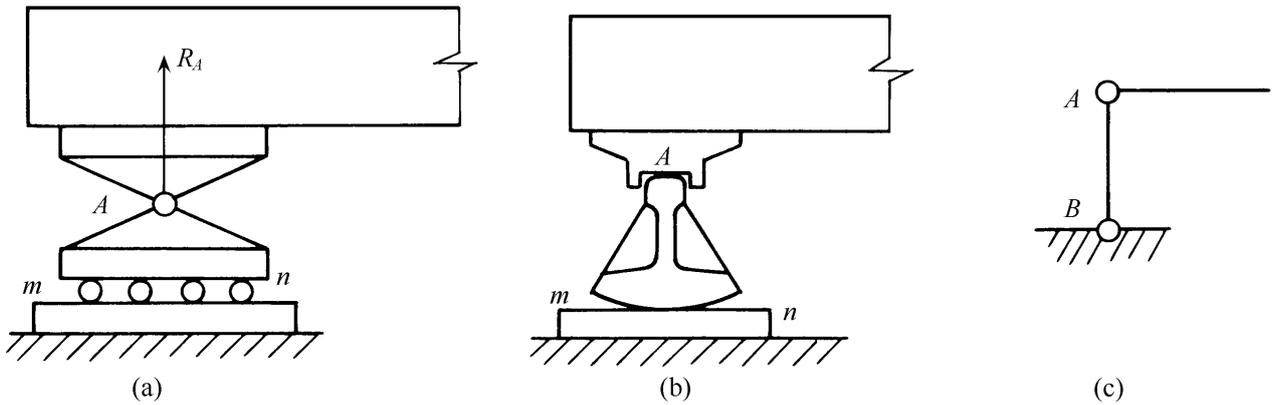


图 1.6 可动铰支座

(a) 辊轴支座;(b) 摇轴支座;(c) 可动铰支座计算简图

2) 固定铰支座。被支承的部分可以转动,不能移动,能提供两个反力  $X_A$ 、 $Y_A$ 。这种支座的构造如图 1.7(a)、(b)所示,常简称为铰支座,它容许结构在支承处绕圆柱铰  $A$  转动,但  $A$  点不能做水平和竖向移动。支座反力  $R_A$  将通过铰  $A$  中心,但大小和方向都是未知的,通常可用沿两个确定方向的分反力,如水平反力  $X_A$  和竖向反力  $Y_A$  来表示。这种支座的计算简图可用交于  $A$  点的两根支承链杆来表示,如图 1.7(c)或(d)所示。

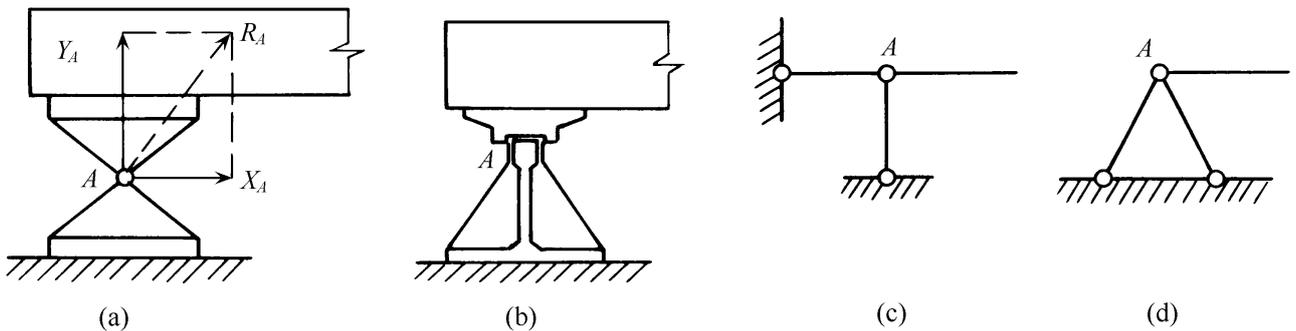


图 1.7 固定铰支座

(a)、(b)固定铰构造;(c)、(d)固定铰支座计算简图

3) 固定支座。被支承的部分完全被固定,即这种支座不容许结构在支承处发生任何形式的移动和转动,如图 1.8 所示。它的反力大小、方向和作用点位置都是未知的,通常用水平反力  $X_A$ 、竖向反力  $Y_A$  和反力偶  $M_A$  来表示,计算简图如图 1.8 (b)所示。

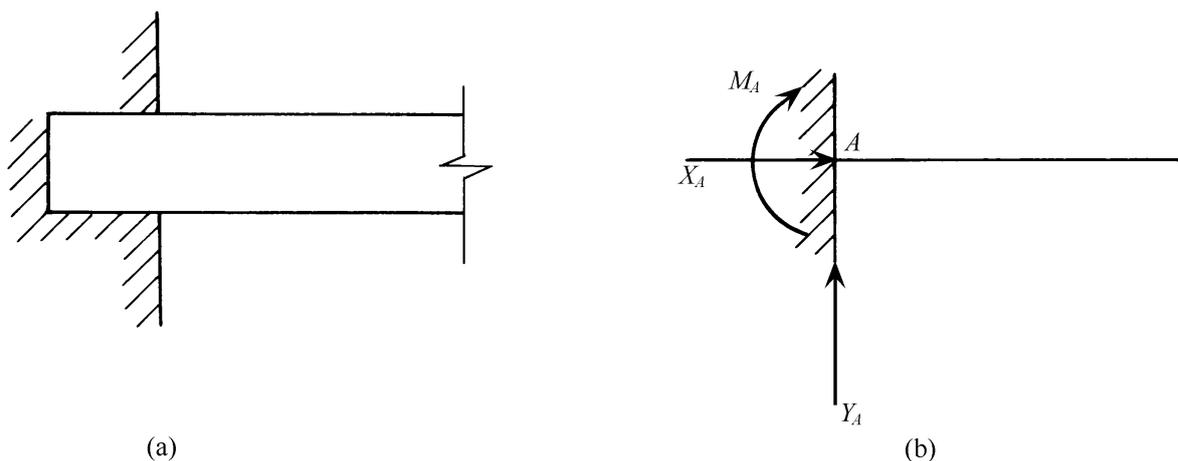


图 1.8 固定支座

(a) 固定支座构造; (b) 固定支座计算简图

4) 定向支座。被支承的部分不能转动,也不能沿垂直于支承面的方向移动,但可沿支承面方向滑动,其反力为一个垂直于支承面的力  $Y_A$  和一个反力矩  $M_A$ ,在计算简图中用两根垂直于支承面的平行链杆表示,如图 1.9 所示。

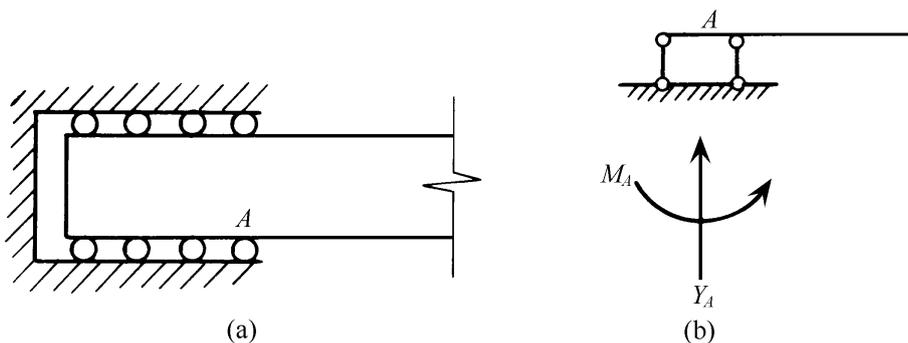


图 1.9 定向支座

(a) 定向支座构造; (b) 定向支座计算简图

#### (5) 材料性质的简化。

在土木、水利工程中结构所用的建筑材料通常为钢、混凝土、砖、石、木料等。在结构分析计算中,为了简化,对于组成各构件的材料一般都假设为连续的、均匀的、各向同性的、完全弹性或弹塑性的。

上述假设对于金属材料在一定受力范围内是符合实际情况的。对于混凝土、钢筋混凝土、砖、石等材料则带有一定程度的近似性。至于木材,因其顺纹与横纹方向的物理性质不同,故应用这些假设时应予注意。

