

本书由国防科学技术大学研究生院出版基金资助出版

科学版研究生教学丛书

小波的理论与应用

成礼智 王红霞 罗 永 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是作者在为应用数学与计算数学专业的研究生多年授课的基础上, 结合自己的科研成果编写而成的. 全书分上、下两篇, 上篇为小波的基本理论与方法, 包括: 傅里叶分析简介, Haar 小波分析, 多分辨分析与小波构造, 多带小波与多带小波的设计, 多分辨分析和离散多小波变换, 基于提升格式的小波及其相关整数离散变换; 下篇为小波变换的应用, 包括: 小波在图像压缩中的应用, 小波变换在图像去噪与图像增强中的应用, 脊波变换理论及其应用, 小波变换在数字水印中的应用, 基于小波的微分方程求解方法, 基于小波与多重网格方法的 Toeplitz 系统求解.

本书可供数学与信息专业以及相关专业的研究生和从事相关专业的科研、教学人员参考和学习.

图书在版编目 (CIP) 数据

小波的理论与应用/成礼智等编著. —北京: 科学出版社, 2004
(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-014050-8

I. 小… II. 成… III. 小波分析-研究生-教材 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 078202 号

责任编辑: 刘俊来 李鹏奇/责任校对: 刘小梅

责任印制: 张克忠/封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 9 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2006 年 10 月第三次印刷 印张: 27

印数: 5 001—6 000 字数: 515 000

定价: 40.00 元 (含光盘)

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

前 言

作者根据应用数学与计算数学专业硕士研究生以及工科博士生“小波分析及其应用”课程的讲稿，经过三年多时间的不断完善和修改完成了本书的编写工作。

从数学的角度来看，小波实际上是在特定空间内按照称之为小波的基函数（通常具有鲜明的物理意义）对数学表达式的展开与逼近。作为一种快速高效、高精度的近似方法，小波理论构成调和分析领域中傅里叶分析的重要发展。与傅里叶变换由三角基函数构成相比，小波基函数大多为具有快速衰减、充分光滑、能量主要集中在一个局部区域的函数 $\psi(x)$ 经过伸缩与平移得到的函数集合 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left[\frac{x-b}{a} \right] \right\}_{a \neq 0, b}$ ，其中 b 起到平移的作用，而 a 为伸缩因子（ a 作为一种尺度在变化时产生多分辨的特性）。因此，从信号处理的角度来看，作为一种新的时频分析工具，小波克服了傅里叶分析方法表示信息时能够清晰地揭示出信号的频率特征但不能反映时间域上的局部信息的缺陷，而局部性质的描述无论是在理论还是在实际应用方面都是十分重要的。当利用小波实施时频分析时，由于同时具有时间和频率的局部特性以及多分辨分析特性，使得对非平稳信号的处理变得相对容易。

需要看到的是，经典的小波理论尽管在 90 年代初期已经显得非常完善，但在实际应用中仍然存在许多缺陷。例如，为了进一步提高小波的计算速度、简化小波实现难度以及克服常见小波基函数不能无损表示信息的弊端，Sweldens 在 1995 年系统地提出通过矩阵的提升格式（lifting scheme）来研究完全重构滤波器，从而建立了称之为第二代小波变换的框架体系。另外，为了避免实系数小波不具有平移不变性以及方向性能差等缺陷，Kingsbury 等在 1999 年对复数小波进行研究并在图像去噪等方面获得成功应用。同时，为了克服经典小波分析二维或者更高维奇异性达不到最优的缺陷，Candès 与 Donoho 等人在 1999 年提出了脊波（ridgelet）与曲波（curvelet）理论。目前，基于提升格式的小波、脊波或者曲波也已经成功地应用于数学以及信息处理的各个领域。

作为研究生的教材，除了需要介绍小波的基本理论与方法外，同时介绍最新理论与应用成果也显得十分必要。正是在此背景下，作者编写了本书，并花费大量的笔墨对小波理论的最新发展以及各种应用进行了力所能及的描述。本书中许多内容是尚未见诸其他专著的，例如，Kingsbury 关于复数小波方面的工作，

Canç s 与 Dohono 关于脊波与曲波方面的工作, 作者关于多带小波构造、整数小波与离散变换设计及其在图像压缩与数字水印中的应用, 以及基于小波与多重网格方法求解病态方程组方面的工作等.

全书按照上下篇的方式编写, 其中上篇为小波变换的基本理论与方法, 而下篇则集中在小波变换的应用. 全书共 12 章, 第 1 章至第 4 章以及第 6、第 7 章由成礼智编写, 第 5 章与第 8 章由成礼智和王红霞合作编写, 第 9、第 11 章以及第 12 章由王红霞编写, 第 10 章由罗永编写. 具体内容安排如下:

基础篇

第 1 章为傅里叶分析理论, 讲述了傅里叶级数、连续与离散傅里叶变换的理论与算法.

第 2 章介绍与小波相关的数学基础知识, 主要内容包括内积空间的基本概念与性质.

第 3 章通过对 Haar 函数系的特征进行全面而详尽分析, 希望使读者对小波函数的多尺度(多分辨)特性有一个初步的了解.

第 4 章为多分辨分析理论, 并在此基础上讨论了小波函数的构造, 主要介绍多分辨分析的概念及其信号分解和重构方法, 基于 Daubechies 方法的正交小波构造和对称双正交小波构造、有理化系数小波构造等.

第 5 章为多带与多小波的设计, 主要介绍正交滤波器组的设计, M 带正交镜像滤波器组(QMF)的构造, 正交小波与对称双正交多带小波以及多小波的构造方法.

第 6 章介绍基于提升格式的整数实现小波的设计及其在离散变换整数算法方面的应用.

应用篇

第 7 章讨论小波变换在图像压缩中的应用. 主要内容包括: 首先研究基于小波变换的主要图像编码方法(零树编码—EZW、基于集合分层树结构编码—SPIHT、基于行的编码—line based coding、嵌入式块最优截断编码—EBCOT), 在此基础上针对图像以及小波分解的特征, 研究基于小波与离散变换的快速、高精度的整数实现压缩算法.

第 8 章讨论小波在信号的瞬态特征检测中的应用, 并讨论实小波、复数小波理论及其在去噪与图像增强中的应用, 作为比较, 本章还简单介绍了几种经典的图像恢复(去噪)方法以及相关结果.

第 9 章介绍脊波变换的概念、性质及其在图像恢复(去噪)以及图像增强中的应用.

第 10 章讨论小波变换在数字水印中的应用.

第 11 章研究基于小波的偏微分方程数值解法.

第 12 章介绍基于小波与多重网格方法的病态 Toeplitz 系统求解方法.

