21世纪高等院校教材

集　论　与　逻　辑

——面向计算机科学

沈恩绍 著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书由基础集论与经典(一阶)逻辑两部分内容组成,为高标准的计算机科学专业(本科)教材.

集论部分的范围与常规教材大体相似,区别在于相关内容的展开方式与深度.这里采用的“非标准”模式可称为“经典集论的公理化修正版”:强调公理化思想及构造性技巧;对“关系演算”及“归纳与递归”两个板块做了较深入的处理;计算机科学中有用的若干组合和图论中的原理与方法被有机地嵌入到集论的框架之中;以较直观的方式给出了集论世界的“全景图”,但不是完整地介绍公理集合论.

逻辑部分内容较同类教材丰富,包括通常在研究生课程中才介绍的完备性定理的证明、紧性定理及下降型的 L-S 定理这两个一阶逻辑的特征属性等.本书的一个特色是采用了 Tableaux 作为形式化的演绎推理平台,这种语法证明系统更直观简单、易学易用,而且其思想在计算机科学与人工智能中有广泛的应用.另一特色是更侧重于语义或模型论的观念与方法及其应用(如 model checking 的原始想法).

本书可供高等院校计算机专业(本科)、数理专业的师生以及立志于进一步读研的读者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

集论与逻辑:面向计算机科学/沈恩绍著.—北京:科学出版社,2003
(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-011047-1

Ⅰ.集… Ⅱ.沈… Ⅲ.①集论-高等学校-教材②数理逻辑-高等学校-教材 Ⅳ.O14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 101643 号

责任编辑:巴建芬 姚晖/责任校对:刘小梅
责任印制:刘秀平/封面设计:槐寿明

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 4 月第 一 版 开本:B5 (720×1000)
2003 年 4 月第一次印刷 印张:13 1/4
印数:1—5 000 字数:249 000

定价:18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

Yesterday's education does not meet the needs of tomorrow's world. The increasingly technical demands place on people by the Information Revolution makes it all the more important that people understand basic logical principle of reasoning.

摘自[美]符号逻辑协会关于逻辑教材的一份报告(2000)

Logic has permeated through computer science during the past thirty years much more than it has through mathematics during the past one hundred years. Indeed, at present concepts and methods of logic occupy a central place in computer science, insomuch that logic has been called "the calculus of computer science".…

The effectiveness of logic in computer science … spans a wide spectrum of areas, from artificial intelligence to software engineering. Over all, logic provides computer science with both a unifying foundamental framework and a powerful tool for modeling and reasoning about aspects of computation.

摘自"On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science"
美国科学促进会一个同名会议的总结报告(2001)

If science is the search for the fundamental principles that govern the world around us and explain the phenomena we see, the Theoretical Computer Science (TCS) is the "science" underlying the field of computing. The formal and mathematical nature of TCS is especially appropriate for a science of computing, given that computation is essentially a discrete logical process.

摘自 A report from Workshop on Challenges for TCS in 21st Century
by DIMACS, SIAM, SIGACT(2000)

序　　言

本书内容包括集合论与数理逻辑两部分．既面向计算机科学(computer science ,CS)的应用，同时也欲揭示相关理论的内在美．Practice and Beauty as well．由于对计算机 Paradigm 的广泛兴趣，希望本书不仅对计算机科学专业的学生，而且对强调数理基础训练的其他专业的读者，都能引起兴趣．但必须指出，由于本书缘自上海交通大学计算机系(本科)试点班的逻辑课程，可能只有那些自我要求较高且有一定数学成熟性 (mathematical maturity)的读者，才会有兴趣或耐心读完本书的大部分．当然，笔者也做了一点努力，希望能适应目标或要求不同的读者群，特别是自学者．

1960 年，E．P．Wigner (1963 年 Nobel 物理学奖得主)发表了一篇题为 “On the Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Science”的文章，以后被广泛引用．1999 年，美国科学促进会(Amer．Asso．for Advance．of Sci．)组织了一次会议，主题是 “On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science”．会后出了一篇同名的总结性文章，由当今计算机科学界相关领域的权威专家 J．Halpern，R．Harper，N．Immerman，P．Kolaitis，M．Vardi 与 V．Vianu 执笔[①]．现今，将逻辑在计算机科学中的地位与作用比喻为(当年)微积分(数学)在自然科学和工程技术中的地位与作用，已成共识．诚如 W．Thomas 在其一篇综述“Logic for Computer Science：The Engineering Challenge”中所言：

- Logic is a cornerstone of scientific methodology and thus belongs to the foundation of every scientific discipline．For computer science，logic plays a still more central role：

- Logic is a parent discipline of computer science；historically computer science emerged from problems and methods which were developed in mathematical logic．

- Logic is a basic constituent of the computer science curriculum；in fact，there is agreement that it is required in a stricter sense in computer science education than，for example，in mathematics．

- Logic has produced a large reservoir of methods and theories for computer science (which are often typical for this application area and no more to be counted to mathematical logic itself)．

---

① 参见：The Bulletin of Symbolic Logic，Vol．7，No．2(2001)．pp．213～236．

于是，国内外的高校都出现这么一个奇怪的现象：虽然数理逻辑是数学的一个分支，但数学系（非逻辑专业）的学生很少学逻辑（在国内更是如此）；而对计算机系的学生却成了必修课（只是程度上不同）．在名牌大学，逻辑课程有明显的加重趋势．国内已有不少高校将逻辑从离散数学课程中单独分离出来．关于集论课程，也有类似倾向，只是程度上弱一点罢了．

因此，目前的问题，不是“是否要教与学”，而是“如何教与学”；什么样的内容以什么方式展开及展开到什么深度，才能反映出计算机科学的快速发展对计算机专业基础课程所提出的要求；怎样为学生**今后**在竞争的环境中立于不败之地或发挥更大的潜力打好基础．本书反映了笔者对这一问题的看法与实践．逻辑（集论）在计算机科学与人工智能（AI）中的应用与影响几乎遍及各个领域，笔者只是希望能将本人熟知或了解的若干领域（扩充逻辑与有限模型论，系统的建模与 规范、推理与验证（统称为 formal method），形式语言与自动机，Prolog 与数据库，计算理论与复杂性等）中的若干与逻辑和集论相关的思想方法（至少以较初步的形式）反映到课程内容的选择与组织（包括例子与练习的编排）中去．最终的“结果”确与常规的同类基础教材有相当的不同．

1．关于集论部分（第一篇）

（1）首先关于选材，有点“非标准”．既不像多数离散数学课本所采用的经典方法（太旧，特别是涉及无限基数等的那种**非构造性**的不变量式的定义，表面上似乎简单但实际上却抽象难懂．更重要的是它们有内在矛盾．该淘汰了），也不是公理集论的朴素展开（如 Halmos 或 Nerode-Shore 书中那样），而是介于这二者之间，可以称之为经典集论的公理化修正版．本书只介绍了**部分**的集合公理（主要是构集公理），在计算机科学（甚至常规数学）中有用的那部分集合理论已可建基于这些公理．但舍去了与通常实践无关的正规公理与替换公理（只是在最后一节历史注记中简介整个 ZFC 公理系及其分层模型时，稍有提及）．其中，最使笔者犹豫不决的是：是否要引入选择公理（AC）．因虽然 AC 在研究无穷对象时不可或缺，但其与计算机科学的实践相去甚远．最后促使我“接纳”AC 的原因如下：

① 计算机科学专业学生在代数课程中也要接触 Zorn 引理（AC 的一个等价变型）．既然如此，在集论中介绍 AC 及其若干变形与应用，要更适当些．

② AC 往往与递归构造合在一起应用，学生很易将二者混淆．明确介绍 AC 是去除这种混乱的惟一方法．

③ 要构造式地严格定义无限基数等概念，AC 不可少．实际上，只有理解“无限”概念，才能真正全面理解其补概念“有限”（每一个“有限”对象是有穷的集合，但作为整体，它们没有上界．这是计算机科学感兴趣的对象）．本书从有限组合学中的鸽笼原理及其逆命题出发，建立起“有限”与“无限”之间的联系及特征．AC 的讨论即止于基数概念的引入，没有（也无必要）进一步涉足与 AC 相关的丰富深奥的理论．

(2) 与常规集论教材不同，本书突出了**关系演算**及**归纳与递归**两个内容的比重.

关于前者(实际上与一阶关系逻辑等效)，在复旦朱洪等人的教材中已出现这种倾向，因相关的思想或方法在数据库、模型检测、计算理论等中大有用武之地. 当然，由于课时或篇幅的限制，也不可能很深入. 如同余关系及其演算与分类，也只是在具体的例子或练习中点到为止，说明其概念与方法在计算机科学中应用的背景. 再进一步的介绍便要跨入泛代数的范畴了.