#### (6) 荷载的简化。

实际结构构件受到的荷载,一般是作用在构件内各处的体荷载或称体积力以及作用在某一面积上的面荷载或称表面力两大类。体积力指的是结构的重力或惯性力等;表面力则是由其他物体通过接触面而传给结构的作用力,如风压力、土压力、车辆的轮压力等。在杆件结构中把杆件简化为轴线,因此不管是体积力还是表

面力都可以简化为作用在杆件轴线上的力。在计算简图中,都需要把它们简化为作用在构件纵轴线上的分布荷载、集中荷载或力偶。

下面给出两个选取结构计算简图的例子。

**【例 1.1】** 图 1.10(a)是房屋建筑的楼面中经常见到的梁板结构。一单跨梁两端支承在砖墙上,梁上放预制板以支持楼面荷载(人群、设备重量等)。试选取梁的计算简图。

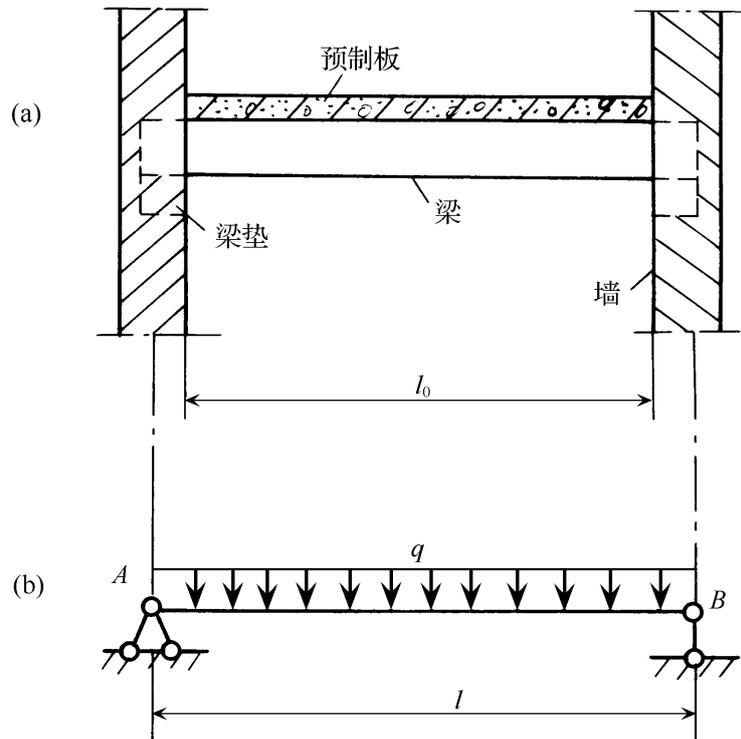


图 1.10 房屋建筑的楼面梁板结构

(a) 实际结构;(b) 计算简图

**【解】**

(1) 结构体系的简化。

略去预制板对梁所起的约束作用。并将预制板传给梁的荷载和梁垫反力简化到梁轴所在竖向平面内,以梁的纵轴线代表实际的梁如图 1.10(b)所示。

(2) 梁的跨度。

梁与梁垫间接触面上的压力分布是很复杂的,当接触面的长度不大时,可取梁两端与梁垫接触面中心的间距作为梁的计算跨度  $l$ ,如图 1.10(b)所示。为了简化计算,有时也取  $l = 1.05 l_0$  作为计算跨度,其中  $l_0$  为梁的净跨度。

(3) 支座的简化。

由于梁端嵌入墙内的实际长度比较短,加之梁与梁垫之间是用水泥砂浆联结的,坚实性较差,所以在受力后有产生微小松动的可能,不能起到固定支座的约束作用。另外,考虑到梁作为整体虽然不能有水平移动,但又存在着由于梁的变形而引起梁端部有微小伸缩的可能性。所以,通常把梁的一端简化为固定铰支座,另一

端则简化为可动铰支座,这种形式的梁称为简支梁。

(4) 荷载的简化。

梁的自重可简化为沿梁纵轴分布的均布荷载。人群等楼面荷载一般按均布考虑,将它与预制板、抹面等的重量合并在一起,折算成沿梁轴分布的均布荷载。

经过以上简化,即可得到如图 1.10(b)所示的计算简图。

【例 1.2】 图 1.11(a)所示一钢筋混凝土厂房结构,屋架和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内,然后用细石混凝土填实。屋架与柱的连结是通过将屋架端部和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。屋架在横向平面内与柱组成排架[图 1.11(b)],各个排架之间,在屋架上有屋面板连接,在柱的牛腿上有吊车梁连接,试选取计算简图。

【解】

(1) 结构体系的简化。

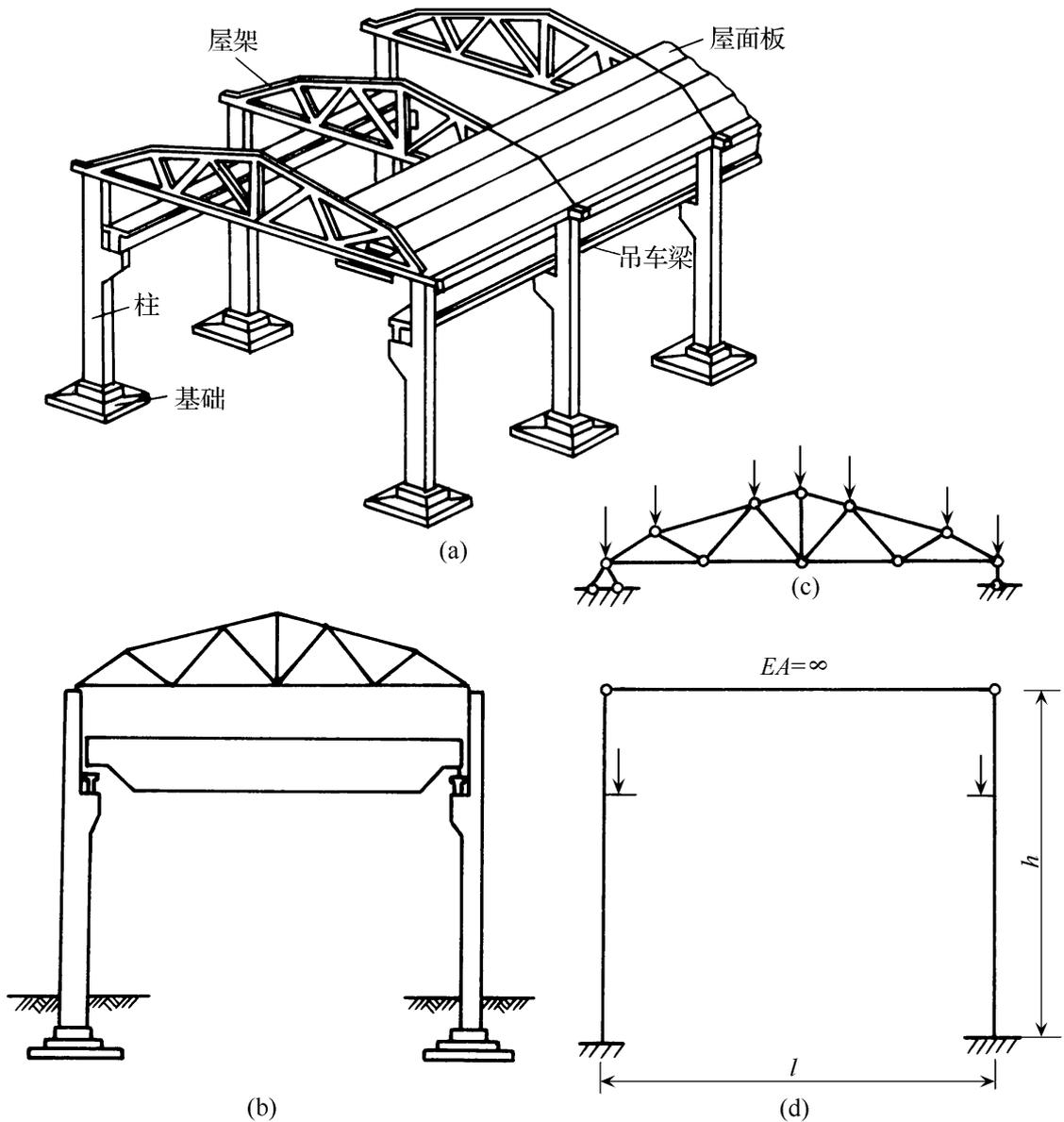


图 1.11 钢筋混凝土厂房结构

(a) 厂房结构; (b) 横向平面排架; (c) 竖向荷载下屋架计算简图; (d) 竖向荷载下排架计算简图

从整体上看该厂房是一个空间结构。但从其荷载传递情况来看,屋面荷载和吊车轮压等都主要通过屋面板和吊车梁等构件传递到一个个的横向排架上,故在选择计算简图时,可以略去排架之间纵向联系的作用,而把这样的空间结构简化为一系列的平面排架来分析,如图 1.11(b)所示。