迄今为止, 小波分析的研究专著大致可以分为应用数学类与工程类两种, 如何做到小波理论与应用的有机结合具有挑战性, 这不仅需要对小波理论具有较深入的了解, 让人真正了解详细的应用过程, 还必须大量从事应用性科研课题研究才能做到. 最近 10 年来, 作者在从事小波分析和快速算法理论研究的过程中, 承担了多项相关的国家自然科学基金、国家“863”计划项目、国防“八五”、“九五”、“十五”预研等理论或应用性课题, 因此书中包含了作者许多理论与应用性研究成果. 但由于作者的能力以及涉及的领域有限, 本书自然难免有不当之处, 尤其是谬误在所难免, 作者真诚欢迎同仁们的批评与帮助. 在写作该书的过程中, 得到梁甸农、王正明、吴翊以及罗建书四位教授的鼓励和帮助, 在与钟广军博士、郭汉伟博士等关于小波应用的讨论中也受益匪浅. 另外, 硕士研究生张增辉、张雄明、蔡红萍、陈波、张一、舒传华、赵军海、刘涛等为本书的编写提供了大量有价值的材料, 同时他们还参加了主要程序的调试工作. 国防科学技术大学研究生院对本书的出版提供了资助, 在此向他们一并表示谢意.

本书可以作为数学与信息科学相关专业的硕士研究生或博士研究生的教材或参考书, 也可供从事有关研究的科技和工程人员参考.

编著者

目 录

前言

上 篇

第 1 章 傅里叶分析简介	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 傅里叶级数初步	(3)
1.3 连续傅里叶变换	(14)
1.4 采样定理与测不准原理	(25)
1.5 离散傅里叶变换	(29)
习题 1	(31)
第 2 章 数学预备知识	(33)
2.1 Euclid 算法与矩阵提升分解格式	(33)
2.2 Hilbert 空间	(38)
2.3 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的正交函数系 $\{\varphi(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$	(44)
2.4 Hilbert 空间中的框架	(48)
习题 2	(53)
第 3 章 Haar 小波分析	(55)
3.1 短时傅里叶变换	(55)
3.2 Haar 小波	(59)
3.3 基于 Haar 小波的信号分解与重构算法	(64)
习题 3	(73)
第 4 章 多分辨分析与小波构造	(75)
4.1 多分辨分析的概念与性质	(75)
4.2 信号分解与重构的 Mallat 算法	(83)
4.3 Mallat 算法实现中的几个问题	(88)
4.4 小波包分析	(94)
4.5 尺度函数的计算	(97)
4.6 Daubechies 正交紧支集小波	(100)
4.7 有理化系数紧支集正交小波	(113)
4.8 双正交多分辨分析	(116)

4.9	双正交对称紧支集小波的构造	(118)
4.10	完全重构滤波器与双正交小波系数的有理化设计	(125)
	习题 4	(131)
第 5 章	多带小波与多小波的设计	(133)
5.1	引言	(133)
5.2	多采样率信号处理基础	(134)
5.3	完全重构滤波器 (PRFB) 的性质	(135)
5.4	基于三角基函数的块变换与重叠式变换	(143)
5.5	PR 滤波器组和多带小波	(147)
5.6	多滤波器组与多小波	(171)
5.7	正交多小波多分辨分析和离散多小波变换	(175)
5.8	多小波变换构造的一般原理	(177)
5.9	正交多小波的构造	(178)
	习题 5	(197)
第 6 章	基于提升格式的小波及其相关整数离散变换	(200)
6.1	引言	(200)
6.2	基于提升格式的小波变换设计	(200)
6.3	整数 DCT 及其快速算法	(211)
6.4	双正交重叠式变换的整数实现	(221)
	习题 6	(224)
<h2>下 篇</h2>		
第 7 章	小波在图像压缩中的应用	(225)
7.1	图像编码简介	(225)
7.2	渐进式图像编码	(230)
7.3	基于行的图像编码方法	(245)
7.4	嵌入式块最优截断 (EBCOT) 编码	(251)
7.5	图像变换中小波快速算法设计	(255)
7.6	多小波在图像压缩中的应用	(261)
	习题 7	(267)
第 8 章	小波变换在图像去噪与图像增强中的应用	(269)
8.1	信号的奇异性检测与小波模极大值	(269)
8.2	阈值去噪方法	(271)
8.3	比例萎缩去噪方法	(280)
8.4	相关法去噪方法	(283)

8.5	图像去噪中的其它小波方法	(287)
8.6	基于多尺度变换的图像增强技术	(297)
	习题 8	(310)
第 9 章	脊波变换的基本理论及其应用	(311)
9.1	引言	(311)
9.2	脊波分析基本理论	(312)
9.3	脊波变换在信号处理中的应用	(323)
	习题 9	(332)
第 10 章	小波变换在数字水印中的应用	(333)
10.1	引言	(333)
10.2	基于浮点小波变换的数字水印方法	(339)
10.3	整数小波变换的脆弱数字水印方法	(343)
10.4	基于带参数整数小波变换的可见数字水印技术	(348)
10.5	基于带参数整数小波变换的半透明数字水印技术	(356)
10.6	基于带参数整型小波变换的多类水印同时嵌入	(364)
	习题 10	(369)
第 11 章	基于小波求解偏微分方程	(370)
11.1	引言	(370)
11.2	算子 T 的小波表示	(371)
11.3	基于小波变换求解微分方程	(384)
11.4	基于小波多尺度方法求椭圆微分算子的逆	(390)
	习题 11	(395)
第 12 章	基于小波与多重网格方法求解病态 Toeplitz 系统	(396)
12.1	引言	(396)
12.2	多重网格方法	(396)
12.3	基于小波与多重网格方法的病态 Toeplitz 系统求解	(401)
12.4	数值实验结果	(407)
	习题 12	(409)
	参考文献	(411)

上 篇

第 1 章 傅里叶分析简介

1.1 引 言

受热扩散方程数学模型的启发,著名科学家傅里叶在 1807 年向法国国家科学院提交的一篇报告中指出,任何周期函数都可以用一系列正弦波来表示.通过一个半世纪的不断完善与发展,以傅里叶级数和傅里叶积分理论作为主要研究内容的调和分析理论已经在数学、物理学以及工程实践中得到广泛应用.本书将要重点介绍的小波理论正是在人们充分研究了傅里叶分析方法的特点与局限性后建立起来的,因此,结合本书的需要,本章介绍傅里叶分析的基本概念与基础理论.

首先,通过下面的例子说明傅里叶分析在实际问题中具有广泛的应用特性.

例 1.1 考虑下面的热传导方程

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & 0 < t, 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = A, & u(\pi, t) = B \end{cases} \quad (1.1)$$

上述偏微分方程的解 $u(x, t)$ 表示长度为 π 的导体在位置 x 、时间 t 时的温度.其中 $t=0$ 时 x 处的初始温度为 $f(x)$,而导体在端点 $x=0, x=\pi$ 处的温度保持不变,分别为 A 与 B .为了便于求解,不妨假设 $A=B=0$.

下面考虑利用变量分离法求解上述方程.假设解具有形式

$$u(x, t) = Y(x) V(t)$$

其中函数 Y 与 V 分别为关于点 x 与时间 t 的函数,其定义域分别为 $0 \leq t, 0 \leq x \leq \pi$.