关于归纳与递归，本书从无穷公理出发的、相当深入的讨论是特色之一.这不仅仅是由于集论中讨论序数与基数及后文逻辑部分中应用之需要，而且递归构造是计算机科学中核心的、非平凡的构造方式.人类直觉思维能真正完全掌握的"无限"或"无上界的有限全体"，只能是那些从有限个元素或对象出发，通过递归或反复叠代操作所产生者. 对机器智能也是如此.最后值得指出，递归论(可计算性理论)中视为理所当然的原始递归函数这一生成手段(另一个是复合操作，平凡)，本书提供了其严格的集合论依据(存在性与惟一性证明).

(3) 公理方法与构造性技巧并重，体现在整个集论(及逻辑)的展开之中. 这两方面的训练，对计算机科学专业的学生，都是很重要的.

(4) 计算理论中最基本的三大数学工具，除归纳法外，还有抽屉原理与对角线论证法，都被有机地嵌入在集论的框架之中.计算机科学中重要的一些离散结构，如偏序、树、图(dag's)等及组合学中另一个重要工具 König 引理，书中都有相当的介绍. 这些在后文逻辑部分将被反复应用.

(5) 最后还需指出，如果只是将集论的介绍作为学习逻辑的预备知识，则本书集论部分的内容似乎多了一点(既含有若干原属于更大范围的离散数学中的内容，也涉及若干集论本身较深入的知识). 旧的教学大纲关于无限概念，只要求学生了解与区别可数无限与不可数的连续统集概念及相应的若干奇异的运算性质. 但为了使读者有一个清晰正确的集论"全景图"，本书还是直观地介绍了无限数(序数与基数)的整个优美的图谱(及集论世界的分层构造).这不过是 Von Neumann 关于自然数之构造的数集二重性的非常自然的拓广.另外书中还增加了一个附录"无限基数算术的简介 (可作为课外选读材料)".其目的，除了有某种完整性之外，希望读者能了解：他们重点学习的关于可数无限及连续统势的结果实际上可以拓广为更一般的规律；同时也有意向读者(部分地)展示"人类心智的辉煌".

2. 关于逻辑部分(第二篇)

(1) 在命题逻辑(PL)的语义学中，除解释常规的代数 Approach(指派与赋值函数)外，还自然地引入等效的 PL 模型的集论式(模型论式)定义及相应之语义解释.后者不仅提供了一种证明公式之恒真性或等价性的新途径，而且具有承上(运用集论部分介绍的概念与技巧)启下(可自然地过渡到一阶逻辑之模型及 Tarski 语义，以及命题式模态与时态逻辑的 Kripke 语义上去)的作用.一阶逻辑(FO)之

Tarski 语义概念历来被认为是教学上的难点,但它又是形式规范的基础.国外一些面向计算机科学(甚至是逻辑专业)的基础教材(如 Nerode-shore,Fitting,及 van Dalen's)都采用简化形式.但这种简化有先天的理论缺陷.本书进一步介绍一般的 Tarski 语义,将之视为一种与环境有交互作用的 interleaving 模式的开放式系统(而简化型语义是种封闭式系统)[①]。这可使面向计算机科学的学生感到更自然而易于理解与接受.

(2) 强调形式描述与规范的能力(建立适当的语义模型或描述 D,以便确定适当的形式语言,然后构造相应的逻辑公式来刻画感兴趣的对象或属性;反过来,从一个给定的公式能看出它所描述的性质)的培养.这是逻辑在计算机科学或人工智能中所有应用过程的第一步.但奇怪的是常规的逻辑教材中对之似乎太轻描淡写了.而偏偏又有相当多的学生在这方面似乎缺乏**严格**的训练.本书挑选了不少简单有趣的例子,来说明逻辑建模与规范在实际应用时可能遇到的一些现象与若干规律.

(3) 本书的语法推理系统采用 Tableau Approach.国外,在 20 世纪 90 年代,这种方法开始进入研究生教材(如 Nerode-Shore,Fitting 等人的书).但据作者的经验,这种演绎推理系统简单直观,易学易用,完全可以在本科生(初年级)讲授,更重要的是,Tableau 的思想方法(语义背景、语法操作,Debugging 及 model measuring 功能等.)在程序验证、Model Checking 及 AI 中有广泛且成功的应用.从教学上看,由于这种方法的简易性(至少在 PL 及 FO 场合),允许在有限的课时内,进一步介绍一些更深入的、以前通常在研究生课程中才介绍的论题,如语法推理系统的完备性证明、紧性定理(笔者将之视为归纳思想的一种话用)与 Löwenheim-Skolem 定理等及其应用[②].当然本书也简介了 Hilbert 公理系,作为背景与对比,它与学生已有的数学推理经验更一致.

(4) 除了讨论公式之语法分解树概念(常规内容)外,还介绍了(PL) 公式之语义分解,Shannon 展开式与具有惟一性的 if-then-else 范式,以及其在 Symbolic Computation (OBDD's)中的应用(通过一个典型的 case-study).

总之,与国内大多数同类教材(侧重语法与演绎证明论主线)相比,本书更强调逻辑的语义与模型论的侧面,甚至所采用的语法推理系统(tableau 系统)本身也有强烈的语义背景.这一方面是 LICS (logic in computer science)近年来发展的一个特点,同时也可避免初学者通常易产生的“逻辑(谓词演算)只是一种符号游戏”的错觉.使读者对抽象的逻辑学科更易接近或接受.

---

① 对了解数据库的读者甚至应指出,Tarski 语义中蕴含的 logical notions 反射到数据库(有限关系模型)上,实际上就是数据库查询的 genericity(又称为 universality property 或 consistency criterion).

② 笔者的背后的想法是,在重点高校(包括上海交通大学)的研究生逻辑教学中,还花相当时间介绍 FO 的这些标准内容,时间上 太可惜了,而且也有点落伍了.应挤出时间直接进入应用逻辑的学习.

(5) 训练学生的逻辑思维能力，是所有逻辑教学的共同目标.本书在这方面倾注了更大的关注,以期纠正读者可能在以前养成的数学或逻辑推理的思维习惯中的隐患.据笔者的经验，这方面若干似是而非的问题相当普遍且严重.例如(甚至在研究生教学中)，在课堂上仔细讲解$\vdash \alpha \rightarrow \beta$与$\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \beta$二者之区别,在以后考题中提问之，能答得头头是道；但在具体问题的推理中,又往往将二者混为一谈!这说明隐藏在思维习惯中的推理 bugs(往往起源于“想当然,差不多”所造成的错误直观)不易根除.它们必然会反映在相关人员以后工作中所设计或编制的软硬件系统中.系统越复杂，越不易被发现.有一位“程序形式验证”的先驱者曾(开玩笑)曰：他之所以致力于此,就是因为他对市场上大量的前三流学生所编制的软件,有一种先天的不信任感.

(6) 国外最新的本科生逻辑教材中,除了传统的语法与语义两大主线之外,也开始强调逻辑的算法侧面(参见 M.Vardi 之 lecture notes 2000). 实际上，当年 Hilbert 也很重视逻辑的判定问题.(Entscheidungsbarkeit) 计算机科学的发展,特别是近十多年来发现：问题的(逻辑)描述复杂性与该问题的计算复杂性之间有着紧密深刻的联系,促使这个重视也要反映到教科书上，而且落实到算法的层面上.由于课时的限制，本书无法介绍计算模型及相应的复杂性概念,而只能借助于读者关于算法的直观(对计算机科学专业学生，不成问题),随时随地联系逻辑规范实例，提及一些计算侧面的结果与想法.一个非平凡的算法或程序，其核心成分实际上就是递归构造的巧妙运用;其他一些细节只是涉及所采用的具体编程语言而已.本书自始(无穷公理)至终(紧性定理的应用)强调归纳与递归的思想方法,也间接但清楚地反映出笔者对上述新趋势的认同.

本书集论部分相对独立，但逻辑部分中将反复应用集论部分的若干知识.反之，集论部分的某些概念与操作，如在严格意义上展开,还是要涉及一阶逻辑框架. 从历史上看，公理集论与谓词演算(即 FO)是差不多在同一时段直面集合悖论的挑战，相辅相成地发展起来的.本书将这二者合在一起，不仅是教学上的需要，也反映了这一历史事实.在集论与逻辑部分的最后，都分别给出一个鸟瞰式的综述,让读者对所学的内容在相应领域中所处的位置、其适用范围、局限性及可能拓广的途径等，有一个清醒的认识.国内本科生教材很少有这种评注. 但笔者认为这很重要,特别是对打算将逻辑(或集论)作为工具的读者. 例如，数据库理论初创时期,由于随意应用逻辑与模型论的工具，曾闹出不少“笑话”.这在理论发展初期，是不可避免的. 而“有限模型论”发展至今,类似的“笑话”还时有发生却是不应该的. 在教科书中加入这种局限性与方法论的评述，可避免这种精力与时间上的浪费,拓展读者的“视野”，或许还能提高他们的兴趣.