### (2) 屋架的计算简图。

由于屋架承受的荷载是结点荷载,其内力主要是轴力,各杆一般来说比较细长,抗弯刚度较小,由变形引起的弯曲应力不大,故各结点可当作铰结点。屋架端部与柱顶的连接是在吊装就位后焊接在一起的,因此屋架端部与柱顶不能发生相对线位移,但仍有可能发生微小的转动。这时,可把柱与屋架的联结看作铰结点,在竖向荷载作用下,可将屋架单独取出来进行计算,其两端支座分别为固定铰支座和可动铰支座,计算简图见图 1.11(c)所示的铰结桁架。

### (3) 排架柱的计算简图。

由于上下两柱段的截面大小不同,因此上下柱应分别用一条通过各自截面形心的连线来表示。排架的计算跨度  $l$  可取下柱两轴线之间的距离。柱高  $h$  为基础面到屋架下弦之间的距离。柱子与基础的联结应视为固定支座。由于屋架的刚度很大,相应变形很小,因此认为两柱顶之间的距离在受荷载前后没有变化,即可用  $EA = \infty$  的链杆来代替该屋架。经过上述简化后,可得图 1.11(d)所示的计算简图,这种类型的计算简图称为排架。

上面所举的两个例子,都是可以分解为平面结构的空間结构。但是应当注意,并不是所有的空间结构都是可以分解为平面结构来计算的。例如在大会议厅和体育场馆建筑中采用较多的屋顶空间网架结构、输电线路上的铁塔、电视塔、起重机电塔架等各种结构,它们或者根本不是由平面结构组成的;或者虽是由平面结构组成,但它们的工作状况主要是空间性质的,故对这样的一类结构,必须按空间结构的特点进行计算。

如何选取合适的结构计算简图,是结构设计中十分重要而又复杂的问题。不仅要掌握选取的原则,而且要有丰富的结构设计经验。要对结构构造、施工等各方面有全面的了解,对结构各部分受力情况能正确地作出判断。所以,除学习本课程外,还有待于今后学习专业课和在工程实践中提高这方面的能力才能逐步解决这个问题。不过,对于常用的结构形式,已积累了许多宝贵的经验,我们可以采用其合理性已经过实践检验的那些常用的比较成熟的计算简图。还应指出,在选取一个新型结构的计算简图时,必须通过实现来验证。而绝不容许单凭自己的主观臆断轻易作出决定。否则,若与结构的实际工作情况不符,将会导致严重的后果。

## 1.3 杆件结构的分类

结构力学所研究的是经过简化以后的结构计算简图。因此,所谓杆件结构的分

类,实际就是结构计算简图的分类。

常用的杆件结构按照其组成和受力特点,可分为以下几类:

(1) 梁。

梁是一种受弯构件,其轴线通常为直线,水平梁在竖向荷载作用下无水平支座反力,内力有弯矩和剪力。梁有单跨梁(图 1.12)和多跨梁(图 1.13)。

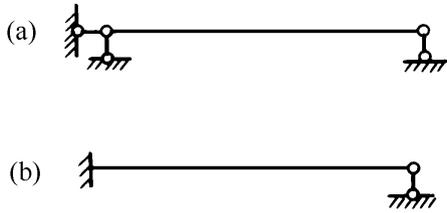


图 1.12 单跨梁

(a) 静定梁;(b) 超静定梁

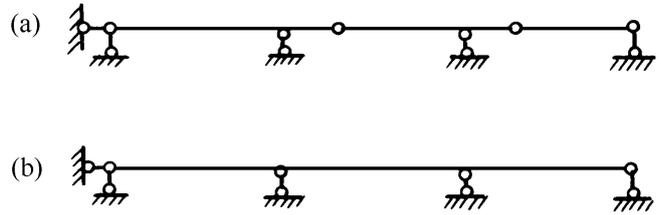


图 1.13 多跨梁

(a) 静定多跨梁;(b) 连续梁

(2) 拱。

拱的轴线通常为曲线,它在竖向荷载作用下,支座不仅产生竖向反力,而且还产生水平反力。这种水平反力将使拱内弯矩远小于跨度、荷载及支承情况相同的梁的弯矩。拱有三铰拱、两铰拱及无铰拱(图 1.14)。

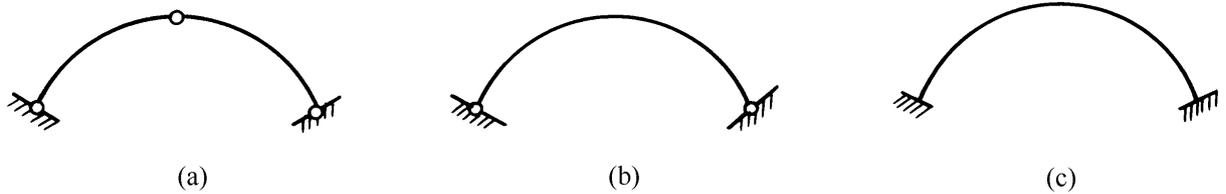


图 1.14 拱

(a) 三铰拱;(b) 两铰拱;(c) 无铰拱

(3) 刚架。

刚架是由梁和柱等直杆全部或部分由刚结点组成的结构。当结构发生变形时,相交于刚结点的各杆端之间的夹角始终保持不变;杆件内力一般有弯矩、剪力和轴力,其中弯矩为主要内力(图 1.15)。