将上述表达式代入到(1.1)的第一式直接得到

$$Y(x) V'(t) = Y''(x) V(t) \quad \text{或者等价地} \quad \frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} \quad (1.2)$$

(1.2)式的第二式中的左右两端分别为 t 与 x 的函数.由于 t 与 x 相互独立,因此存在常数 c 使得 $\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = c$ 成立.按照上述方程的第一个表达式得到 $V(t) = de^{ct}$ 对于某个常数 d 成立.考虑到 $V(t)$ 的物理特性,常数 c 不可能为正数

(否则 $\lim_{t \rightarrow \infty} |V(t)| = +\infty$), 同时 c 也不可能为 0 (否则 $V(t) = d$), 因此存在正数 λ 使得 $c = -\lambda^2$, 即 $V(t) = de^{-\lambda^2 t}$. 将之代入(1.2)式得

$$Y''(x) + \lambda^2 Y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad Y(0) = 0, \quad Y(\pi) = 0 \quad (1.3)$$

解上述微分方程的边值问题得到

$$Y(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x)$$

利用边值条件进行检验有 $a = Y(0) = 0$ 以及 $Y(\pi) = b \sin(\lambda \pi) = 0$. 因此 λ 必须为正整数, 设 $\lambda = k$, 而对应的系数 b 相应变为 b_k , 即 $Y_k(x) = b_k \sin(kx)$ 为方程(1.3)的解. 注意到对于任意自然数 k , $Y_k(x)$ 均满足方程(1.3), 结合 $V(t) = de^{-\lambda^2 t}$, 得到

$$u_k(x, t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

为方程(1.1)的一个解, 而一般解通过特解的叠加得到

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad (1.4)$$

利用 $f(x) = u(x, 0)$ 以及(1.4)式有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (1.5)$$

称(1.5)式为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开. 而系数 b_k 由函数 $f(x)$ 确定, 至于如何确定将在下几节加以讨论.

例 1.2 基于傅里叶级数的信号分析方法.

考察正弦波函数 $\sin(kt)$, 显然, 该函数周期为 $\frac{2\pi}{k}$, 对应的频率为 k , 一般乐器发出的声音以及电压等信号都可以通过具有不同频率的正弦波函数叠加来表示. 例如, 形如 $100\sin(t) + 3\sin(20t) - 0.5\sin(100t)$ 的信号在持续为 2π 时间段内分别振动次数为 1, 20 以及 100, 其中, 频率为 1 的分量振幅最大, 达到 100 (具有决定性作用). 一般情形下, 信号 $f(t)$ 可以用下面正弦波的无穷和形式来进行分解

$$f(t) \sim a_0 + \sum_k [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \quad (1.6)$$

按照(1.6)式进行正弦波分解可以很方便的对信号实现压缩与去噪. 事实上, 由于在实际应用中碰到的信号其频率均限制在某个特定的范围之内, 因此存在自然数 N , 当 $|k| > N$ 时满足 $a_k = b_k = 0$. 这表明, 如果对于接收到的实际信号实行正弦波叠加分解时出现 $|k| > N$ 而 $(a_k, b_k) \neq (0, 0)$ 的情况, 说明接收信号过程中混入噪声, 因此直接设定 $a_k = b_k = 0$ 便达到去除高频噪声的目的. 另外, 利用 Riemann-Lebesgue 引理, 知道 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. 这表明, 一般的实际信号(能量有限)中高频成分随着频率 k 变大时, 其值变得越来越大, 信号主要成分为少数系数(振幅)所控制, 因此, 设定阈值 ϵ , 只要 $|a_k| < \epsilon$, $|b_k| < \epsilon$, 则令 $a_k = b_k = 0$, 可以在高保真的

前提下达到信号压缩的目的。

上面两个例子说明了傅里叶级数的应用.但在上述例子中按照傅里叶级数进行展开时还有一些问题没有得到解决.例如,(1.5)式中系数 b_k 如何确定,例 1.1 中导体的长度不等于 π 时如何求解,信号持续的时间段为一般的 l , $l \leq \infty$ 时如何实现信号分解等,这些问题将在下面的几节中逐步加以解决.

1.2 傅里叶级数初步

本节讨论函数的傅里叶级数展开问题,首先限制函数的定义区间为 $[-\pi, \pi]$, 然后对一般的区间进行讨论.为此需要建立下面的基本结论.

引理 1.1(三角基函数的正交性质) 由三角基函数组成的集合

$$\left\{ \dots, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交,即

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx &= 0, \quad n, m \in \mathbf{Z} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 1, & n = m \geq 1 \\ 2, & n = m = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 1, & n = m \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

证明 引理的证明需要下面三角函数的积化和差公式

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

因此当 $m \neq n$ 时有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

而当 $m = n \geq 1$ 时,有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2nx) dx = \pi$$

故(1.7)式的第二个式子成立. 至于其他两个表达式的证明, 完全类似, 为简便计略去.

利用引理 1.1, 证明下述函数的傅里叶展开定理.

定理 1.1 设定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数展开为

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (1.8)$$

则其傅里叶系数满足

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (1.9)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

证明 为简单计, 只计算系数 $a_k (k \neq 0)$.

在(1.8)式中两边乘上 $\cos(nx)$ 实施积分运算并利用引理 1.1 得到

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right] \cos(nx) dx \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(nx) dx \\ &= a_n \pi \end{aligned}$$

因此(1.10)式的第一个式子成立, 同理得到其他两个式子成立.

需要说明的是, 对于定义在区间 $[a, a+2\pi]$ 上的周期为 2π 的函数 $G(x)$, 可以很容易地证明 $\int_a^{a+2\pi} G(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} G(x) dx$. 因此利用该式以及(1.9)式与(1.10)式不难知道定义在任意长度为 2π 区间上的周期函数, 其傅里叶级数展开与(1.8)式相同.

现在讨论定义区间为任意长度 l 时函数的傅里叶级数展开问题. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$, $l = b - a$ 上, 为了利用区间 $[-\pi, \pi]$ 上函数的傅里叶级数展开性质, 做线性变换 $x = \frac{l}{2\pi} t + \frac{a+b}{2}$, 则当 $t \in [-\pi, \pi]$ 时, $x \in [a, b]$, 此时构造函数 $f(x) = f\left[\frac{l}{2\pi} t + \frac{a+b}{2}\right] = F(t)$, 则 $F(t)$ 为定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上周期为 2π 的函数, 利用定理 1.1, $F(t)$ 存在下面的傅里叶级数展开

$$f(x) = F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(kt) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(kt) dt, k = 1, 2, 3, \dots$$

由于 $t = \frac{2\pi}{l}x - \frac{a+b}{l}\pi$, 因此有

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) dx \quad (1.11)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(kt) dt = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \cos\left[\frac{2}{l}x - \frac{a+b}{l}\right] k\pi dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \sin\left[\frac{2}{l}x - \frac{a+b}{l}\right] k\pi dx \quad (1.12)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

以及

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left[\frac{2}{l}x - \frac{a+b}{l}\right] k\pi + b_k \sin\left[\frac{2}{l}x - \frac{a+b}{l}\right] k\pi \right] \quad (1.13)$$

下面讨论傅里叶级数(1.8)式以及(1.13)式的收敛性问题. 主要讨论三种收敛性, 分别为逐点收敛、一致收敛以及平均收敛. 首先讨论逐点收敛的一个充分条件.