本书的课文、例子与练习是三位一体的，且前后有关联. 有些例子与练习,在后文中还会多次出现且深化.一些重要或精彩的结果,会提供若干不同的证明方法或讨论模式;一些复杂的结论被分解成由简而深递进的过程.故对于光看书不做练

习或没有思考习惯的读者,可能会有困难. 书中例子与练习的量不少.除了一些是课文中内容的简单复习外,还有一些是为了介绍相关内容或方法的延伸或提升、应用的背景知识(例如,在 FO 及 Tarski 语义的框架下,考察模态逻辑及其 Kripke 语义.后者在计算机科学及人工智能中有广泛与直接的应用),甚至也有来自日常生活的趣味性内容. 建议读者, 即使做不了全部,也自行思考做相当一部分. 这对学习任何一门严肃学科者, 都是如此.提醒读者,本书中有大量的评述与注记,其中有一小部分可能超出本科生初年级的水平,完全可以跳过去而无妨.但随着读者背景知识的增加而后复读之,则将会有新的体会;同时这也为教师的临场发挥,提供一些"新闻由头"(当然,教师宜根据自己的背景与爱好来处理,不必拘泥于此).

最后需说明, 像这类基础教材, 要说在内容上有什么独创性,未免夜郎自大了. 笔者只是在内容(甚至例子、练习)的选排与展开方式上,努力或希望与众有所不同, 有所改进,或有所深入.我所教的历届班上的优秀学生对本书(特别是有些例子与练习)的形成也有贡献.无法一一列举,谨此致意.

参考与推荐文献

集论部分:

P. Halmos,《Naive Set Theory》,Van Nostrand (1960)

一本写得很精彩的小册子, 为公理集论之朴素展开的第一本教材,面向数学专业.

H. Enderton,《Elements of Set Theory》, Academic Press(1977)

为现代集论的一本标准的本科生(数学专业)水平的教材. 同样,也只侧重于集论本身.

K. Rosen,《离散数学及其应用》, (英文) 第 4 版,机械工业出版社与 McGraw-Hill 公司联合出版 (1999).已有中文译本.

在归纳与递归, 数论, 组合, 图论方面, 有大量的例子与练习.(此书逻辑部分, 不值一提.)

逻辑部分:

H. Enderton,《A Mathematical Introduction to Logic》,2nd. Ed, Academic Press (2000)

写得很好,但没有介绍 Tableau 方法, 且面向数学专业.

A. Nerode, R. Shore,《Logic for Applications》, 2nd ed., Springer (1998)

介绍 Tableau 方法, 同时还介绍 Resolution 与 Logic Programming,模态与直觉逻辑. 是本科生高年级及研究生教材, 面向计算机科学专业.新版中含有一个附录: Elements of Set Theory.展开的层次要稍高于本书, 但过于简洁. 本书采用该书介绍 Tableau 系统的模式.

M . Fitting ,《First Order Logic and Automated Theorem-Proving》, Springer (1998)

计算机科学研究生教材 . 同时介绍 Tableau 及 Resolution 系统 . 只局限在 FO 范围 .

M . Vardi ,《Comput 409》,Rice 大学计算机系(本科)逻辑课程之电子版讲义 (2000) . cf .

http://www .cs .rice .edu/～vardi .

综合性课外阅读 (涉及历史、元数学、计算机科学、人工智能、计算机物理、生物生理,甚至美术、音乐、哲学及语言修辞学……):

王浩 ,《数理逻辑通俗讲话》, 科学出版社 (1981)

但并不通俗,至少要以本书主要内容为前提 .

E . Maor ,《无穷之旅——关于无穷大的文化史》,上海教育出版社 (通俗数学名著译丛)(2000)

R . Penrose ,《皇帝新脑》, 湖南科学技术出版社(第一推动丛书)(1999)

D . Hofstadter (侯世达),《哥德尔 , 艾舍尔 ,巴赫——集异璧之大成》, 商务印书馆 (1996)

是计算机科学界一本科普名著 . 曾获得“普利策”图书奖 , 译文亦精彩 .强烈向读者推荐 .

目　　录

第一篇　基础集论

无穷大！任何一个其他问题都不曾如此深刻地影响人类的精神；任何一个其他观念都不曾如此有效地激励人类的心智；然而也没有任何概念比无穷大更需要澄清……

D.Hilbert

第一章　集合的基本关系与运算

集合论(的概念、性质与方法)不仅是数学中大多数分支(包括在计算机科学中有广泛应用的逻辑、代数、组合与图论等,统称为“离散数学”)的基础,也是计算机科学中许多理论不可或缺的工具.

自 Cantor 奠定(无限)集论之朴素基础的一个多世纪以来,集论本身已发展成一个成熟的独立学科,是数理逻辑的一个有丰富深刻内容的分支.其中哪些内容可称为初级或基础者,实际是因人而异,并随着时代及科学技术的发展而不断变化.下面的内容可称为朴素(经典)集论在公理化思想下的修正版,同时又侧重于其在计算机科学中有应用的那部分内容.集论中公理化体系的引入,是为了既保留经典集论中有用的部分,又要剔除由于隐蔽的不当操作而悄然潜入的悖论(paradox,bug).不妨将它视为一种理论上的“篱笆”,能够围住“羊群”将“狼”隔离在圈外,防止“狼”以任何伪装的方式混入“羊群”.

但是,公理集论本身不是本课程的目的.当然,在下文中基础集论(运算与关系、计数与推理、有限与无限等)的展开过程中,强调公理化方法及构造性技巧的运用.因为这些思想方法在本书逻辑部分,在计算机科学的许多领域中,有重要的应用或影响.

§1.1　集合的表示:内涵与外延

读者已了解了集合的各种表达方式,如列表法、图示法、枚举法等.如用统一观点分析之,它们可分为两个范畴:其一,是外延表示法,即将该集合中的所有元素以某种方式表示出来.这通常只适用于有限集或具有某种规律的可数无限集[①].其二,是内涵表示法,用性质来界定属于该集合的元素.这种方式更通用,但需要特别地说明或慎用之.内涵与外延之间的一一对应,在数学、古典逻辑甚至哲学中均如此.由此抽象出经典集论中的概括原则(Abstract Principle).而恰恰是自古以来被学者普遍接受的这个原理,是集合理论的“篱笆”中的一个致命的“漏洞”.

内涵表示法的常用模式是:若用 P 表示某种属性,则 $P(a)$表示 a 具有性质 P,而 $\neg P(a)$表示 a 不具有性质 P.这种通用的方式称为“谓词表达法”[②].

---

① 集合之有限与无限,可数与不可数等概念,暂时按其字面直观意义理解.以后随理论之展开,将给出它们各自严格的数学定义.

② 严格地讲,性质 P 必须能用一个集论语言上的一阶公式来表达.

随意使用概括原则，将会为集合理论埋下一系列致命的悖论．其中最著名也是最本质的一个是 Russell(罗素)悖论．介绍如下：

每一集合 x，必具有下面两个互补的性质之一：

或 x 是其本身的一个元素，即 $x\in x$；或 x 不是其本身的元素，即 $x\notin x$．用概括原则定义一个新的“集合”：

$$X := \{x \text{ 是集合} \mid x\notin x\}.$$

对集合“X”，考察如下：

若 $X\in X$，这时(按 X 的定义) X 有性质 $X\notin X$；

若 $X\notin X$，则由 X 的定义，$X\in X$．

由于在任何情况下均可导出矛盾，惟一的出路是，$X=\{x\mid x\notin x\}$ 不能是一个合法的集合．换言之，概括原则不是一个合适的构集方法．

我们只能在一个给定的(已知的)集合(母集)中，利用内涵(属性)从母集中分离出具有该属性的元素所组成的子集．即所谓**子集公理**．用性质 P 分离出的 A 的子集 B 记为

$$B=\{a : a\in A \text{ 且 } P(a)\}=\{a\in A : P(a)\}.$$

因此，只有当 A 确定是一个集合时，子集公理(又称分离公理)才能保证 B 也是一个(合法的)集合．不难看出，上面 X 的定义不满足子集公理的模式[①]．

子集公理也暗示：为了建立有意义的集合理论，首先必须保证：至少有一个(合法的)集合存在．然后，由之出发，再规定若干从“旧集”出发构造“新集”的基本运算与方法，便可以构造出各种集合，进而建立起相关的理论．

§1.2 集合的运算、构集公理

现代集论中，所有(合法)的讨论对象(object)都是集合．$A,B,C,\cdots;X,Y,Z;a,b,c,\cdots,x,y,z$ 等等，任何一个字母都代表某个集合．集合之间只有一个原始的或基本的二元关系，即从属关系，记为$\in$．$a\in A$(或 $x\in X$)表示 a(或 x)是集 A(或 X)的一个元素，其中元素 a(与 x) 也是集合．所有其他的集合之间的运算或关系，均可从$\in$出发来定义或构造．作为出发点，是一个不含任何元素的空集．用一个公理来保证其存在性．

空集公理　存在一个空集，即不含任何元素的集合，记为$\varnothing$．

利用$\in$，可定义两个集合 A 与 B 之间的重合或相等关系，记为 $A=B$．

外延公理　对每一集合 x，若 $x\in A\Leftrightarrow x\in B$，则称 $A=B$．

利用外延公理，可证明空集的惟一性．(注意证明的虚满足模式，即不存在可

① 乍看，集合全体 V 似乎可以作为定义中的母集，但 V 太大了，不是一个合法的集合．实际上集论中的正规公理保证：每个集合不能是其自身的元素．因此 V 就是上述的 X．

破坏“＝”关系之反例.)因此符号$\varnothing$无歧义(well-defined).