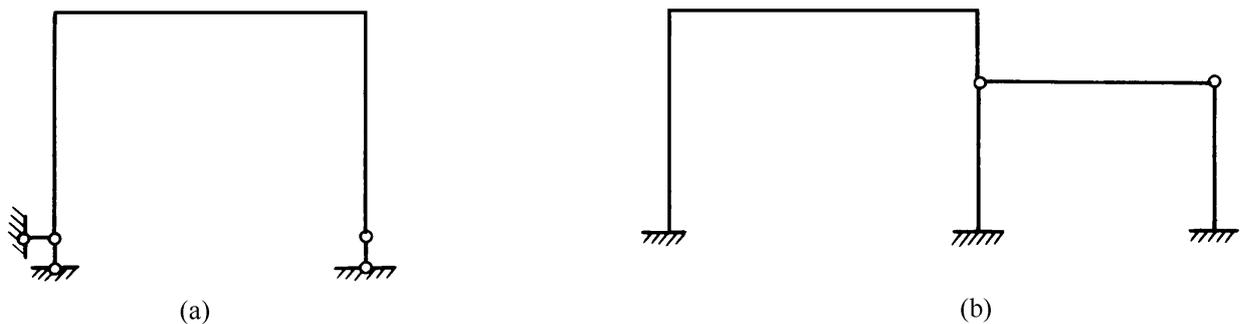


图 1.15 刚架

(a) 静定刚架;(b) 超静定刚架

#### (4) 桁架。

桁架是由若干杆件在两端用理想铰联结而成的结构。各杆的轴线一般都是直线,当荷载作用于结点时,各杆只受轴力(图 1.16)。

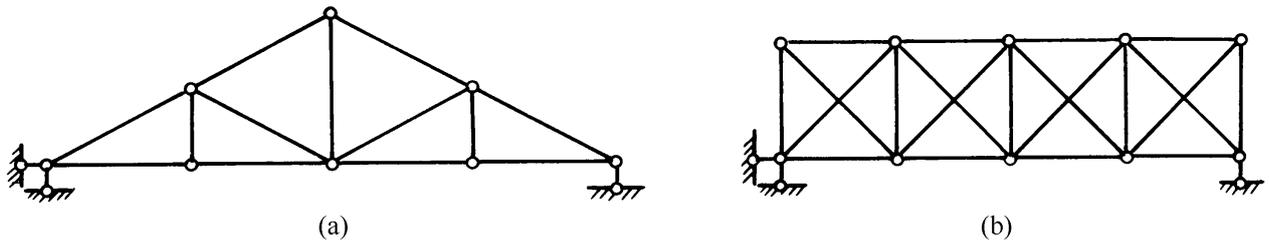


图 1.16 桁架

(a) 静定桁架;(b) 超静定桁架

#### (5) 混合结构。

混合结构是部分由桁架中的链杆,部分由梁或刚架组合而成的结构,其中含有混合结点。因此,有些杆件只承受轴力,而另一些杆件还同时承受弯矩和剪力(图 1.17)。

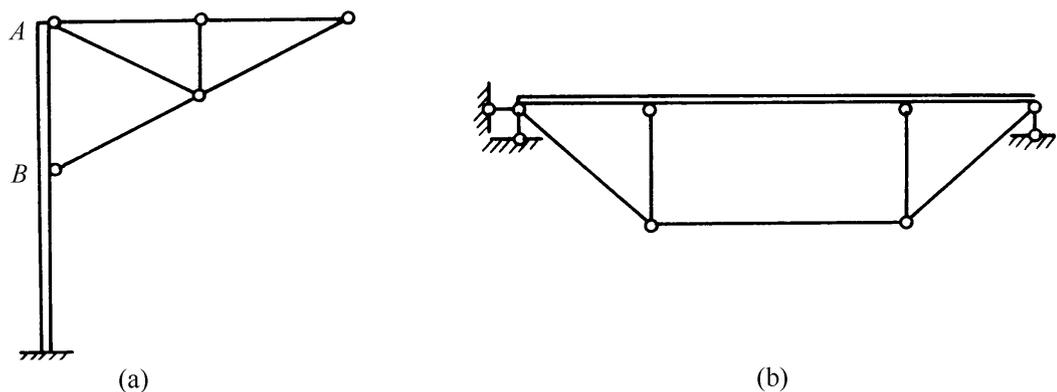


图 1.17 混合结构

(a) 静定混合结构;(b) 超静定混合结构

#### (6) 悬吊结构。

悬吊结构的特点是由受拉性能强的柔性缆索作为主要受力构件。通常用于桥梁工程和房屋屋盖结构中(图 1.18)。

按照所用计算方法的特点,结构又可分为静定结构和超静定结构两大类。

##### (1) 静定结构。

若一结构在承受任何荷载时,用静力平衡条件可以确定全部支座反力和任一截面上的内力,且其值是确定的,则此结构称为静定结构,如图1.12~ 图 1.17 中的(a)图。

##### (2) 超静定结构。

若一结构的所有支座反力和内力不能仅由静力平衡条件来确定,还必须考虑变形的几何条件才能求得,则此结构称为超静定结构,如图1.12~ 图 1.17 中的(b)图。

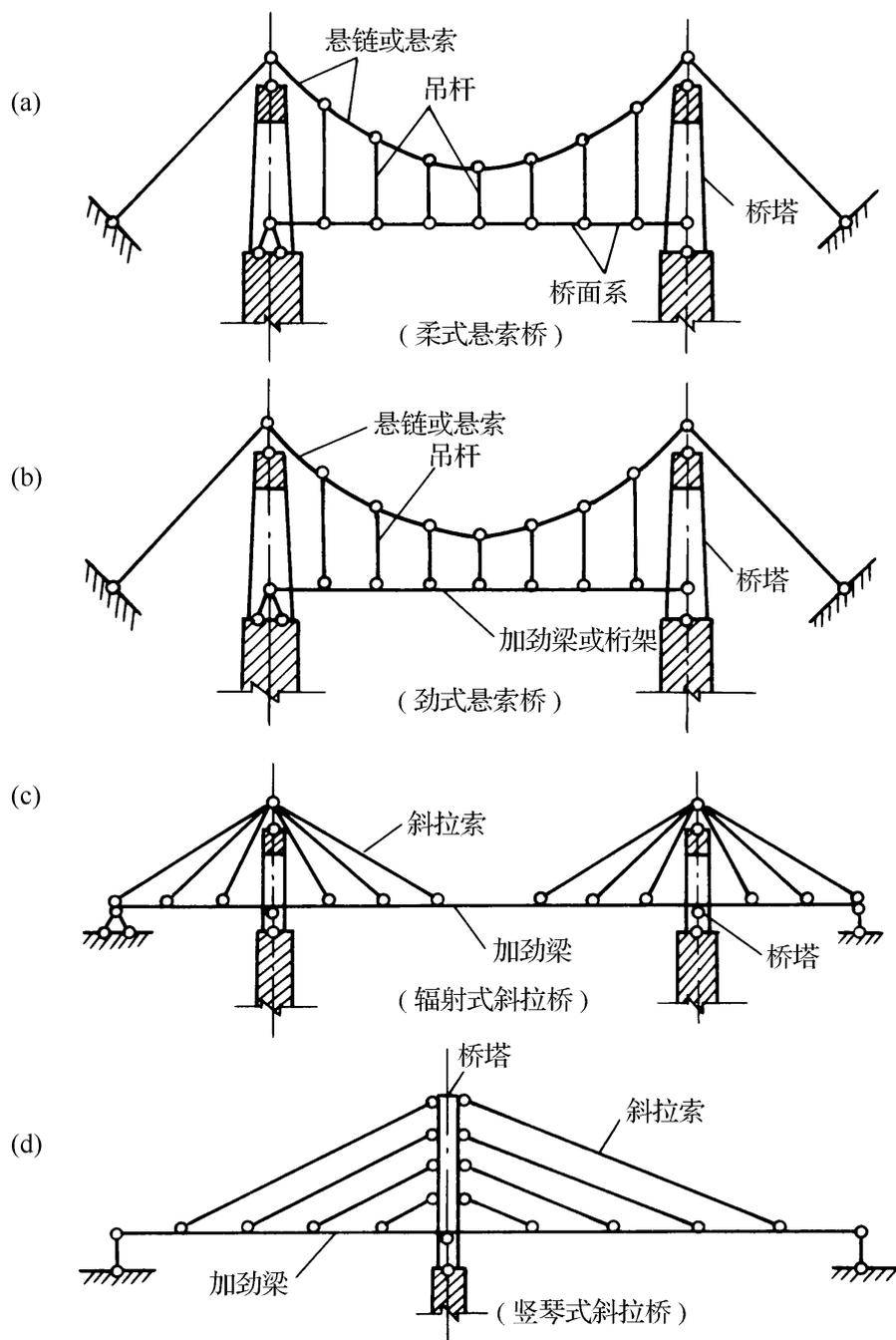


图 1.18 柔式悬索桥简图

根据杆件和荷载在空间的位置,结构可分为平面结构和空间结构。

(1) 平面结构。

各杆件的轴线和荷载都在同一平面内,称为平面结构。前面所示均为平面结构,是本书讨论的重点。

(2) 空间结构。

各杆件的轴线和荷载不在同一平面,或各杆件轴线在同一平面内,但荷载不在该平面内时,称为空间结构。图 1.19(a)为一空间刚架,各杆的轴线不在同一平面内;图 1.19(b)各杆轴线虽在同一平面内,但荷载不在该平面内,亦为空间结构。