定理 1.2 假设函数 $f(x)$ 为每个点存在左、右导函数且周期为 2π 的分段连续函数, 则在点 x 处函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛到函数

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (1.14)$$

证明 首先假设函数 $f(x)$ 在点 x 处连续且存在导数, 其部分和为

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

利用(1.9)式与(1.10)式可以将上式等价地表示为

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)) \right] dt$$

又由三角求和公式得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N [\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)] &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(t-x) \\ &= \begin{cases} \frac{\sin\left[N + \frac{1}{2}\right](t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}, & t \neq x \\ N + \frac{1}{2}, & t = x \end{cases} \end{aligned}$$

因此

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin \left[N + \frac{1}{2} \right] (t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} \right] dt \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_N(t-x) dt \quad (1.15)$$

其中 $P_N(y) = \frac{\sin \left[N + \frac{1}{2} \right] y}{2\pi \sin \frac{y}{2}}$ 称之为 Poisson 核, 显然有

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_N(y) dy = 1 \quad (1.16)$$

由于 $f(x)$ 以及 $P_N(x)$ 以 2π 为周期, 因此推得

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_N(t-x) dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(y+x) P_N(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) P_N(y) dy \end{aligned} \quad (1.17)$$

由(1.16)式与(1.17)式知道

$$\begin{aligned} f(x) - S_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+y)] P_N(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x) - f(x+y)}{\sin \frac{y}{2}} \right] \sin \left[\left[N + \frac{1}{2} \right] y \right] dy \end{aligned}$$

记 $F(y) = \frac{f(x) - f(x+y)}{\sin \frac{y}{2}}$, 由于 $\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = -2f'(x)$, 这表明 $F(y)$ 在区间

$[-\pi, \pi]$ 上连续, 因此利用 Riemann-Lebesgue 引理得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{f(x) - f(x+y)}{\sin \frac{y}{2}} \right] \sin \left[\left[N + \frac{1}{2} \right] y \right] dy \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

此即 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$, 这便证明了函数连续且导函数存在时傅里叶级数的收敛性定理.

下面研究 x 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点且其左右导函数均存在时的收敛性问题.

注意到函数 $P_N(y) = \frac{\sin \left[N + \frac{1}{2} \right] y}{2\pi \sin \frac{y}{2}}$ 为偶函数以及(1.16)式推得

$$\int_0^{\pi} P_N(y) dy = \int_{-\pi}^0 P_N(y) dy = \frac{1}{2} \quad (1.18)$$

为了证明定理,下面分别证明

$$\int_0^{\pi} f(y+x) P_N(y) dy \rightarrow \frac{f(x+0)}{2}$$

$$\int_{-\pi}^0 f(y+x) P_N(y) dy \rightarrow \frac{f(x-0)}{2}$$

利用(1.18)式,上式等价于

$$\int_0^{\pi} [f(y+x) - f(x+0)] P_N(y) dy \rightarrow 0$$

$$\int_{-\pi}^0 [f(y+x) - f(x-0)] P_N(y) dy \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

事实上,构造函数

$$F(y) = \frac{f(x+0) - f(x+y)}{\sin \frac{y}{2}}$$

则有 $\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = -2f'(x+0)$, 因此,利用 Riemann-Lebesgue 引理,(1.19)式的第一个式子成立,同理可以证明其第二式也成立.

现在来讨论傅里叶级数部分和的一致收敛性问题. $S_n(x)$ 一致收敛到函数 $f(x)$ 是指收敛性和收敛速度与点 x 无关,即任给正数 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当项数 $n \geq N$ 时, $|S_n(x) - f(x)| < \epsilon$ 对于任意点 $x \in [-\pi, \pi]$ 成立,而一致收敛不成立则意味着存在某个正数 $\epsilon > 0$, 对于任给的自然数 N , 都存在项数 $n \geq N$ 以及 $x_n \in [-\pi, \pi]$, 使得 $|S_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$ 成立. 上面的讨论表明,一致收敛比逐点收敛要求更加严格. 1888 年, Michelson 首先发现了函数傅里叶级数逐点收敛但不一致收敛的例子, 1889 年 Gibbs 对此作出了理论上的解释, 因此现在将这一现象称之为 Gibbs 现象, 见图 1-1. 下面通过一个具体例子说明 Gibbs 现象, 并给出理论上的结果.



图 1-1 函数傅里叶级数逼近时 Gibbs 现象描述

例 1.3 考虑 $[-\pi, \pi]$ 上的分段连续函数

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\pi - x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

上述函数在点 $x=0$ 处间断. 下面讨论该函数的傅里叶级数在间断点的收敛性质.

解 不难看出, 函数 $f(x)$ 为奇函数, 因此其傅里叶展开式系数 $a_k=0, k=1, 2, \dots$ 并且满足

$$f(x) \sim 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

因此函数与傅里叶级数部分和的残差为

$$\epsilon_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} - (\pi - x)$$

注意到

$$\epsilon_n'(x) = 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) + 1 = \frac{\sin\left[n + \frac{1}{2}\right]x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \epsilon_n(0) = -\pi$$

因此又有

$$\epsilon_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin\left[n + \frac{1}{2}\right]x}{\sin \frac{x}{2}} dx - \pi$$

实施变量替换 $y = \left[n + \frac{1}{2}\right]x$ 并利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{t}{2n+1}}{\sin\left[\frac{t}{2n+1}\right]} = 1$ 成立, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\frac{y}{2n+1}}{\sin\left[\frac{y}{2n+1}\right]} dy - \pi \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy - \pi \approx 0.562 \end{aligned}$$

上面的表达式说明分段函数的傅里叶级数不具有 一致收敛性 , 其残差值 0.562 大约为函数 $f(x)$ 在间断点 $x=0$ 处跳跃值 $f(0+0) - f(0-0) = 2\pi$ 的 9%, 一般情形下, 可以建立下面的命题.

命题 1.1 设 $f(x)$ 为周期 2π 的有界变差函数, 则对于 $f(x)$ 的第一类间断点 x_0 , 当 $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ 为正(负)时, 其傅里叶级数在趋近点 x_0+0 与 x_0-0 时将超过(或少于) $f(x_0+0)$ 与少于(或超过) $f(x_0-0)$, 超过或者少于的程度约为跳跃度 $|f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ 的 9%.

关于命题 1.1 的详细证明建议读者阅读更一般的调和函数教材或者参考书.

不难看出, 例 1.3 很好地验证了命题 1.1 的正确性, 而命题 1.1 说明对于具有第一类间断点的函数, 其傅里叶级数部分和点收敛而非一致收敛. 下面讨论一致收

敛条件,为此需要介绍分段光滑函数的概念.

如果函数每一个点均存在导函数且导函数分段连续,则称之为分段光滑函数,而下面的定理则给出了一个函数傅里叶级数部分和一致收敛的充分条件.

定理 1.3 分段光滑且以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 其傅里叶级数部分和一致收敛到函数 $f(x)$.

证明 上述定理的严格证明需要过长的篇幅,为简化证明过程此处将条件进一步限制为函数 $f(x)$ 在区间 $x \in [-\pi, \pi]$ 上处处二阶连续可导,而 $f(x)$ 与其二阶导函数 $f''(x)$ 的傅里叶级数分别假设为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ f''(x) &= \sum_n [c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)] \end{aligned}$$

直接推导得到

$$c_n = -n^2 a_n, \quad d_n = -n^2 b_n \quad (1.20)$$

事实上,利用积分的变量替换有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= f(x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \right] \\ &= -\frac{1}{n^2} c_n \end{aligned}$$

同理可以证明(1.20)式的第二个式子成立.