将上述“＝”之定义单侧化，便可导出集合之间的包含关系.

定义 1.2.1 $A\subseteq B$ 指：对任 x，$x\in A\Rightarrow x\in B$. 称 A 为 B 的**子集**.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集(proper subset)，记为 $A\subset B$.

显然，$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.(由外延公理)

$\varnothing$是任何集合的子集；$\varnothing$是非空集合(含有元素的集合)的真子集.

定义 1.2.2 给定两个集合 A,B. 记 $A\cup B:=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$. 称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的并集(union).

注意此定义不符合子集公理的模式. 另须引入一个公理，来保证这一常用运算或其结果(并集)之合法性(存在性).

并集公理(狭义) 若 A,B 是集合，则 $A\cup B$ 也是集合.

由外延公理，可证明并集之惟一性. 故二元运算$\cup$是无歧义的。

利用并集公理与子集公理，可以合法地定义常见的其他集合运算：交、差、对称差等.

定义 1.2.3 给定集合 A,B.

$$A\cap B:=\{x\in A\cup B:x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

$$A-B:=\{x\in A\cup B:x\in A \text{ 但 } x\notin B\};$$

$$A\oplus B:=(A-B)\cup(B-A)=\{x\in A\cup B:x\notin A\cap B\}.$$

特别，当 $B\subset A$ 时(特别 A 为全集时)，称 $A-B$ 为 B 关于 A 的补集，记为 B^c(相对于 A).

二元的并集与交集运算可以反复应用而拓广为多元运算. 以$\cup$为例，作归纳法[①]定义：

$$A_1\cup A_2,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\cup A_{n+1}=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cup A_{n+1}.$$

由于二元算子$\cup$具有结合律(易验证)，故上述定义及记号是无歧义的.

进一步，还可定义 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup\{A_i:i\in\mathbb{N}^+\}$.(常用$\mathbb{N}$表示自然数全体：$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；而$\mathbb{N}^+$表示非零的自然数全体.)由于还存在无法用自然数来枚举其元素的无限集合[②]，如实数全体$\mathbb{R}$

习惯下面一个更抽象(但本质上一致)的定义及表达方式.

定义 1.2.4 设 A 是集合，称$\bigcup A:=\{x$：存在 $a\in A$，使 $x\in a\}$ 为 A 的并集. 特别，当 $A=\varnothing$ 时，规定$\bigcup\varnothing:=\varnothing$.

显然，当 $A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$是可数无限集(即以自然数为下标可以

---

① 数学归纳法的集论基础将涉及无穷公理与自然数的构造.后文将介绍.

② 统称为不可数(无限)集.

穷尽地枚举该集之元素)时，$\bigcup A = \bigcup_{n=0}^{\infty} a_n$.

需要引入**广义的并集公理**来保证$\bigcup A$之合法性(或存在性).

类似地，可以定义有限交与无限交的运算. 当 $A \neq \varnothing$ 时，$\bigcap A := \{x \in \bigcup A$：对任一 $a \in A$，有 $x \in a\}$.

当 $A = \varnothing$时，$\bigcap \varnothing$无固定的定义[①].

对于另外一些常用的集合运算及关系,如序对与直积(二维、多维与无穷维空间)，子集全体(幂集,用于构造函数空间等)等，另需引入两个集合公理(构集原则)来保证这些操作的合法性.

无序对公理(Unordered Pair)　任给两个集合 x 与 y，存在一个集合恰好以 x 与 y 为它的所有成员,称之为 x 与 y 的无序对，记为 $\{x, y\}$ (或$\{y, x\}$).

- 外延公理保证无序对这个二元集合是惟一的，故记号$\{x, y\}$($=\{y, x\}$)是无歧义的.
- 特别，当 $x = y$ 时，$\{x, x\} = \{x\}$是单元集合.
  集合中，相同的元素不累计.
- 由无序对出发，可以定义有序对(ordered pair).

定义 1.2.5(Kuratowski)　集 x 与 y 的有序对$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

有序对$\langle x, y\rangle$也是一个二元集合.利用该集中二个元素$\{x\}$与$\{x, y\}$之不同，可以规定序对中二个元素 x 与 y(又称为坐标或投影)的先后次序.

特别，$\langle\varnothing, \varnothing\rangle = \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \varnothing\}\} = \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\} = \{\{\varnothing\}\} \neq \{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing\}$. 此例明显指出,有序对与无序对在集论构造上的区别.

反复应用 Kuratowski 构造,可以(归纳地)定义三元序组、四元序组、n 元序组(n-sequence).

以三元序组为例[②]：

$$
\begin{aligned}
\langle x, y, z\rangle := \langle\langle x, y\rangle, z\rangle &= \{\{\langle x, y\rangle\}, \{\langle x, y\rangle, z\}\} \\
&= \{\{\{\{x\}, \{x, y\}\}\}, \{\{\{x\}, \{y, x\}\}, z\}\}
\end{aligned}
$$

因此，三元序组仍是一个二元集合,但它有内外三层构造，借此可以确定三个坐标 x, y, z 之间的顺序.

评注　现代集合理论中,每个对象(包括关系、函数等)都被视为或定义成集合，有具体的构造.关于无限序列，下一章将介绍另一种更方便易用的函数式定义,自然也是集合.

读者已熟知的关于“二个序对(或序组)相同”的规定,将成为性质而可加以证

---

① $\bigcup\varnothing$和$\bigcap\varnothing$中之$\varnothing$”,宜视为空集.从$\bigcup$ 运算之定义出发,易验证$\bigcup\varnothing = \varnothing$的规定是合理的.但当对此等式应用 De Morgen 律时,便会发现,若同时也规定$\bigcap\varnothing = \varnothing$,则会导出矛盾.为了保留 De Morgen 性质,只能规定$\bigcap\varnothing$无定义.

② 定义方式不是惟一的,但须确定其中的一个即可.

明.

定理 1.2.1 $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x=u$ 且 $y=v$.

证明 从序对的 Kuratowski 定义出发.

($\Leftarrow$) 用外延公理.(易,略).

($\Rightarrow$) 设 $\langle x, y\rangle = \{\{x\},\{x, y\}\} = \langle u, v\rangle = \{\{u\},\{u, v\}\}$.

讨论.(i) $x=y$. 这时 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}\} = \{\{u\},\{u, v\}\} = \langle u, v\rangle$,故必 $\{u\} = \{x\} = \{u, v\}$, 因此, $y=x=u=v$.

(ii) $x \neq y$, 这时必 $u \neq v$,(否则,仿(i)可导出 $x=y$.)

考察 $\{\{x\},\{x, y\}\} = \{\{u\},\{u, v\}\}$,且注意单元集与双元集之不同. 因此必有 $\{x\}=\{u\}$, $\{x, y\}=\{u, v\}$, 所以 $x=u$. 再由 $x\neq y$ 且 $u \neq v$, 可导出 $y=v$. (证毕)[①]

同理, 可将上述论证拓广到多元序组(序列):

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n\rangle \quad \text{iff} \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \cdots,\ x_n = y_n.$$

(iff 为"if and only if(当且仅当)"的缩写, 其等效于符号$\Leftrightarrow$.)

幂集公理(Power Set) 对任何集合 X,存在一个集合 Y 恰以 X 的所有子集为元素.

外延公理保证集 Y 的惟一性, 称之为 X 的幂集[②].记为

$$\mathscr{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}, \text{(或记为 } \mathscr{P}X\text{)}$$

幂集必含空集与原集(母集), 故幂集必是非空的.

例 1

$$\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \neq \varnothing, \quad \mathscr{P}(\varnothing) \neq \{\{\varnothing\}\}$$
$$\mathscr{P}[\mathscr{P}(\varnothing)] = \mathscr{P}[\{\varnothing\}] = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\mathscr{P}^3(\varnothing) = \mathscr{P}[\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))] = \mathscr{P}[\{\varnothing, \{\varnothing\}\}]$$
$$= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

引理 1.2.2 若 $\langle x, y\rangle \in A$, 则 $x, y \in \bigcup(\bigcup A) = \bigcup\bigcup A$; 反之若 $x, y \in A$, 则 $\langle x, y\rangle \in \mathscr{P}^2(A) = \mathscr{P}\mathscr{P}A$.

证明 若 $\langle x, y\rangle = \{\{x\},\{x, y\}\} \in A$, 由 $\bigcup A$ 之定义, $\{x\}$, $\{x, y\} \in \bigcup A$, 进而 $x, y \in \bigcup(\bigcup A)$. 反之,若 $x, y \in A$, 则 $\{x\}$, $\{x, y\} \subseteq A$, 即 $\{x\}, \{x, y\} \in \mathscr{P}A$, 故 $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}A)$. □

不难看出, 并集算子有"去括号"的功能, 而幂集算子相反,有"添括号"的功能.