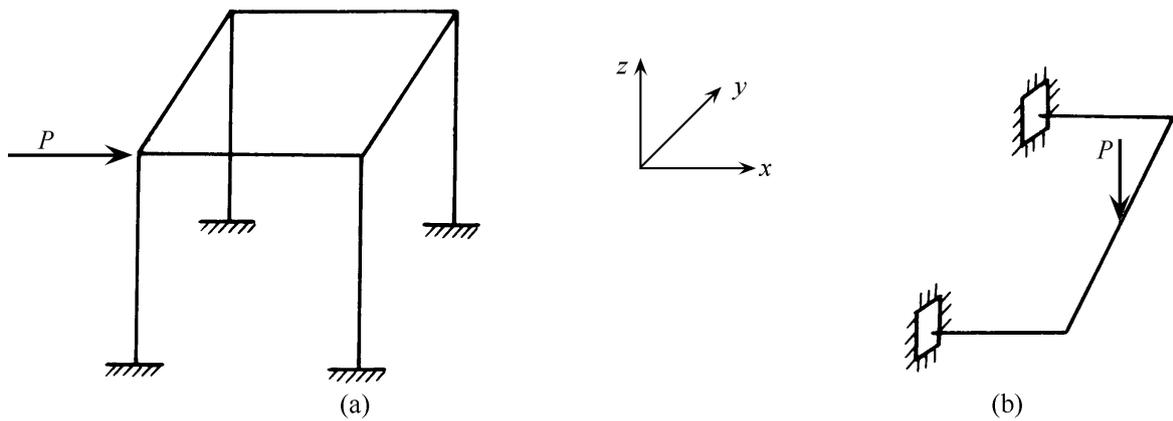


图 1.19 空间结构  
(a) 空间刚架; (b) 平面刚架受非平面内荷载

## 1.4 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力。例如结构的自重(重力)、水压力、风压力、雪压力、人群重量、工业厂房结构上的吊车荷载以及行驶在桥梁上的车辆荷载等等。此外,还有其他因素可以使有些结构产生内力和变形,如温度变化、基础沉降、材料收缩等。从广义上说,这些因素也可称为荷载。

确定结构所受的荷载,是进行结构受力分析的前提,必须慎重对待。如果将荷载估计过大,则设计的结构尺寸将偏大,造成浪费;如果将荷载估计得过小,则设计的结构不够安全。

荷载根据其作用时间的久暂和作用性质,可作以下分类。

(1) 根据荷载分布的情况,可分为:

1) 集中荷载。作用在结构上的荷载,一般总是分布在一定面积上。若分布面积远小于结构的尺寸时,则可认为此荷载是作用在结构的一点上,称为集中荷载。例如,吊车梁上的吊车轮压,可看作是吊车梁上的集中荷载。

2) 分布荷载。是指连续分布在结构上的荷载。连续分布在结构内部各点上的力称为体分布荷载,如结构自重及惯性力等;连续分布在结构表面上的力称为面分布荷载;当分布荷载在结构上为均匀分布时,则称为均布荷载。

(2) 根据荷载作用的性质,可分为:

1) 静力荷载。静力荷载是逐渐增加的荷载,其大小、方向和位置不随时间变化或变化极为缓慢,不会使结构产生显著的振动,因而可略去惯性力的影响。结构的恒载都是静力荷载。只考虑位置改变,不考虑动力效应的移动荷载,也是静力荷载。

2) 动力荷载。动力荷载是随时间迅速变化的荷载,使结构产生显著的振动,因而惯性力的影响不能忽略。如机械运转时产生的荷载,地震时由于地面运动对结构的动力作用以及爆炸引起的冲击波等。

(3) 根据荷载作用时间的久暂,可分为:

1) 恒载。永久作用在结构上的不变荷载,如结构的自重,固定于结构上的设备重量等。

2) 活载。暂时作用在结构上的可变荷载,如楼面上的人群重量、吊车荷载、列车荷载,以及风荷载和雪荷载等。

(4) 根据荷载作用位置的变化,活载可分为:

1) 可动荷载。能作用于结构上的任意位置的荷载,如人群以及风、雪荷载等。

2) 移动荷载。一系列互相平行且间距保持不变,能在结构上移动的荷载,如列车荷载和吊车荷载等。

荷载的确定常常比较复杂,通常按有关的荷载规范确定,在荷载规范未包含的某些特殊情况下,技术人员必须深入现场,结合实际情况进行调查研究,才能合理确定荷载。

## 思 考 题

1.1 什么是结构的计算简图?它与实际结构有什么关系与区别?为什么要将实际结构简化为计算简图?

1.2 平面杆件结构的结点通常简化为哪两种情形?它们的构造、限制结构运动和受力的特征各是什么?

1.3 平面杆件结构的支座常简化为哪几种情形?它们的构造、限制结构运动和受力的特征各是什么?

1.4 常用的杆件结构有哪几类?

## 第 2 章 结构的几何组成分析

### 2.1 几何组成分析的基本概念

#### 2.1.1 几何不变体系和几何可变体系

杆系结构是由若干杆件相互连接而成的体系,当它与地基连接成一整体时,就可以用来承受荷载。在体系受到任意荷载作用后,材料产生应变,因而体系发生变形。但是,这种变形一般是很小的。如果不考虑这种微小的变形,而体系能维持其几何形状和位置不变,则这样的体系称为几何不变体系。如图 2.1(a)所示的体系就是一个几何不变体系,因为在所示荷载作用下,在不考虑材料应变的条件下,只要不发生破坏,它的形状和位置是不会改变的。一个结构要能承受荷载和传递荷载,它的几何构造应当是合理的,即为几何不变体系。

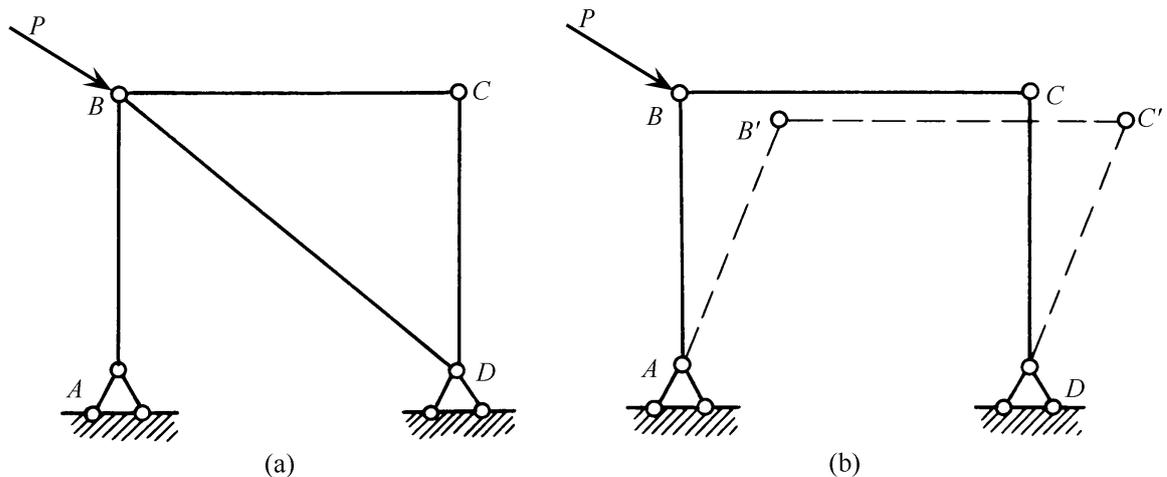


图 2.1 几何不变与几何可变体系

(a) 几何不变体系;(b) 几何可变体系

对于图 2.1(b)所示的铰接四边形体系,即使不考虑材料的应变,在很小的荷载作用下也会引起体系几何形状和位置的改变,这样的体系称为几何可变体系。显然,几何可变体系不能用于土木工程结构中。

对一个结构进行设计和选定计算简图时,首先要分析它是不是几何不变体系,这一工作称为结构的几何组成分析。其目的在于:判别某一体系是否几何不变,从而决定它能否作为结构;研究几何不变体系的组成规则,以保证所设计的结构能承受荷载而维持平衡。此外,在结构计算时,还可根据体系的几何组成,确定结构是静定的还是超静定的,以便选择相应的计算方法。

### 2.1.2 刚片和自由度

在结构的几何组成分析中,由于不考虑杆件本身的变形,一个几何不变的体系可以视为一个刚片,刚片是指在平面内可看作刚体的物体,它的几何形状和尺寸是不变的。我们可以将一根梁、一根链杆或在体系中已肯定为几何不变的某个部分都看作是一个刚片,如图 2.1(a)中的三角形  $BCD$ ,我们可以将此三角形视为一个刚片。支承结构的地基也可以看作是一个刚片,这样处理会给我们的分析带来极大的方便。