由于假设函数 $f(x)$ 的二阶导函数连续,因此存在常数 M ,使得 $|f''(x)| \leq M$ 在 $x \in [-\pi, \pi]$ 上成立,于是有

$$|c_n| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx \right| \leq 2M$$

类似地 $|d_n| \leq 2M$ 成立.于是函数 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

与函数 $f(x)$ 的差(余项)满足

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|c_n| + |d_n|}{n^2} \end{aligned}$$

$$\leq 4M \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (1.21)$$

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛, (1.21) 式表明函数 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和一致收敛到函数 $f(x)$ 。

现在再来讨论函数的平均收敛性问题。

所谓函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在函数空间 $L^2([- \pi, \pi])$ 内平均收敛指的是存在函数 $f(x) \in L^2([- \pi, \pi])$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (1.22)$$

为了研究傅里叶级数的平均收敛性质, 首先讨论傅里叶基函数的一个投影性质。

引理 1.2 设 $f(x) \in L^2([- \pi, \pi])$, $P_N = \text{span}\{1, \cos(nx), \sin(nx), 1 \leq n \leq N\}$ 为三角基函数张成的空间, 则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

在 L^2 范数的意义下构成 $f(x)$ 在空间 P_N 内的最优逼近, 即

$$\|f - S_N\|_{L^2} = \min_{p \in P_N} \|f - p\|_{L^2} \quad (1.23)$$

证明 设三角多项式 $p \in P_N$, 且 $p(x) = c_0 + \sum_{k=1}^N [c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)]$,

于是

$$\begin{aligned} \|f - p\|_{L^2([- \pi, \pi])}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left[c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)) \right] \right|^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2c_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &\quad - 2 \left[\sum_{k=1}^N (c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + d_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx) \right] \\ &\quad + \sum_{k, n \geq 0} \left[c_k c_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + c_k d_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx \right] \\ &\quad + \sum_{k, n \geq 1} d_k d_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 4\pi c_0 a_0 - 2\pi \sum_{k=1}^N c_k a_k \\ &\quad - 2\pi \sum_{k=1}^N d_k b_k + 2\pi c_0^2 + \pi \sum_{k=1}^N (c_k^2 + d_k^2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

上式的建立利用了三角基函数的正交特性。

为了求出函数 $f(x)$ 在空间 P_N 内的最优逼近, 在(1.24)式中将 $c_k, 0 \leq k \leq N-1, d_k, 1 \leq k \leq N-1$ 看成变量, 于是

$$F(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}, d_1, \dots, d_{N-1}) = \|f - p\|_{L^2[-\pi, \pi]}^2$$

构成一个包含 $2N-1$ 个变量的二次函数, 其极小值可以通过设置偏导数为零得到, 即设

$$\begin{cases} \frac{\partial F(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}, d_1, \dots, d_{N-1})}{\partial c_k} = 0, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{\partial F(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}, d_1, \dots, d_{N-1})}{\partial d_k} = 0, k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (1.25)$$

展开(1.25)式得到一个包含 $2N-1$ 个变量的线性方程组, 解此得到 $c_k = a_k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1; d_k = b_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, 即

$$\|f - S_N\|_{L^2} = \min_{p \in P_N} \|f - p\|_{L^2}$$

成立. 这表明引理结论成立.

下面引入函数傅里叶级数部分和平均收敛的一个定理.

定理 1.4 当函数 $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$ 时, 其傅里叶级数部分和平均收敛到函数 $f(x)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2[-\pi, \pi]} = 0 \quad (1.26)$$

证明 利用泛函分析的基本知识, 对于 $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, 存在光滑且以 2π 为周期的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^2[-\pi, \pi]} = 0$. 即, 任给 $\epsilon > 0$, 存在自然数 M , 当 $n \geq M$ 时, 有 $\|f - f_n\|_{L^2[-\pi, \pi]} < \epsilon$. 另一方面, 对于函数 $f_M(x)$, 设其傅里叶级数部分和为 $S_n(x)$, 则利用函数 $f_M(x)$ 的光滑特性知道 $S_n(x)$ 一致收敛到函数 $f_M(x)$, 此即对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时 $|S_n(x) - f_M(x)| < \epsilon$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致成立.

于是

$$\|S_n(x) - f_M(x)\|_{L^2[-\pi, \pi]}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f_M(x))^2 dx < 2\pi\epsilon^2$$

即

$$\|S_n(x) - f_M(x)\|_{L^2[-\pi, \pi]} < \sqrt{2\pi}\epsilon$$

因此当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} \|S_n(x) - f(x)\|_{L^2[-\pi, \pi]} &\leq \|S_n(x) - f_M(x)\|_{L^2[-\pi, \pi]} + \|f_M(x) - f(x)\|_{L^2[-\pi, \pi]} \\ &< (1 + \sqrt{2\pi})\epsilon \end{aligned}$$

定理证毕.

在应用科学中, 人们常将定义在集合 E 上信号 $f(x)$ 的能量定义为 $\|f\| =$

$\left[\int_E |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$. 下面的 Parseval 方程说明信号的能量可以通过其傅里叶系数来衡量, 并且有下面的定理.

定理 1.5 对于 $f(x) \in L^2([- \pi, \pi])$, 假设实数与复数形式的傅里叶级数分别为

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (1.27)$$

与

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.28)$$

则对应于(1.27)式与(1.28)式分别有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \right] \quad (1.29)$$

与

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad (1.30)$$

更进一步地, 如果 $g(x) \in L^2([- \pi, \pi])$ 以及 $g(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ikx}$, 则(1.30)式变为

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} \quad (1.31)$$

证明 为简便记只证明(1.31)式成立, 其他两个表达式的证明是类似的.

将函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的傅里叶级数部分和分别表示为

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx} \quad \text{与} \quad G_n(x) = \sum_{k=-n}^n \beta_k e^{ikx}$$

利用三角基函数的正交性有 $\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = 2\pi \delta_{n,m}$, 因此

$$\begin{aligned} \langle S_n(x), G_n(x) \rangle &= \sum_{k=-n}^n \sum_{m=-n}^n \alpha_k \overline{\beta_m} \langle e^{ikx}, e^{imx} \rangle \\ &= 2\pi \sum_{k=-n}^n \alpha_k \overline{\beta_k} \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle - \langle S_n, G_n \rangle| &= |\langle f - S_n, g \rangle + \langle S_n, g - G_n \rangle| \\ &\leq \|f - S_n\| \|g\| + \|S_n\| \|g - G_n\| \end{aligned}$$

利用上面的不等式以及定理 1.4, 在 $L^2([- \pi, \pi])$ 的意义下, $S_n(x) \rightarrow f(x)$, $G_n(x) \rightarrow g(x)$ ($n \rightarrow \infty$), 因此(1.31)式成立.

特别地, 如果将(1.30)式的傅里叶级数和进行有限截断, 则得到下面的 Bessel 不等式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \sum_{k=-n}^n |\alpha_k|^2 \quad (1.32)$$

现在通过一个数列级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 的求和计算来说明 Parseval 等式的应用.