推论 1.2.3 集合 A 与 B 的直积(Cartesian Product)

---

① 以后将用符号□表示证明或讨论的结束.

② 名称之由来.当 X 是有限集时, $\mathscr{P}(X)$中元素的个数 $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$, $|X|$表示集合 X 中元素的个数.

$$A \times B := \{\langle a, b\rangle : a \in A,\ b \in B\}$$
$$= \{\langle a, b\rangle \in \mathscr{P}^2(A \cup B) : a \in A,\ b \in B\}$$
是合法的集合．特别，当 A 或 B 中至少有一个为空集时，$A \times B = \varnothing = B \times A$．

二元的直积运算也可以拓广到多元运算的场合．(其合法性可由三元序组、…、n 元序组具有集合式的构造而得到保证．) 下面的记号是常用的．
$$A^0 = \varnothing,\ A^1 = A,\ A^2 = A \times A, \cdots, A^{n+1} = (A^n) \times A.$$
关于无限直积(直幂)，下一章将介绍一种简洁易用的函数式定义．

实际上，离散数学与计算机科学中所有常见的集合运算及操作，均可用上面介绍的构集原则(无序对公理、并集公理、幂集公理及子集公理)给出其构造性(集论式)定义．特别是上面介绍的各种布尔集运算(并、交、差、补等)．

布尔集代数

设 $S \neq \varnothing$．在幂集 $\mathscr{P} S$ 上引入并、交、补运算，且指定两个特殊子集 $\varnothing$ 与 S，便组成一个特殊的(布尔)代数构造，称为(S 上的)布尔集代数，记为：
$$\mathscr{B}(S) = (\mathscr{P} S, \cap, \cup, (\cdot)^C, \varnothing, S).$$
对任 $A, B, C \in \mathscr{P} S$，满足

- 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$．
- 交换律 $A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$．
- 幂等律 $A \cup A = A$；$A \cap A = A$．
- 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$．
- De Morgan 律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$；$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$．
- 双重补 $(A^C)^C = A$．(Double Negations.)
- 恒等律 $A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$；$A \cup S = S$，$A \cap S = A$，后一组有时也称为吸收律．
- 取补律 $\varnothing^C = S$，$S^C = \varnothing$；$A \cup A^C = S$，$A \cap A^C = \varnothing$．(Negation Law.)

评注

(1) 上述关于二元运算 $\cap$，$\cup$，一元运算 $(\cdot)^C$ 及两个特别个体 $\varnothing$，S 的一组性质实际上也是定义(抽象)布尔代数的一组公理．

(2) 注意二元运算 $\cap$ 与 $\cup$ 之间的一种对称现象，称之为对偶性(duality)．类似的对偶现象在逻辑中也出现．

(3) 在一般的布尔代数中，布尔集代数是一类直观的特殊结构，但又不失一般性．Stone 表示定理曰：每一个(抽象)布尔代数，存在一个布尔集合代数与之同构．数学中，把可以“代表”一类抽象对象的一些具体直观的结构称之为(抽象对象的)“表示”，而计算机科学中则常称之为语义解释．后文还将提及，布尔集代数也是命题逻辑的一种集合式表示．

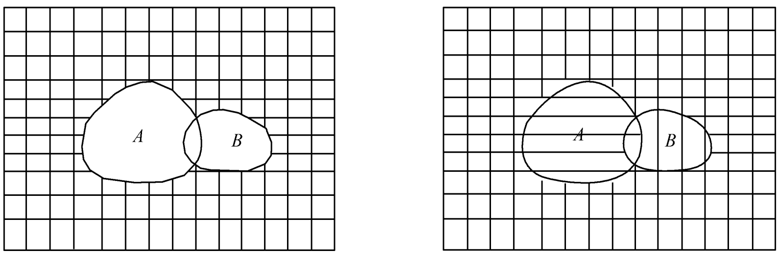
(4) 集合代数是一种完备的布尔代数，意指在 $\mathscr{P}(S)$ 中对无限并与无限交运

算也封闭(有定义)，且相应的交换、结合、分配与 De Morgan 性质的拓广仍成立.

(5) 从空集$\varnothing$出发，利用无序对、并集、幂集与子集四个构集公理(及由它们可导出的各种运算或操作)，在有限次操作之后，只能构造出有限集.（这个结果自然且直观，但严格证明较麻烦①.不妨视之为一个事实.）为了能讨论无限集，自然需另引入一个保证无限集存在的公理. 如何将此无穷公理设计得尽可能地简单直观而且够用，这是第三章讨论的主题.

例 2 考察 De Morgan 律(之一). $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

利用 Venn 图，可以给出一个直观的图示，如图 1.2.1.



$(A\cup B)^C$由阴影部分表示

A^C由竖线阴影部分表示，B^C由横线阴影部分表示
$A^C\cap B^C$由横 - 竖（交叉）阴影部分表示

图 1.2.1

二图中两个交叉阴影部分显然是重合的. 严格证明如下：

任取 $x\in(A\cup B)^C$，则 $x\notin A\cup B$，即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in A^C$ 且 $x\in B^C$，$\therefore$ $x\in A^C\cap B^C$. 反之，任取 $y\in A^C\cap B^C$，则 $y\in A^C$ 且 $y\in B^C$，即 $y\notin A$ 且 $y\notin B$，即 $y\notin A\cup B$. $\therefore$ $y\in(A\cup B)^C$. 实际上，两个方向的论证可以合二为一.

综上所述，外延公理保证$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$之成立.

不难看出，上述论证也适用于一般场合：

$\left(\bigcup\limits_n A_n\right)^C=\bigcap\limits_n (A_n)^C$，其中$\{A_n\}$是一集合序列.

$\left(\bigcup\mathscr{A}\right)^C=\bigcap\{A^C: A\in\mathscr{A}\}$，其中$\mathscr{A}$为一个集族(set of sets). □

例 3 考察 $S\neq\varnothing$上的布尔集代数$\mathscr{B}(S)$.

对$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}S$，若$\mathscr{A}\neq\varnothing$，则$\bigcap\mathscr{A}\in\mathscr{P}S\ni\bigcup\mathscr{A}$.

对 $B\in\mathscr{P}S$，$B\cup(\bigcap\mathscr{A})=\bigcap\{B\cup A: A\in\mathscr{A}\}$ (广义分配律)，

$(\bigcap\mathscr{A})^C=\bigcup(\mathscr{A}^C)$，其中$\mathscr{A}^C:=\{A^C: A\in\mathscr{A}\}$ (广义 De Morgan 律).

二集合等式之验证，可作为练习.

① 实际上，可以构造一个(极小)模型，含有空集且对无序对、并集、幂集及取子集(对应四个构集公理)四个运算封闭.而此集论模型中的每个成员都是有限集. 如 Arckermann 模型.

进一步的例子或练习

1．验证课文中布尔集代数的 8 组性质．

2．验证广义分配律、广义 De Morgan 律及

吸收律：$(A\cup B)\cap A=A$； $(A\cap B)\cup A=A$．

3．交运算与补运算的反单调性：(对照并运算之单调性：$A\subseteq B\Rightarrow\bigcup A\subseteq\bigcup B$)

(1) $\varnothing\neq A\subseteq B\Rightarrow\bigcap B\subseteq\bigcap A$．

(2) $A\subseteq B\Rightarrow C-B\subseteq C-A$．(特别，$A\subseteq B\Rightarrow B^C\subseteq A^C$)．

4．设 $A,B\subseteq S$．证明：$A\subseteq B$ iff $A\cap B=A$ iff $B-(B-A)=A$ iff $A^C\cup B=S$ iff $A\oplus B=B-A$．

5．考察其他形式的分配现象：

(1) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$．($\cap$改为$\cup$，如何？)

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$．(将$\cup$改为$\cap$，等式是否仍成立？)

(3) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$．(若将$\cap$改为$\cup$，结果如何？)

6．验证：

$\bigcup[\mathscr{P}(A)]=A$；

$\mathscr{P}(\bigcup A)\supseteq A$．举出反向不成立的实例．试给出一个使等号成立的充要条件．(提示：一个充要条件：存在 B 使$\mathscr{P}(B)=A$．)

$6'$．相关的例子．

(1) 若 $A=\varnothing$，则$\bigcup A=\varnothing$，$\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing\}\neq A$．

(2) 若 $A=\{\varnothing\}$，则$\bigcup A=\varnothing$，$\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing\}=A$．

(3) 若 $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，则 $\bigcup A=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$，$\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=A$．

(4) 若 $A=\{\varnothing,\{a\}\}$，则$\bigcup A=\{a\}$，$\mathscr{P}(\bigcup A)=\{\varnothing,\{a\}\}=A$．

7．$\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$，

$\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$．使等号不成立的反例；使等式成立的条件？

8．试找出使集合等式$(A-B)\cup C=A-(B-C)$成立的充要条件，且证明之．(利用 Venn 图或恒等变形来帮助寻找充要条件．)

(提示：一个充要条件：$C\subseteq A$．)

9．下面的集合等式是否成立？若成立，证明之；若不成立，举反例．

(1) $(A\times A)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$．

(2) $(A\times A)\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)$．

10．集列之并集的非交化技巧．

给定$\{A_n：n\in\mathbb{N}\}$．构造 $B_n(n\in\mathbb{N})$，满足：当 $i\neq j$ 时，$B_i\cap B_j=\varnothing$，且$\bigcup\{A_n：n\in\mathbb{N}\}=\dot{\bigcup}\{B_n：n\in\mathbb{N}\}$．($\dot{\bigcup}$表示非交并运算．disjoint union．)

(1) 先考察特例，$A_1\cup A_2=A_1\dot{\cup}(A_2-A_1)$．

(2) 作：$B_0 := A_0$，$B_1 := A_1 - B_0, \cdots, B_{n+1} := A_{n+1} - \bigcup_{i=0}^{n} B_i$，

则：$B_i \cap B_j = \varnothing$（$i \neq j$，$i, j \in \mathrm{N}$）；$\bigcup\{A_n : n \in \mathrm{N}\} = \bigcup\{B_n : n \in \mathrm{N}\}$.