体系的自由度,是指该体系运动时可以独立改变的几何参变数的数目,即用来确定该体系位置所需要的独立坐标数目。一个动点在平面内的位置,可用在选定的坐标系中的两个坐标  $x$  和  $y$  来确定。当  $x$  和  $y$  改变为新值  $x'$  和  $y'$  时,动点原来的位置  $A$  则变为  $A'$ ,如图 2.2(a)所示。所以,平面内一点有两个独立运动的方式或独立的参变数,其自由度为 2。

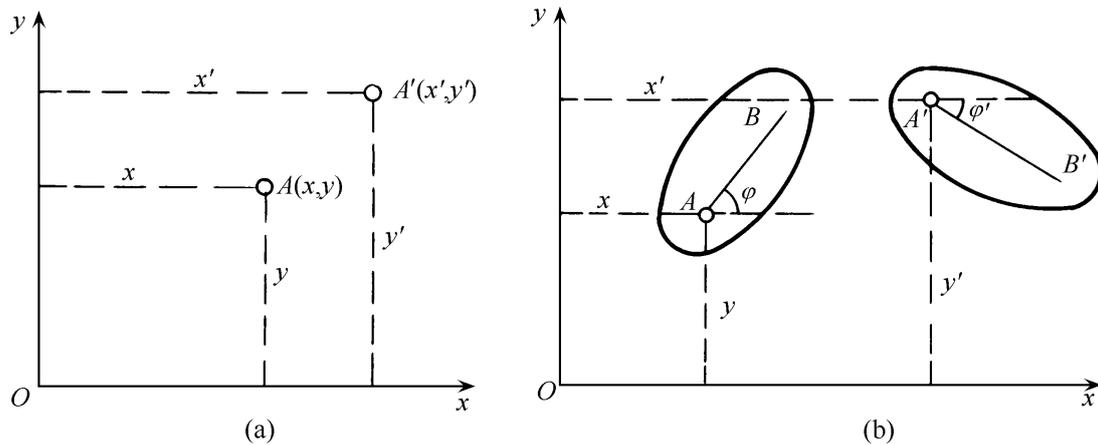


图 2.2 点和刚片在平面内的运动  
(a) 点的运动; (b) 刚片的运动

一个刚片在平面内自由运动时,其位置需用三个独立的参变数来确定,即刚片内任一点  $A$  的两个坐标  $x$ 、 $y$  和通过  $A$  点的任一直线  $AB$  的倾角  $\varphi$  来确定,如图 2.2(b)所示,当改变  $x$ 、 $y$ 、 $\varphi$  时,刚片就有确定的新位置,故一个刚片的自由度为 3。因此,一个体系的自由度,就等于这个体系运动时可以独立改变的坐标数目。

### 2.1.3 约束

约束(或称联系)是指限制物体或体系运动的各种装置。它可分为外部约束和内部约束两种:外部约束是指体系与基础之间的联系,也就是支座;而内部约束则是指体系内部各杆之间或结点之间的联系,如铰结点、刚结点和链杆等。物体或体系的自由度,将会因加入约束而减少。刚片之间的各种连接装置和各种支座都是约束装置,不同的装置对自由度的影响是不同的。

### (1) 链杆的作用。

如图 2.3(a)所示,用一根链杆  $AC$  将一个刚片与基础相联系(即固定坐标  $y$ ),则刚片不能沿  $y$  轴运动,但此刚片还剩下两个运动独立的几何参数( $x$  和  $\varphi$ ),可以沿  $x$  轴移动和绕  $A$  点转动,刚片的自由度由 3 减为 2,因此一根链杆相当于一个约束,可使体系减少一个自由度。又如图 2.3(b)所示的两个刚片 I 和 II 用一根链杆  $BC$  联结,未用链杆  $BC$  联结以前,这两个刚片在平面内总自由度数为 6,但用链杆  $BC$  联结以后,对刚片 I 而言,其位置需用刚片上  $A$  点的坐标  $x$ 、 $y$  和  $AB$  连线的倾角  $\varphi$  来确定,因此,它有 3 个自由度。但对刚片 II 而言,因与刚片 I 已用链杆  $BC$  联结,故它只能沿以  $B$  为圆心、 $BC$  为半径的圆弧运动和绕  $C$  点的转动,再用两个独立参变数  $\alpha$  和  $\beta$  即可确定它的位置,所以减少了一个自由度。故两个刚片用一根链杆联结后的自由度总数为 5。即由  $x$ 、 $y$ 、 $\varphi$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  5 个独立的坐标就可以确定两个刚片的位置。由此可见,一根链杆可抵消一个自由度,其作用相当于一个约束(或联系)。

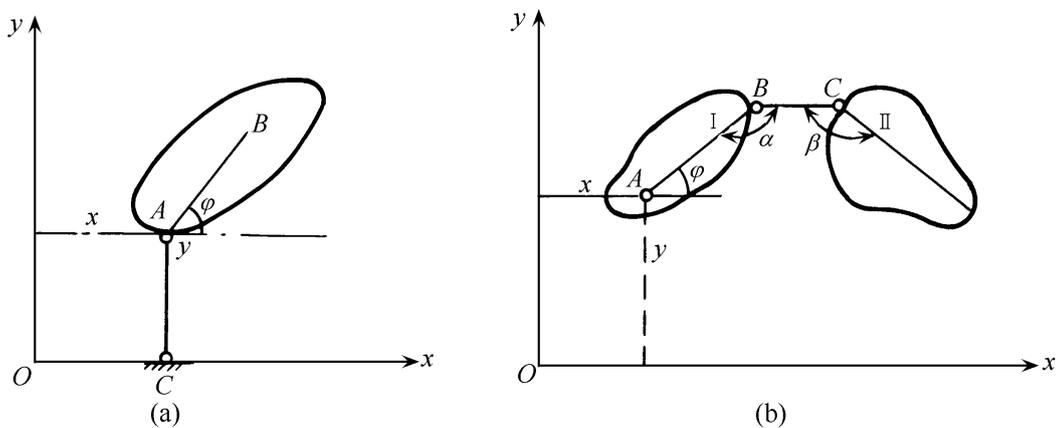


图 2.3 链杆的作用

(a) 一刚片与基础连接;(b) 二刚片相互连接

### (2) 铰的作用。

图 2.4(a)所示一刚片,由链杆 1、2 组成的固定铰与基础相连后,刚片由自由状态时的 3 个自由度,转变为只有一个绕  $A$  点转动的自由度  $\varphi$ 。

用一个铰  $B$  把两个刚片 I、II 连接起来[图 2.4(b)],这种连接两个刚片的铰称为单铰。未用单铰连接前,两个刚片共有 6 个自由度。在用铰  $B$  联结以后,刚片 I 仍有 3 个自由度,而刚片 II 则只能绕铰  $B$  做相对转动,即再用一个独立的参变数(夹角  $\alpha$ )即可确定它的位置,所以减少了 2 个自由度,体系只有 4 个自由度。由此可见,固定铰支座和单铰限制了两个自由度,相当于两个约束,可使体系减少 2 个自由度。

通常一个固定铰支座或一个单铰可以用两根链杆来等效替换,即两根链杆可以等效为一个固定铰支座或一个单铰,如图 2.4(b)与图 2.4(c)等效。

图 2.4(d)表示三个刚片 I、II、III 用一个铰  $A$  相连,我们将这种连接两个以上刚片的铰称为复铰。未连接前,体系有 9 个自由度。用  $A$  铰连接后,刚片 I 仍有 3

个自由度,而刚片 II、III 则只能绕铰 A 做相对转动,即再用两个独立的参变数(夹角  $\alpha$  和  $\beta$ )即可确定它们的位置,所以减少了 4 个自由度,体系只有 5 个自由度。由此可见连接三个刚片的复铰相当于两个单铰的作用。一般来说,连接  $n$  个刚片的复铰相当于  $(n-1)$  个单铰。