事实上,构造函数 $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, 该函数为奇函数, 其傅里叶级数的系数满足 $a_k = 0$, $b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, 于是利用(1.30)式有

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

作为本节的结束, 下面介绍一个非负三角函数开平方的定理, 该定理在正交小波的构造中具有重要作用.

定理 1.6 (Riesz 引理) 设 $a_n \in \mathbf{R}$, $A(\omega) = \sum_{n=0}^N a_n \cos n\omega$ 是一个非负三角多项式, 则存在 N 阶三角多项式 $B(\omega) = \sum_{n=0}^N b_n \cos n\omega$, $b_n \in \mathbf{R}$ 使得 $|B(\omega)|^2 = A(\omega)$.

证明 整个证明是构造性的.

将多项式 $A(\omega)$ 重新表示为

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n (e^{in\omega} + e^{-in\omega}) \\ &= e^{-iN\omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} e^{in\omega} + a_0 e^{iN\omega} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n e^{i(N+n)\omega} \right] \end{aligned}$$

引进复变量 $z = e^{i\omega}$ 的多项式

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{N-n} z^n + a_0 z^N + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n z^{N+n}$$

$P_A(z)$ 存在 $2N$ 个零点. 下面说明, 如果 z_0 是 $P_A(z)$ 的零点, 则 z_0^{-1} , \bar{z}_0 , \bar{z}_0^{-1} 都是 $P_A(z)$ 的零点.

事实上, 由于 $a_n \in \mathbf{R}$, 因此 $P_A(z) = P_A(\bar{z})$, 故 z_0 , \bar{z}_0 同时为 $P_A(z)$ 的零点. 此外, 在单位圆 $\{|z|=1\}$ 上, $A(\omega) = A(-\omega)$, $P_A(e^{i\omega}) = e^{iN\omega} A(\omega)$ 故有

$$e^{2iN\omega} P_A(e^{-i\omega}) = e^{iN\omega} A(-\omega) = e^{iN\omega} A(\omega) = P_A(e^{i\omega}),$$

这说明两个多项式 $z^{2N} P_A(z^{-1})$ 与 $P_A(z)$ 在单位圆上一致, 故处处相等. 因此, $P_A(z) = 0$ 等价于 $P_A(z^{-1}) = 0$. 但是, $a_N \neq 0$, 因此 $z = 0$ 不是多项式 $P_A(z) = 0$ 的

根,而 z_0^{-1} , z_0 , z_0^{-1} 都是 $P_A(z)$ 的零点.于是

$$P_A(z) = \frac{1}{2} a_N \prod_k [(z - r_k)(z - r_k^{-1})] \\ \cdot \prod_j [(z - z_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j)(z - \bar{z}_j^{-1})]$$

由于在单位圆上,即 $z = e^{i\omega}$,有 $|(e^{i\omega} - z_0)(e^{i\omega} - z_0^{-1})| = |z_0|^{-1} |e^{i\omega} - z_0|^2$.因此

$$A(\omega) = |A(\omega)| = |P_A(e^{i\omega})| = \left[\left[\frac{1}{2} |a_N| \right]^{\frac{1}{2}} \prod_k |r_k|^{-\frac{1}{2}} \prod_j |z_j|^{-1} \right]^2 \\ \cdot \left| \prod_k (e^{i\omega} - r_k) \prod_j (e^{i\omega} - z_j)(e^{i\omega} - \bar{z}_j) \right|^2 = |B(\omega)|^2$$

其中

$$B(\omega) = \left[\frac{1}{2} |a_N| \right]^{\frac{1}{2}} \prod_k |r_k|^{-\frac{1}{2}} \prod_j |z_j|^{-1} \\ \cdot \left| \prod_k (e^{i\omega} - r_k) \prod_j (e^{i\omega} - z_j)(e^{i\omega} - \bar{z}_j) \right|$$

是实系数且形如 $\sum_{n=0}^N b_n e^{in\omega}$ 的多项式.

1.3 连续傅里叶变换

上一节中讨论的函数傅里叶级数都是在具有有限周期(尤其是周期为 2π)的情形下展开的.但是,无论在理论还是在实践中,对非周期函数性质的讨论都是必要的,因此本节将研究非周期函数的傅里叶级数的性质,为此首先将函数 $f(x)$ 的周期设为有限数 $2l$,并将区间限制在 $[-l, l]$ 上对傅里叶级数进行讨论.

1.3.1 连续傅里叶变换的概念与基本性质

对于区间 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$,其复数形式的傅里叶级数展开为

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{\frac{ik\pi x}{l}}, \quad \alpha_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{-\frac{ik\pi y}{l}} dy$$

将上面两个式子合并为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{\frac{ik\pi(x-y)}{l}} dy \quad (1.33)$$

对于定义在实轴上的非周期函数,可以看作是 $l \rightarrow \infty$ 后的结果,即

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y) e^{\frac{ik\pi(x-y)}{l}} dy$$

定义 $y_k = \frac{k\pi}{l}$, $\Delta y_k = \Delta = y_{k+1} - y_k = \frac{\pi}{l}$ 以及 $F_l(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(z) e^{iy(x-z)} dz$, 则

上式变为

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_l(y_k) \Delta y_k \quad (1.34)$$

注意到当 $l \rightarrow \infty$ 时, (1.34) 式中求和公式的极限 (如果存在的话) 为 $\int_{-\infty}^{+\infty} F_l(y) dy$,

再对该积分实施极限与积分的换序并利用 (1.34) 式得到下面的表达式

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} d\omega dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy\omega} dy \right] e^{i\omega x} d\omega \end{aligned} \quad (1.35)$$

在 (1.35) 式中, 令

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy\omega} dy \quad (1.36)$$

上式称之为函数 $f(x)$ 的傅里叶变换, 同时利用 (1.35) 式还有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.37)$$

即函数 $f(x)$ 也可以通过其傅里叶变换得到, 因此也将 (1.37) 式称之为傅里叶反演公式.

通过前面的简单讨论初步建立了当函数具有无限周期时, 其傅里叶级数展开可以通过有限周期函数的傅里叶级数展开并取极限得到的结论, 此时的表达式不再为傅里叶级数的形式而变成形如 (1.36) 与 (1.37) 式的积分形式, 并由此得到傅里叶变换与傅里叶变换反演的概念和公式. 但是需要指出的是, 前面的推导过程是缺乏严谨性的. 例如, 推导过程中要求 $f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_l(y_k) \Delta y_k$ 存在积分与极限顺序可以交换, 即

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_l(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{l \rightarrow \infty} F_l(y) dy$$

而上述两项要求对于一般的可积函数而言并不成立, 因此当上述条件不满足时傅里叶变换或者其反演都将失去意义, 有必要对上述推导过程成立的前提进行详细讨论.