11. Inclusion/Exclusion 原理.

(1) 利用 Venn 图考察：(用 $|A|$ 表示集合 A 中元素之个数的多少，又称为 A 的基数.)

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

(2) 猜测下面更一般场合的表达式，进而用数学归纳法证明之.

$|A \cup B \cup C \cup D| = ?$

$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = ?$

(提示：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.)$$

第二章　关系与函数

读者已了解函数与关系的概念．现将从现代集论的构造性观点出发，重新审视之．本章将侧重于讨论关系(特别是二元关系)，而视函数为特殊的关系．主要内容有：基本概念与关系演算初介，几类在计算机科学中常见的特殊的二元关系，最后是多元关系及其在数据库中的一个应用例．顺便还介绍一个在集论、逻辑与计算理论中非常重要的论证工具——Cantor 对角线法．

§2.1　基本概念、关系的运算

从集合观点看，关系就是直积集的一个子集．以二元关系为例．

定义 2.1.1　设 A, B 是两个非空集合，A 与 B 之间的一个二元关系 R 就是 $A\times B$ 的一个子集：$R\subseteq A\times B$．换言之，R 是序对 $\langle a, b\rangle(\in A\times B)$ 的一个集合．有时也将 $\langle a, b\rangle\in R$ 写成 aRb．

若取 $C=A\cup B$，则 $R\subseteq C\times C=C^2$．因此，不失一般性，常考察 $R\subseteq A^2$，称 R 是 A 上的一个二元关系．$R\in\mathscr{P}(A^2)$．

例 1　自然数之间的大小关系——自然序 L，从集合观点看，是自然数序对的一个集合．$L=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\cdots,\langle 0,n\rangle,\cdots;\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\cdots,\langle 1,n\rangle,\cdots;\langle n,n+1\rangle,\cdots\}$是$\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\mathbb{N}^2$ 的一个子集．

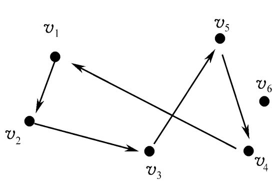


图 2.1.1

例 2　一个有向图(directed graph)中顶点之间的边的集合(相邻关系)，可视为顶点集 V 上的一个二元关系 E，如图 2.1.1．

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$．

$E=\{\langle v_1, v_2\rangle,\langle v_2, v_3\rangle,\langle v_3, v_5\rangle,\langle v_5, v_4\rangle,\langle v_4, v_1\rangle\}$．

称 $G=\langle V, E\rangle$为图结构，这是一种简单的二元关系结构．二元关系结构的几何表示，就是一个(有向)图．

例 3　自然数之间的整除关系 D 是$\mathbb{N}$

$$D=\{\langle m, n\rangle\in\mathbb{N}^2: m\text{ 可以整除 }n(\text{记为 }m\mid n)\}\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

例 4　自然数之间的同余关系也是$\mathbb{N}$

模 2 同余 $R_2=\{\langle m,n\rangle\in\mathbb{N}^2:\langle 2,|m-n|\rangle\in D\}$. $\langle m,n\rangle\in R_2$ 在数论中常记为 $m\equiv n(\bmod 2)$.

同理可定义：模 3 同余、…、模 k 同余等. □

二元关系(结构)有三种常用的表示方法：

- 集论表示 (序对之集合)；(定义)
- 几何表示 (图)；(可形象地称为“联络”图.)
- 代数表示 (矩阵表示法).(将在§2.4 中介绍.)

一元函数是单值的 total 二元关系. 函数的集合式定义，将传统的定义(视为对应关系、内涵式) 与函数的图像 (序对集、外延式) 视为同一.

定义 2.1.2 $R\subseteq A\times B$. 若 R 满足

- 全域性 (totality)：$\forall x\in A\ \exists y\in B$ 使 $\langle x,y\rangle\in R$；
- 单值性：$\langle x,y\rangle,\langle x,z\rangle\in R\Rightarrow y=z$.

则称 R 是 A 到 B 的一个(一元)函数，记为 $R:A\to B$.

注记 (1)无穷(ω—)序列可以视为自然数集N

(2) 上面两个条件可以合而为一，$\forall x\in A\ \exists!y$ 使$\langle x,y\rangle\in R$.($\exists!y$ 表示存在惟一的 y 使…)

从集 A 到集 B 的函数全体，记为$[A\to B]=\{f\mid f:A\to B\}\subseteq\mathscr{P}(A\times B)$ 是一个合法的集合.(有时也称其为函数空间. 注意：$\mathrm{dom}(f)=A$.)也可简记为 B^A.

(3) 如果去除定义中的全域性要求,便得到**偏函数**(又称部分函数)的概念. 记为 $f:A\rightharpoonup B$.($\mathrm{dom}(f)\subseteq A$). 从 A 到 B 的偏函数全体$[A\rightharpoonup B]$也是一个合法的集合. 在计算理论中，这是一个有用的概念.

显然，$[A\to B]\subset[A\rightharpoonup B]\subseteq\mathscr{P}(A\times B)$.

(4) 如果去掉定义中的单值性要求，便导出**多值函数**的概念.

因此，反过来，也可视关系是函数概念的一种拓广.(二元)关系实际上是一种多值的(一元)偏函数.

(5) A 到 B 的映射(mapping)定义为三元组$\langle f,A,B,\rangle$,其中 $f:A\to B$ 且 $\mathrm{dom}(f)=A$ 而 $\mathrm{ran}(f)\subseteq B$. 不难看出,映射与函数的概念是互相对应的，但不是一一对应的.

记号 $f:A\rightarrowtail B$ 表示 f 是单射(injection). $f:A\twoheadrightarrow B$ 表示 f 是满射(surjection)；$f:A\rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ 表示 f 是双射(bijection).

(6) 从二元关系与一元函数拓广到多元关系与多元函数,从本质上讲没有实质性的变化. 我们将在§2.5 中涉及这一论题,但侧重于其应用.

下面将从三个角度来进一步考察(二元)关系：视为集；视为函数的拓广；视为(二元)关系本身时，其所具有的特异概念与性质.

1. 关系也是集.因此集论中的一些概念与运算自然也适用于关系. 例如,设 $A\neq\varnothing$. A 中的二元关系全体是 $\mathscr{P}(A^2)$. 令 $R_1,R_2\in\mathscr{P}(A^2)$，则关系的并 $R_1\cup$

R_2、交 $R_1 \cap R_2$、差 $R_1 - R_2$ 及补关系 $R_1^C :=A^2 - R_1$ 都在 $\mathscr{P}(A^2)$ 之中[①]. 也可引入两个关系之间的包含关系. 若 $R_1 \subseteq R_2$，则称关系 R_2 是关系 R_1 的延拓（extension），而 R_1 是 R_2 一个限制（restriction）. 空关系 $\varnothing$ 是 A 上最小的（二元）关系，而全关系 A^2 是 $\mathscr{P}(A^2)$ 中最大的二元关系.

相关的一些运算性质等自然在 $\mathscr{P}(A^2)$ 上也成立，这里不再赘述.

2. 关系是多值的偏函数.

不难设想，与函数相关的某些概念与属性可以移植到关系上来.

定义 2.1.3 设 $R \in \mathscr{P}(A \times B)$，关系 R 的定义域与值域可定义如下：

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} R &:= \{x : \exists\, y \text{ 使 } \langle x, y\rangle \in R\} \\ &= \{x \in \bigcup\bigcup R : \exists\, y \in \bigcup\bigcup R \text{ 使 } \langle x, y\rangle \in R\}. \\ \operatorname{ran} R &:= \{y \in \bigcup\bigcup R : \exists\, x \text{ 使 } \langle x, y\rangle \in R\}. \end{aligned}$$

称 $\operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$ 为关系 R 之域，记为 $\operatorname{fld} R = \operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$. 在计算机科学中，常将 $\operatorname{dom} R$ 和 $\operatorname{ran} R$ 称为 R 的源（source）和目标（target）.