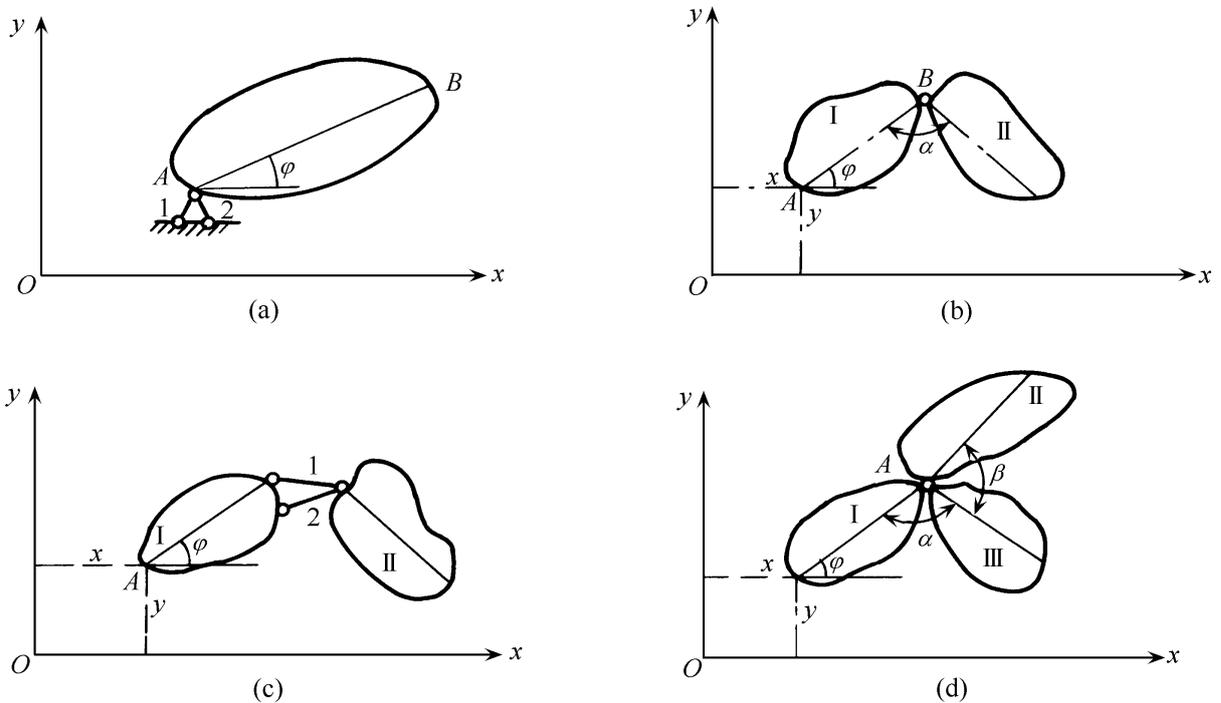


图 2.4 铰的作用

(a) 固定铰; (b) 单铰; (c) 单铰的替换形式; (d) 复铰

### (3) 刚结点的作用。

图 2.5 所示为两个刚片 AB 和 BC 在 B 点联结为一个整体,结点 B 称为刚结点。原来两个刚片独立时在平面内有 6 个自由度,刚性联结成整体后,只有 3 个自由度,所以一个刚结点相当于 3 个约束(或联系)。

### 2.1.4 虚铰(瞬铰)

虚铰(也称为瞬铰)是一类特殊的约束。如图 2.6(a)所示,刚片 I 用两根链杆  $ab$  和  $cd$  与基础相联结,两杆延长线交于  $O$  点,我们将此交点称为虚铰。现对刚片 I 的运动特性加以分析,由于链杆的约束作用, $a$  点的微小位移应与链杆  $ab$  垂直; $c$  点的微小位移应与链杆  $cd$  垂直,显然刚片 I 可以发生以  $O$  为中心的微小转动。 $O$  点也可称为瞬时转动中心。这时刚片 I 的瞬时运动情况与它在  $O$  点用铰与基础相联结时的运动情况完全相同。只不过这

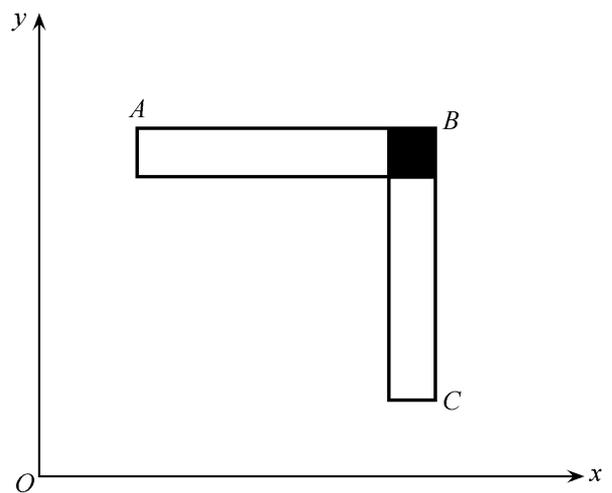


图 2.5 刚结点

个瞬心的位置随着刚片做微小转动而改变(有时也把这种随链杆转动而改变位置的铰称为瞬铰)。图 2.6(b)是虚铰的另一种形式。很显然,虚铰的作用相当于一个单铰,只不过虚铰的位置随链杆的转动而改变。

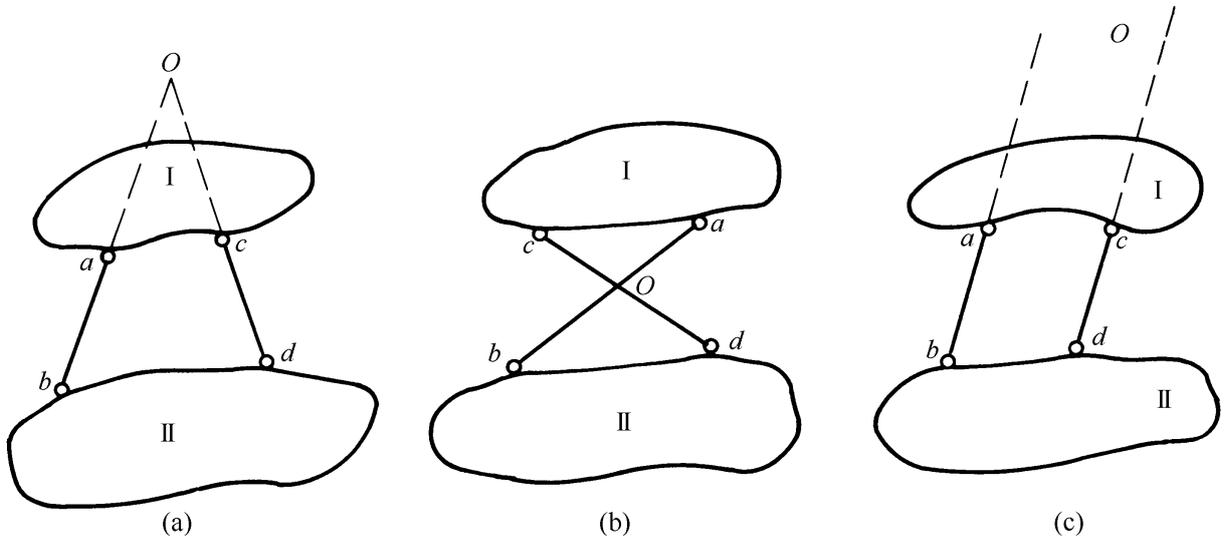


图 2.6 虚铰

(a) 两链杆延长线组成的虚铰; (b) 两链杆相交组成的虚铰; (c) 无穷远的虚铰

当刚片 I 用两根相互平行的链杆与基础相连时[图 2.6(c)],这时这两根链杆的作用也相当于一个铰,一个无穷远处的“铰”,刚片 I 沿无穷大半径做相对运动,我们把两平行链杆延长线的无穷远处称为无穷远的虚铰。