定理 1.7 设 $f(x)$ 为 L^1 可积 (即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$) 的分段光滑函数, 则其傅里叶变换

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iy\omega} dy \quad (1.38)$$

有意义, 并且函数 $f(x)$ 可以通过其傅里叶反演表示

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.39)$$

证明 傅里叶变换(1.38)式有意义是显而易见的,因此只需要证明(1.39)成立即可,结合考虑(1.38)式与(1.39)式,等价于证明

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i(y-x)\omega} dy d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-n}^n f(y) [\cos(y-x)\omega + i\sin(y-x)\omega] dy d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \int_{-n}^n [\cos(y-x)\omega + i\sin(y-x)\omega] d\omega dy \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin n(y-x)}{y-x} f(y) dy \quad (1.40) \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nz}{z} f(x+z) dz \end{aligned}$$

注意到对于任意 $n \neq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{z} dz = \pi$, 因此

$$f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{z} f(x+z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nz)}{z} (f(x) - f(x+z)) dz$$

对于固定的点 x , 构造函数

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x+z)}{z}, & z \neq 0 \\ -f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

则函数 $F(z)$ 为实轴上定义的连续函数, 因此利用 Riemann-Lebesgue 引理有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \sin(nz) dz = 0$$

这表明(1.40)式成立.

为了与其他书籍中傅里叶变换的表示一致, 函数 f 的傅里叶变换记为 $\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}[f](\omega)$, 下面根据连续傅里叶变换的定义与记号研究它的一些重要性质.

定理 1.8 设函数 f 与 g 均为定义在实轴上的可积函数, 则下面的结论成立:

(1)(傅里叶变换的线性特性) 对于任意常数 c , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g] &= \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f] \\ \mathcal{F}^{-1}[f+g] &= \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}[g], \mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f] \end{aligned}$$

(2)(傅里叶变换的频率求导)

$$\mathcal{F}[x^n f(x)](\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \{\mathcal{F}[f](\omega)\}$$

(3)(傅里叶变换的时域求导) 如果还有 $f(x)=0$ 对于充分大的 $|x|$ 成立, 则

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega)$$

(4)(傅里叶变换的平移特性) 对于常数 b ,

$$\mathcal{F}[f(x-b)] = e^{-ib\omega} \hat{f}(\omega)$$

(5)(傅里叶变换的调制特性) 对于任意常数 ζ ,

$$\mathcal{F}[e^{i\zeta x} f(x)](\omega) = \hat{f}(\omega - \zeta)$$

(6)(傅里叶变换的伸缩特性) 对于任意非零常数 a ,

$$\mathcal{F}\left[f\left[\frac{x}{a}\right]\right](\omega) = |a| \hat{f}(a\omega)$$

(7)(傅里叶变换的逆特性)

$$\mathcal{F}^2[f](\omega) = f(-\omega), \text{ 因此有 } \mathcal{F}^4 = I, \text{ 这说明 } \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3.$$

(8)(傅里叶变换与 Laplace 变换之间的关系) 如果函数 $f(x)=0, x<0$, 则

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}[f](i\omega)$$

其中 $\mathcal{L}[f]$ 表示函数 f 的 Laplace 变换, 定义为

$$\mathcal{L}[f](\omega) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-\omega x} dx$$

证明 这里仅证明性质(4)~(6), 其他性质的证明作为练习. 为了证明(4)与

(6), 需要计算 $\mathcal{F}\left[f\left[\frac{x-b}{a}\right]\right](\omega)$ 的值, 由于

$$\begin{aligned} \left[\hat{f}\left[\frac{x-b}{a}\right]\right](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\frac{x-b}{a}\right] e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(at+b)\omega} |a| dt \\ &= \frac{|a| e^{-ib\omega}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(a\omega)t} dt \\ &= |a| e^{-ib\omega} \hat{f}(a\omega) \end{aligned}$$

上式中分别取 $(a, b) = (1, b), (a, 0)$ 得到(4)与(6)成立. 另外,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{i\zeta x} f(x)](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\zeta x} e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix(\omega-\zeta)} dx \\ &= \hat{f}(\omega - \zeta) \end{aligned}$$

上式表明(5)的结论也成立.

对于信号处理来说,傅里叶变换最重要的性质之一便是其卷积特性,下面对此进行讨论.

设函数 f 与 g 均为定义在实轴上的平方可积函数,则函数 f 与 g 的卷积 $f * g$ 定义为下列积分运算:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \quad (1.41)$$

或者等价定义为

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \quad (1.42)$$

定理 1.9 (傅里叶变换的卷积性质) 假设 f 与 g 均为定义在实轴上的平方可积函数,则

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g} \quad (1.43)$$

以及

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g \quad (1.44)$$

证明 由于(1.43)式与(1.44)式的证明方法完全相同,因此下面仅给出(1.43)式的证明.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-ix\omega} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) e^{-ix\omega} dy dx \end{aligned}$$

实行变量替换: $x-y=t$, $y=y$, 则上面的两重积分变为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) e^{-ix\omega} dy dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(y) e^{-i(y+t)\omega} dt dy \\ &= \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\omega} dt \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iy\omega} dy \right] \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) \end{aligned}$$

现在讨论傅里叶变换的保持能量特性. 利用反演公式

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

得到

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt \overline{\hat{g}(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(x)} e^{itx} dx \right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \\
&= \langle f, g \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

上述公式可以总结成下面的定理.

定理 1.10 假设 f 与 g 均为定义在实轴上的平方可积函数, 则

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \quad (1.45)$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \quad (1.46)$$

特别地, 如下的 Plancherel 等式成立

$$\| \mathcal{F}[f] \|_{L^2} = \| f \|_{L^2} \quad (1.47)$$

公式(1.47)表明, 对于能量有限的信号, 经过傅里叶变换之后其能量将保持不变. 需要指出的是, 傅里叶变换的定义以及反演存在的条件都是在 $L^1(\mathbf{R})$ 上讨论的(见定理 1.7), 而内积性质的讨论则限制在空间 $L^2(\mathbf{R})$ 上, 由于 $L^1(\mathbf{R}) \neq L^2(\mathbf{R})$, 因此当函数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 但 $f \notin L^1(\mathbf{R})$ 时, 则函数 f 的傅里叶变换及其逆变换不能通过(1.38)式与(1.39)式来定义. 例如, 区间 $[-1, 1]$ 上的特征函数 $f(x) = \chi_{[-1, 1]}$ 的傅里叶变换存在并且为 $\hat{f}(\omega) = \frac{2\sin \omega}{\omega}$, 显然, $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 而 $\hat{f} \notin L^1(\mathbf{R})$, 即其傅里叶逆变换不能通过(1.39)式得到, 但是另一方面, 能量有限信号 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 具有非常广泛的应用, 因此有必要将傅里叶变换推广到能量有限空间 $L^2(\mathbf{R})$. 具体做法是利用 $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 内稠密的性质, 通过空间 $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ 中函数的傅里叶变换的极限来定义 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 的傅里叶变换. 具体过程描述如下.

设 $\{f_n\} \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \| f_n - f \|_{L^2(\mathbf{R})} = 0$. 由于 $\{f_n\}$ 为空间 $L^2(\mathbf{R})$ 内的收敛序列. 因此它构成一个完备序列, 对于充分大的自然数 N , 当 $n, m \geq N$ 时, 范数 $\| f_n - f_m \|_{L^2(\mathbf{R})}$ 任意小. 另外, 由于 $\{f_n\} \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, \hat{f}_n, \hat{f}_m 存在, 因此利用 Plancherel 等式 $\| f_n - f_m \| = \| \hat{f}_n - \hat{f}_m \|$ 知道 $\{\hat{f}_n\}$ 也构成一个完备序列, 因此存在一个函数 $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \| \hat{f}_n - \hat{f} \| = 0$, 于是可以利用 $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ 作为函数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ 的傅里叶变换. 按照上述方法, 可以定义所有能量有限信号的傅里叶变换.