设 $R = R_1 \cup R_2 \subseteq A \times B$. 图 2.1.2 是关系 R 的一个示意图，称为 R 的 Cartesian 表示. 它是一元函数之图像的拓广.

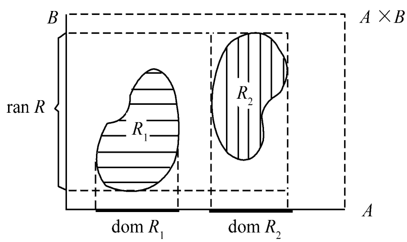


图 2.1.2

$$\operatorname{dom} R = \operatorname{dom} R_1 \cup \operatorname{dom} R_2$$
$$\operatorname{ran} R = \operatorname{ran} R_1 \cup \operatorname{ran} R_2$$
$$R \subseteq \operatorname{dom} R \times \operatorname{ran} R$$

例 5 dom 与 ran 概念不仅可以形式地拓广到多元关系的场合（不惟一），甚至还可以拓广到一般的集合上去. 例如，对集 A，$\operatorname{dom} A := \{x \in \bigcup\bigcup A : \exists\, y \in \bigcup\bigcup A$ 使得 $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in A\}$ 也是合法的集合.

同理可定义 $\operatorname{ran} A$.

下面一个性质，乍看有点意外，但不难验证.（参考图 2.1.2.）

“集 A 是二元关系 iff $A \subseteq \operatorname{dom} A \times \operatorname{ran} A$.”（do it yourself，DIY） □

① $R_1 \times R_2$ 是一个四元关系，跳出 $\mathscr{P}(A^2)$ 的范围. 将在 § 2.5 中讨论关系之直积及其应用.

定义 2.1.4 (1) 设 $R\in\mathscr{P}(A^2)$,二元关系 R 的逆关系 $R^{-1}\coloneqq\{\langle y,x\rangle\in A^2:\langle x,y\rangle\in R\}\in\mathscr{P}(A^2)$. 在 Cartesian 图示中,$R$ 与 R^{-1}关于(主)对角线对称.(与逆函数不同,逆关系总存在.)

(2) 设 $R_1,R_2\in\mathscr{P}(A^2)$, 二者的复合 $R_1\circ R_2\coloneqq\{\langle x,y\rangle:\exists\ z\in A$ 使 $\langle x,z\rangle\in R_1,\langle z,y\rangle\in R_2\}\in\mathscr{P}(A^2)$.(关系之复合也无需函数复合场合之约束条件)

(3) 称 $I_A=\{\langle a,a\rangle:a\in A\}\in\mathscr{P}(A^2)$为 A 上的相等关系或对角线.(当 A 固定时,I_A 的下标常省略而记为 I.)

例 6

- 空关系之逆仍是空关系:$\varnothing^{-1}=\varnothing$.
- 全关系之逆:$(A\times B)^{-1}=B\times A$. 特别 $(A^2)^{-1}=A^2$.
- $R\circ I=I\circ R$,所以 I 又称为$\mathscr{P}(A^2)$中的单位关系.
- 但 $R\circ R^{-1}=I=R^{-1}\circ R$ 一般不再成立.下面是一个反例.

取 $A=\{a,b,b',c\}$, 则 $I_A=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b',b'\rangle,\langle c,c\rangle\}$

令 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,b'\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b',c\rangle\}$则 $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle b',a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,b'\rangle\}$. R 的(联络)图表示形如钻石(diamond), 将其有向边的箭头倒置,便得到 R^{-1}的联络图.所以 $R\circ R^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,b'\rangle,\langle b',b\rangle\langle b',b'\rangle\}$,而 $R^{-1}\circ R=\{\langle b,b\rangle,\langle b,b'\rangle,\langle b',b\rangle,\langle b',b'\rangle,\langle c,c\rangle\}$, 因此 $R\circ R^{-1}$, $R^{-1}\circ R$ 与 I 三者互不相同.同时这也说明复合运算“$\circ$”不可交换.

- 作为$\mathscr{P}(A^2)$上的二元运算, “$\circ$”满足结合律.(易证) □

实际上, 在更一般的框架下, 设 $R_1\subseteq A\times B$, $R_2\subseteq B\times C$, $R_3\subseteq C\times D$ 时, 结合律$(R_1\circ R_2)\circ R_3=R_1\circ(R_2\circ R_3)$也成立[①].

证明 注意上式二侧都是二元关系,且包含在 $A\times D$ 之中.

设$\langle x_1,x_4\rangle\in A\times D$.

$$\begin{aligned}
&\langle x_1,x_4\rangle\in(R_1\circ R_2)\circ R_3\\
&\Leftrightarrow \text{存在 } x_3\in C \text{ 使 } \langle x_1,x_3\rangle\in R_1\circ R_2 \text{ 且 } \langle x_3,x_4\rangle\in R_3\\
&\Leftrightarrow \text{ex. } x_3\in C[\text{ex. } x_2\in B(\langle x_1,x_2\rangle\in R_1 \text{ 且 } \langle x_2,x_3\rangle\in R_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{且 } \langle x_3,x_4\rangle\in R_3]\\
&\Leftrightarrow \text{ex. } x_3\in C,\text{ ex. } x_2\in B[\langle x_1,x_2\rangle\in R_1 \text{ 且 } \langle x_2,x_3\rangle\in R_2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{且 } \langle x_3,x_4\rangle\in R_3]\\
&\Leftrightarrow \text{ex. } x_2\in B[\text{ex. } x_3\in C(\langle x_2,x_3\rangle\in R_2 \text{ 且 } \langle x_3,x_4\rangle\in R_3)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{且 } \langle x_1,x_2\rangle\in R_1]\\
&\Leftrightarrow \text{ex. } x_2\in B(\langle x_2,x_4\rangle\in R_2\circ R_3 \text{ 且 } \langle x_1,x_2\rangle\in R_1)
\end{aligned}$$

① 作为代数结构,$\langle\mathscr{P}(A^2),\circ,I_A\rangle$是一个单位半群(monoid), 但一般不是一个群.

$$\Leftrightarrow (\langle x_1, x_4\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3))^{①}. \qquad \square$$

• 复合运算的叠代(归纳法定义). $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, …, $R^{n+1} = R^n \circ R$.

定理 2.1.1 设 $R, R_1, R_2 \in \mathscr{P}(A^2)$.(不妨设 $A \neq \varnothing$.)

(1) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(2) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$, $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

(3) $R \circ (R_1 \cup R_2) = (R \circ R_1) \cup (R \circ R_2)$;

(4) $(R_1 - R_2)^{-1} = R_1^{-1} - R_2^{-1}$;

(5) $(R^C)^{-1} = (R^{-1})^C$;

(6) 若 $R_1 \subseteq R_2$, 则 $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

(7) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$,

更一般, $(R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n)^{-1} = R_n^{-1} \circ R_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

证明 以(2)、(5)、(7)为例证明之,其余作为练习.

(2) 任取 $\langle x, y\rangle \in A^2$, $\langle x, y\rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1$, 且 $\langle y, x\rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1^{-1}$, 且 $\langle x, y\rangle \in R_2^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

(5) $\langle x, y\rangle \in (R^C)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R^C \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in A^2$ 且 $\langle y, x\rangle \notin R \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A^2$ 且 $\langle x, y\rangle \notin R^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (R^{-1})^C$.

(7) $\langle x, y\rangle \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow$ ex. $z \in A$ 使 $\langle y, z\rangle \in R_1$ 且 $\langle z, x\rangle \in R_2 \Leftrightarrow$ ex. z $(\langle z, y\rangle \in R_1^{-1}$ 且 $\langle x, z\rangle \in R_2^{-1}) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

进一步作归纳法拓广时, 只需考察归纳步骤.

$$\begin{aligned}(R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n \circ R_{n+1})^{-1} &= [(R_1 \circ \cdots \circ R_n) \circ R_{n+1}]^{-1} \\ &= R_{n+1}^{-1} \circ (R_1 \circ \cdots \circ R_n)^{-1} = R_{n+1}^{-1} \circ (R_n^{-1} \circ \cdots \circ R_1^{-1}) \\ &= R_{n+1}^{-1} \circ R_n^{-1} \circ \cdots \circ R_1^{-1}.\end{aligned}$$

上面论证中应用了归纳假设(In. hyp.)及复合运算∘的结合律. $\square$

上面性质(7), 在日常生活中有一个很形象的类比: 穿衣 (内衣→衬衫→毛衣→…→外套)与脱衣(外套→…→毛衣→衬衫→内衣)两个互逆的过程.而在计算机科学中, 则对应“先进后出”的缓冲器(first in-last out buffer)或堆栈(stack)的操作过程.

---

① 从数学角度看, 这里的论证有点过于繁琐.由于有直观导引, 通常不会错. 但在作类似的形式推演时,初学者容易犯疑或出错. 例如,第三个与第四个“⇔”中“ex.”与“且”之间的操作一般必须小心.但这里却无妨.本书逻辑部分将回到此问题.