### 2.1.5 体系的自由度计算公式

由以上分析知道,一个体系可由若干个刚片通过增加约束而组成,该体系自由度  $W$  的计算可定义为

$$W = \text{各部件的自由度总和} - \text{全部约束数}$$

设  $m$  表示体系中的刚片数(基础不计入),  $n$  为单铰数, 支座链杆数为  $r$  (注意固定铰相当于两根链杆, 固定端支座或刚性连接相当于三根链杆), 则各部件的自由度总和为  $3m$ , 全部约束数为  $2n + r$ , 由此得到体系自由度的计算公式为

$$W = 3m - (2n + r) \quad (2.1)$$

当体系完全由具有铰结的链杆组成时, 设  $J$  为结点个数,  $b$  为链杆数,  $r$  为支座链杆约束数, 则体系的自由度数目为

$$W = 2J - (b + r) \quad (2.2)$$

式(2.1)及式(2.2)都可以用来计算体系的自由度, 用以判别体系是否具有几何不变的可能性。

当  $W > 0$  体系的约束数量不足, 不能限制刚片的所有运动方式, 体系为几何可变。

当  $W = 0$  体系的约束总数等于各部件自由度总和, 体系满足几何不变所必

需的最小约束数目。

当  $W < 0$  体系约束总数大于各部件的自由度总和,体系有多余约束。

【例 2.1】 求图 2.7 所示体系的自由度  $W$ 。

【解】

按式(2.1)计算,体系由  $ACEF$ 、 $BD$ 、 $DE$  及  $DF$  四个刚片组成。复铰  $D$  相当于两个单铰, $F$  处为一个单铰,各单铰数见各结点处括号内数字, $A$  处为固定支座,相当于三根链杆,故刚片数  $m = 4$ ,单铰数  $n = 4$ ,链杆数  $r = 6$ 。

由  $W = 3m - (2n + r) = 3 \times 4 - (2 \times 4 + 6) = -2 < 0$ ,故体系有 2 个多余约束。

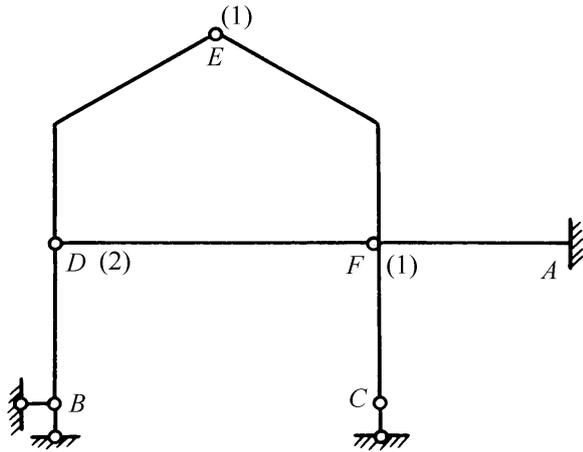


图 2.7 例 2.1 图

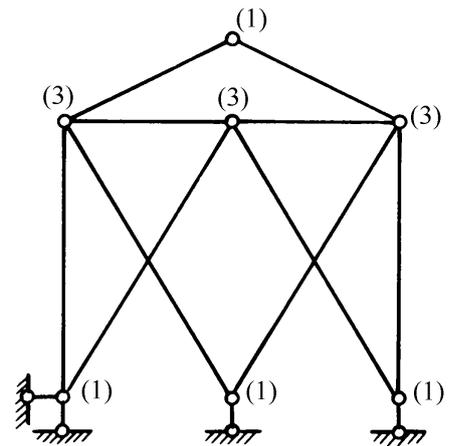


图 2.8 例 2.2 图

【例 2.2】 求图 2.8 所示体系的自由度  $W$ 。

【解】

按式(2.1)计算,刚片数  $m = 10$ ,单铰数  $n = 13$ (见图各结点括号内数字),链杆数  $r = 4$ ,则

$$W = 3m - (2n + r) = 3 \times 10 - (2 \times 13 + 4) = 0$$

如用式(2.2)计算,结点数  $J = 7$ ,链杆数  $b = 10$ 。支座链杆数  $r = 4$ ,则

$$W = 2J - (b + r) = 2 \times 7 - (10 + 4) = 0$$

可见两种方法计算结果一致,但式(2.2)计算较简便。

## 2.2 几何不变体系的组成规则

本节将研究几何不变无多余约束平面体系的一些简单组成规律。根据三角形稳定性,若把三根链杆  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  用三个不共线的铰两两相连(如图 2.9 所示),组成的铰接三角形是一个没有多余约束的几何不变体系,这就是基本三角形几何不变的性质。从

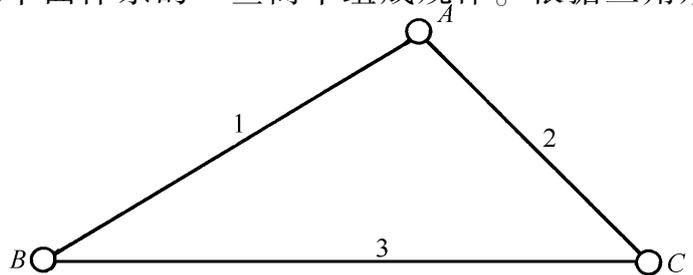


图 2.9 基本三角形

这个基本性质出发,可以找出有关体系几何组成的基本规律,并用以作为判别体系是否几何不变的准则。

### 2.2.1 点和刚片的组成规则

在刚片 I 上用两根链杆连接一新的结点 A (图 2.10 所示),我们将这种由两根不在同一直线上的链杆连接一个新结点的构造,称为二元体。根据三角形几何不变的性质,显然这是一个几何不变体系。由此可以得到下述规则:

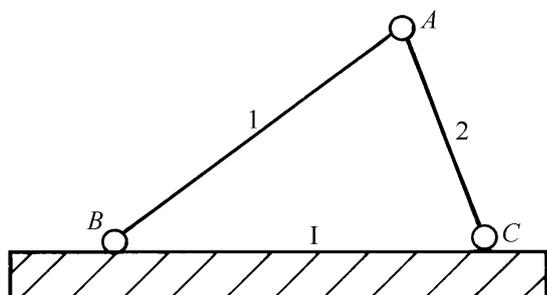


图 2.10 二元体规则

规则 1 一个刚片与一个点用两根链杆相连,且两链杆不在同一直线上,则组成没有多余约束的几何不变体系。

显然,原刚片通过加上二元体后形成的体系仍是几何不变的。因此,在一个已知体系上依次增加二元体,不会改变原体系的几何不变性或可变性。同理,在一个已知体系上依次撤除二元体,也不会改变原体系的几何不变性或可变性。

二元体的形式有多种,图 2.11 所示为一些二元体的形式。

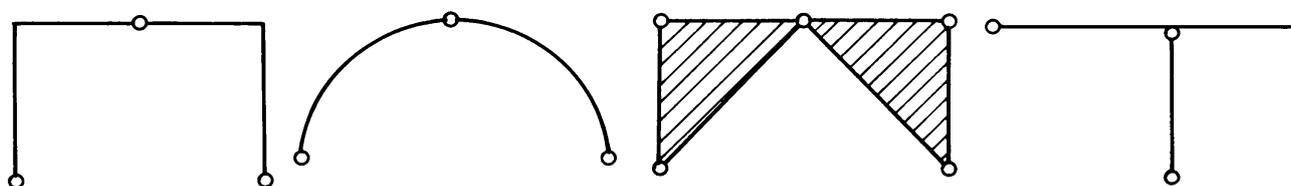


图 2.11 各种二元体形式

如工程上常见的静定桁架,如图 2.12 所示,就是由基本三角形  $ACF$  依次增加二元体得到结点  $D$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $E$ 、 $B$  组成的。

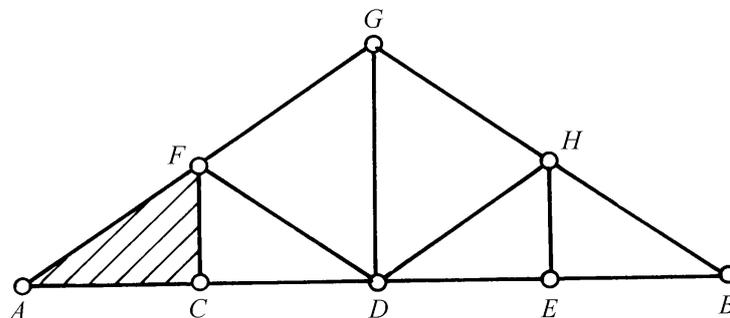


图 2.12 静定桁架的组成

在几何构造分析中,常利用二元体规则来对体系进行简化判断。如图 2.13 所示体系,可视为在地基这个刚片上依次增加二元体 9710,9810,758,745... 组合而成,体系为几何不变。依次拿掉二元体,最后得到基础,故整个体系是几何不变的。