下面给出傅里叶变换计算中的一些常见例子, 这些例子可以用来简要说明傅

里叶变换的重要性质.

区间 $[-T, T]$ 上的特征函数 $f(x) = \chi_{[-T, T]}(x)$, 其傅里叶变换为

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T e^{-ix\omega} dx = \frac{\sqrt{2} \sin(T\omega)}{\sqrt{\pi}\omega}$$

高斯函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 是一个具有无穷次可微的快速衰减函数, 直接验证该函数的傅里叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 满足微分方程 $2\hat{f}'(\omega) + \omega\hat{f}(\omega) = 0$, 利用该微分方程以及初始条件: $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 求解得到 $\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$, 这表明高斯函数的傅里叶变换仍然是高斯函数, 同样具有快速衰减特性.

作类似计算可以求得高斯鸣叫 $f(x) = e^{-(a-ib)x^2}$ 的傅里叶变换满足

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2(a-ib)}} e^{-\frac{(a+ib)\omega^2}{4(a^2+b^2)}}$$

上述两个高斯类函数有一个共同点: 函数以及傅里叶变换同时快速衰减, 但是在任意区间均不等于零.

由于高斯函数的快速衰减特性, 因此在信号处理应用中为了对信号的局部特征进行分析经常将高斯函数作用到待分析的局部区域, 这样做相当于对信号实现加权, 主要权重集中在需要分析的局部区域, 离开感兴趣区域越远, 权重越小, 从而大大提高了分析的准确度. 但是, 由于高斯函数及其傅里叶变换永远不能为零, 因此利用高斯函数对信号局部特征的分析不可能是精确的. 为了对局部信息进行精确分析, 人们希望能够找到具有快速衰减、充分光滑并能够保证函数及其傅里叶变换同时只在有限区域取非零函数值(称之为具有有限支集特征)的函数. 但是下面的定理说明上述函数是不存在的.

定理 1.11 如果函数 $f \neq 0$ 具有有限支集(即, 该函数仅在有限区间非零), 则

$\hat{f}(\omega)$ 不可能在某个区间上为 0, 类似地, 如果 $\hat{f}(\omega) \neq 0$ 具有有限支集, 则 f 不可能在某个区间上为 0.

证明 只证明定理的第一部分, 第二部分的证明方法完全是类似的. 设函数 $f \neq 0$ 的支集区间为 $[a, b]$, 于是

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) e^{-ix\omega} dx$$

因此若存在区间 $[c, d]$ 使得 $\hat{f}(\omega) = 0$, 取 $t = \frac{c+2d}{3}$, 则 $\hat{f}(\omega)$ 在 t 处的 n 次导函数满足

$$\hat{f}^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-ix)^n f(x) e^{-itx} dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

于是对于任意 ω , 有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) e^{-itx} e^{-i(\omega-t)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^n (\omega-t)^n}{n!} f(x) e^{-itx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\omega-t)^n}{n!} \int_a^b (-ix)^n f(x) e^{-itx} dx \\ &= 0\end{aligned}$$

由于上式对于任意的 ω 成立, 利用傅里叶变换的反演公式, 得到 $f(x) \equiv 0$, 矛盾, 因此 $f(x)$ 与 $\hat{f}(\omega)$ 不可能同时具有有限支集.

1.3.2 傅里叶变换与线性滤波器

诸如信号去噪、传输等经典的信号处理过程全部通过线性时不变算子实现, 而线性时不变算子本质上由广义函数 δ 确定, 因此本节首先讨论 δ 函数的概念与基本性质, 然后研究傅里叶变换与线性时不变系统的关系, 并对因果滤波器进行了较详细的讨论.

设区间 $I_\tau = (x_0 - \tau, x_0 + \tau)$, 引进脉冲函数 $g_\tau(x)$ 为

$$g_\tau(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I_\tau|}, & x \in I_\tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.48)$$

图 1-2 描述了对于参数 τ 以及位置 $x_0 = 0$ 时脉冲函数 $g_\tau(x)$ 的图形.

则显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(x - x_0) dx = \int_{x_0 - \tau}^{x_0 + \tau} \frac{1}{2\tau} dx = 1$$

此即

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(x - x_0) dx = 1$$

再取任一在 x_0 处连续的函数 $f(x)$, 利用积分中值定理则有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(x - x_0) f(x) dx &= \frac{1}{2\tau} \int_{x_0 - \tau}^{x_0 + \tau} f(x) dx \\ &= f(\xi)\end{aligned}$$

其中 $\xi \in (x_0 - \tau, x_0 + \tau)$. 若令 $\tau \rightarrow 0$ 得到

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

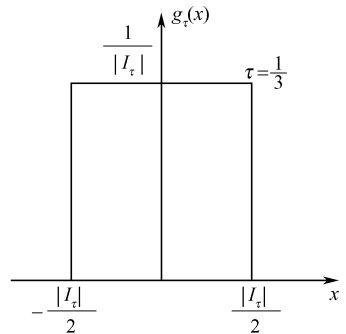


图 1-2 脉冲函数 $g_\tau(x)$ 的图形

现在令 $\tau \rightarrow 0$, 并用 $\delta(x - x_0)$ 表示由 $g_\tau(x)$ 所得到的极限函数, 称为 δ 函数. 该函数具有下面典型的运算性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (1.49)$$

对任一在 x_0 处连续的函数 $f(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (1.50)$$

它们是由前面的两个对应表达式在积分号下形式地求极限给出.

当函数 $f(x)$ 存在连续导函数时, 可以引进 δ 函数的导函数,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - x_0) f(x) dx = -f'(x_0)$$

这个定义与把 δ 函数看作普通函数来运算的结果是相同的, 因为由分步积分方法有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x - x_0) f(x) dx &= \delta(x - x_0) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f'(x) dx \\ &= -f'(x_0) \end{aligned}$$

递推地可以建立 δ 函数的 n 阶导数为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

其中函数 $f(x)$ 为任意在 $x = x_0$ 有连续 n 阶导数的函数.

利用上述同样的方法, 还可以导出下列结果.

(1) 对于任意连续函数 $g(x)$, 有 $g(x) \delta(x - x_0) = g(x_0) \delta(x - x_0)$;

(2) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$, ($a \neq 0$);

(3) $\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$;

(4) $\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x_0}$, 特别地, $\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

前面三个结论成立是显然的, 下面给出结论(4)的简要证明.

事实上,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_\tau(x - x_0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(x - x_0) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \tau} \int_{x_0 - \tau}^{x_0 + \tau} e^{-i\omega x} dx = e^{-i x_0 \omega} \frac{\sin(\tau \omega)}{\sqrt{2\pi} \tau \omega} \end{aligned}$$

令 $\tau \rightarrow 0$ 并在积分号下形式地求极限得到结论(4).

δ 函数又称为 Dirac Delta 函数, 它是由英国著名的物理学家, 量子力学创始人之一, 1933 年诺贝尔奖获得者 P. A. M. Dirac(狄拉克)为处理脉冲信号而提出的, Dirac 意识到 δ 函数不是通常意义下的普通函数, 因为