3．二元关系本身(序对的集合)所特有的若干概念与性质．

定义 2.1.5 设 $R\subseteq A^2$．

(1) $\forall a\in A$，有$\langle a,a\rangle\in R$,则称 R 是**自反**(或**反射**)的(reflexive)；

若$\forall a\in A$，总有$\langle a,a\rangle\notin R$,则称是**反自反**的(anti-reflexive)[1]．

(2) 若$\forall\langle a,a'\rangle\in A^2$，$\langle a,a'\rangle\in R\Rightarrow\langle a',a\rangle\in R$ 则称 R 是**对称**的(symmetric)；

若$\forall a,a'\in A$，$\langle a,a'\rangle\in R$ 且 $\langle a',a\rangle\in R\Rightarrow a=b$，则称 R 是**反对称**的(antisymmetric)[2]．

(3) 若对 $a,b,c\in A$，$\langle a,b\rangle\in R$ 且 $\langle b,c\rangle\in R\Rightarrow\langle a,c\rangle\in R$,称 R 是**传递**的(transitive)．

(4) 若 R 是自反、对称且传递的二元关系，则称 R 是**等价**关系．

例 7

• 自然数集N ≤满足自反、反对称及传递性.(称具有这三个性质的二元关系为偏序关系.)

• N <(即例 1 中之 L)是(严格)反对称且传递的,但非对称也非自反的.

• N 3 同余关系是自反、对称和传递的,故是一个等价关系.

• 相等关系 I 是最小的(关于$\subseteq$)的等价关系. □

下面一个反对称的特征可能与其名称更“接近”一点.

引理 2.1.2 $R\subseteq A^2$．R 是反对称的 iff 对 $a,b\in A$，$\langle a,b\rangle\in R$ 且 $a\neq b\Rightarrow\langle b,a\rangle\notin R$．

证明 ($\Rightarrow$)(反证) 假设有 $a,b\in A$，$a\neq b$，$\langle a,b\rangle\in R$ 且 $\langle b,a\rangle\in R$.由 R 之反对称性(定义)，可得 $a=b$．矛盾．

($\Leftarrow$)(反证) 设 R 不是反对称，则存在$\langle a,b\rangle\in R$ 且$\langle b,a\rangle\in R$ 但 $a\neq b$．由题设，$a\neq b$ 且$\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow\langle b,a\rangle\notin R$.又导出矛盾． □

由此引理可引出反对称的严格形式．

定义 2.1.6 $R\subseteq A^2$,称 R 是严格反对称的,若 $\forall\langle a,b\rangle\in A^2$,$\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow\langle b,a\rangle\notin R$．

上面的定义是局部(local)式的刻画，它们各有整体(global)式的特征．

定理 2.1.3 设 $R\in\mathscr{P}(A^2)$．

(1) R 是自反的 iff $I_A\subseteq R$;(“自反”又称为“反射”，reflexive)

---

① 也有文献称为 irreflexive,但这里不是字面上的“非反射”的意思．

② 有的教科书中，将反对称性定义为“$\forall x,y,\langle x,y\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\notin R$”.这里称之为**严格反对称性**．这两个概念不完全一致.类似于严格(偏)序<与一般偏序≤之间的区别，非实质性.本书采用上述的定义模式,目的是为了与传统的偏序(≤)概念中的“反对称”条款一致．

R 是反自反的　iff　$R \cap I_A = \varnothing$.

(2) R 是对称的　iff　$R = R^{-1}$(或 $R^{-1} \subseteq R$);

R 是反对称的　iff　$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.($R$ 是严格反对称的　iff　$R \cap R^{-1} = \varnothing$.)

(3) R 是传递的　iff　$R \circ R \subseteq R$.

证明不难,作为练习.相应概念的几何表示,参见下文练习.

例 8

• $\mathscr{P}(A)$上的二元关系$\subseteq$是自反、传递与反对称的(是一种偏序).而严格包含$\subset$在$\mathscr{P}(A)$上是反自反、可传递及严格的反对称(是一种严格偏序).

• N　　　D(例 3)是自反、传递、反对称的. dom $D = \mathrm{N}^+$, ran $D =$ N　　$D^- = D - I_{\mathrm{N}}$是严格的整除关系.D^-是传递与严格反对称及反自反的.

下面讨论二元关系的闭包运算,其中最重要的是传递闭包的概念.

定义 2.1.7　令 $R \subseteq \overline{R} \subseteq A^2$.称 $\overline{R}$ 是 R 的传递(自反、对称)闭包,若

(1) $\overline{R}$ 本身是传递(自反、对称)的;

(2) 对任 A 上的传递(自反、对称)的二元关系 R', $R \subseteq R' \Rightarrow \overline{R} \subseteq R'$(最小性).

记 R 的自反闭包为 $r(R)$,对称闭包为 $s(R)$,传递闭包为 $t(R)$.在文献中,$t(R)$更多的记为 R^+,R 的自反传递闭包记为 R^*.(其中"$*$"称为 Kleene star 运算.)

例 9　R 是自反的 iff $r(R) \subseteq R$; R 是对称的 iff $s(R) \subseteq R$; R 是传递的 iff $t(R) \subseteq R$. 且 $r(\cdot)$,$s(\cdot)$与 $t(\cdot)$都是$\mathscr{P}(A^2)$上的单调算子(关于$\subseteq$).

例 10　设 R 是例 6 中那个钻石形的二元关系,其三个闭包也分别图示如下(图 2.1.3):

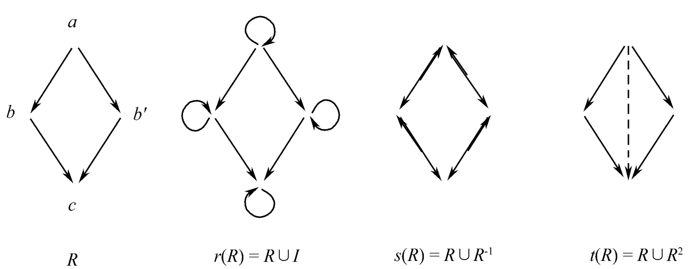


图 2.1.3

例 11　称一个二元关系 R(over A)具有欧几里德(Euclid)性质,指对 A 中任三个元素 x, y, z,若 zRx 且 zRy 则 xRy①.试证:若 S 是一个自反、传递的关系,

① accessibility 关系之欧氏性质,在认知科学(epistemology)中有用.(对应 negative introspection)

则 S 是等价关系当且仅当 S 具欧几里德性质.

解 更确切地,可以归结为:对称性 $\xrightleftharpoons[\text{自反性}]{\text{传递性}}$ 欧氏性质. 有一个直观的图示证明. □

定理 2.1.4 设 $R \subseteq A \times A$. 则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$;

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 其中, $R^2 = R \circ R$, …, $R^{k+1} = R^k \circ R$ 都是二元关系, 故 $t(R) \subseteq A \times A$.

证明 (1)与(2)易. 下面验证(3).

- 显然 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.
- 设 $\langle x, y\rangle$, $\langle y, z\rangle \in \bigcup_i R^i$, 则存在自然数 m 与 n 使 $\langle x, y\rangle \in R^m$, $\langle y, z\rangle \in R^n$. 进而 $\langle x, z\rangle \in R^m \circ R^n = R^{m+n} \subseteq \bigcup_i R^i$.(等式 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$ 的验证见练习.) 因此 $\bigcup_i R^i$ 是传递的.
- 设 $R' \in \mathscr{P}(A^2)$ 是传递的, 且 $R \subseteq R'$. 所以 $R^2 \subseteq R' \circ R' \subseteq R'$.

反复应用复合算子的单调性及 R' 之传递性的整体特征, 用归纳法可证: 对任意自然数 $i \geqslant 1$, $R^i \subseteq R'$. 因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$(最小性). 遂证 $\bigcup_i R^i$ 是 R 的传递闭包. □

$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 实际上是 R 之传递闭包 $t(R)$ 的一个 from bottom up 式的(递归)逼近式构造.

传递闭包的概念在计算机科学中有广泛的应用.其几何直观即是图的连通性(reachability).许多具体问题的计算可以归结到所谓的连通性问题.下例是 $t(R)$ 的一个具体的计算. 更一般的结果可参见练习 2.1.10.

例 12 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle\}$. $R^1 = R$, $R^1 \cup R^2$, $R^1 \cup R^2 \cup R^3$ 及 $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$ 的计算过程如图 2.1.4 所示.

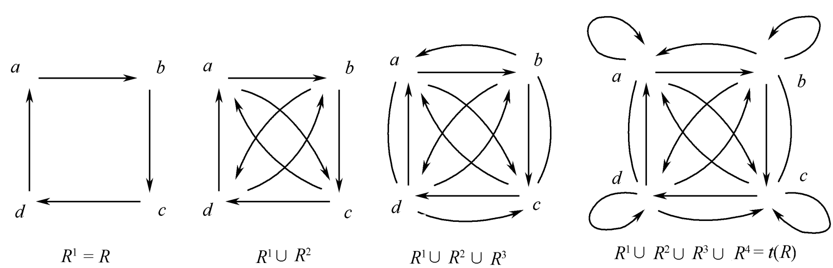


图 2.1.4