当代杰出青年科学文库

直觉模糊信息集成理论及应用

徐泽水 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

直觉模糊集是传统的模糊集的一种拓展, 它同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度这三个方面的信息, 因而比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更具灵活性和实用性. 自保加利亚学者 Atanassov 于 1983 年提出直觉模糊集的概念以来, 有关直觉模糊集理论的研究已受到国内外相关领域学者的极大关注, 并且已被应用于决策、医疗诊断、逻辑规划、模式识别、机器学习和市场预测等诸多领域. 本书主要介绍近年来国内外学者特别是作者本人在直觉模糊信息的集成方式、直觉模糊集的关联测度、距离测度和相似性测度、直觉模糊集的聚类算法, 以及基于上述信息处理工具的直觉模糊决策模型和方法等方面的最新研究成果.

本书可作为模糊数学、运筹学、信息科学和管理科学与工程等领域的研究人员和工程技术人员的参考书, 以及高等院校有关专业高年级本科生和研究生的教学用书.

图书在版编目(CIP)数据

直觉模糊信息集成理论及应用 / 徐泽水著. —北京：科学出版社，2008
(当代杰出青年科学文库/白春礼主编)
ISBN 978-7-03-021119-4

I. 直… II. 徐… III. 模糊集–研究 IV. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 031077 号

责任编辑：陈玉琢 吴伶伶 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社编务公司排版制作
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 4 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2008 年 4 月第一次印刷 印张：14 1/4
印数：1—2 500 字数：262 000

定价：48.00 元

《当代杰出青年科学文库》编委会

前　　言

自从 Zadeh 于 1965 年提出模糊集理论以来，该理论已在现代社会的各个领域得到广泛应用. 模糊集的核心思想是把取值仅为 1 或 0 的特征函数扩展到可在单位闭区间[0,1]中任意取值的隶属函数. 然而，模糊集的隶属函数值仅是一个单一的值，在实际应用中，它不能同时表示支持(肯定)、反对(否定)和犹豫(不确定)的证据. 由于社会经济环境的日益复杂性和不确定性，人们在对事物的认知过程中，往往存在着不同程度的犹豫或表现出一定程度的知识缺乏，从而使得认知结果表现为肯定、否定或介于肯定与否定之间的犹豫性. 例如，在各种选举投票事件中，除了支持与反对两个方面，经常有弃权情况发生. 因此，传统的模糊集理论因其不能完整地表达所研究问题的全部信息而受到越来越多的制约和挑战.

Atanassov 于 1983 年对传统的模糊集进行了拓展，提出了直觉模糊集的概念. 由于直觉模糊集同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度这三个方面的信息，因此，它比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更具灵活性和实用性. 20 多年来，有关该理论的研究已受到国内外相关领域学者的极大关注，并且已被应用于决策、医疗诊断、逻辑规划、模式识别、机器学习和市场预测等诸多领域. 随着对直觉模糊集理论研究的不断深入及应用范围的不断扩展，直觉模糊信息的有效集成和处理显得愈加重要. 因此，直觉模糊信息的集成方式、直觉模糊集的关联测度、距离测度和相似性测度、直觉模糊集的聚类算法等信息处理工具有广阔的实际应用前景.

本书将主要对近年来国内外学者特别是作者本人在直觉模糊信息的集成和处理方式，以及相关的直觉模糊决策模型和方法等最新研究成果进行深入系统的介绍. 本书共分为七章.

第 1 章主要介绍直觉模糊信息的集成方式. 定义直觉模糊数的概念；基于得分函数和精确函数，给出直觉模糊数的比较和排序方法；定义直觉模糊数的运算法则；给出直觉模糊信息的一系列集成算子，如直觉模糊平均算子、直觉模糊加权平均算子、直觉模糊有序加权平均算子、直觉模糊混合平均算子、直觉模糊几何算子、直觉模糊加权几何算子、直觉模糊有序加权几何算子、直觉模糊混合几何算子等，详细介绍它们的优良性质，并且把它们应用于多属性决策领域.

第 2 章主要介绍区间直觉模糊信息的集成方式. 定义区间直觉模糊数的概念，给出区间直觉模糊数的基本运算法则，以及区间直觉模糊信息的一些集成算子；定义区间直觉模糊数的得分函数和精确函数，基于这两种函数，给出区间直觉模

糊数的一种简单的排序方法. 最后把区间直觉模糊集理论应用于决策领域, 提供一种基于区间直觉模糊信息的决策途径.

第 3 章介绍直觉模糊集理论和区间直觉模糊集理论中的三类测度: 关联测度、距离测度和相似性测度.

第 4 章介绍基于直觉模糊集的聚类方法. 定义直觉模糊相似度概念, 并构建直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵; 定义直觉模糊相似矩阵的合成运算法则, 给出直觉模糊相似矩阵转化为直觉模糊等价矩阵的途径; 分别定义直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵的λ-截矩阵, 进而给出一种基于直觉模糊相似矩阵的聚类方法. 此外, 定义关联矩阵和等价关联矩阵的概念, 给出计算直觉模糊集之间关联系数的方法, 并且给出一种基于关联矩阵的直觉模糊聚类算法, 然后把上述算法拓展到区间直觉模糊环境中.

第 5 章介绍基于直觉判断矩阵的决策方法. 给出直觉判断矩阵、一致性直觉判断矩阵、残缺直觉判断矩阵、一致性残缺直觉判断矩阵、可接受残缺直觉判断矩阵、区间直觉判断矩阵及其得分矩阵和精确矩阵, 区间直觉模糊正、负理想点等概念; 给出区间直觉判断矩阵、直觉判断矩阵和互补判断矩阵之间的关系, 然后利用直觉模糊加权平均算子等集成工具, 分别建立基于直觉判断矩阵和残缺直觉判断矩阵的多属性决策模型, 并且建立基于直觉判断矩阵和残缺直觉判断矩阵的多属性群决策模型, 进而给出一系列基于不同直觉偏好结构的多属性决策途径. 此外, 针对不同的区间直觉模糊环境, 基于区间直觉模糊平均算子和区间直觉模糊几何算子等各种集成方式, 建立相应的区间直觉模糊决策途径.

第 6 章介绍属性值为直觉模糊数或区间直觉模糊数、属性权重已知或完全未知的直觉模糊多属性决策方法. 定义直觉模糊理想点和区间直觉模糊理想点的得分向量, 以及与之相关的一系列概念, 包括每个方案的得分向量和直觉模糊理想点之间夹角的余弦函数, 以及每个方案的得分向量和区间直觉模糊理想点之间夹角的余弦函数等; 建立两种投影模型来分别度量每个方案和直觉模糊理想点或区间直觉模糊理想点之间的相似程度, 并以此来确定最佳方案.

第 7 章介绍动态直觉模糊信息的集成方式、时间序列赋权方法, 以及动态直觉模糊多属性决策途径. 定义直觉模糊变量和不确定直觉模糊变量的概念; 给出动态直觉模糊加权平均算子和不确定动态直觉模糊加权平均算子; 基于这两种算子, 分别给出动态直觉模糊多属性决策方法和不确定动态直觉模糊多属性决策方法.

本书可作为模糊数学、运筹学、信息科学和管理科学与工程等领域的研究人员和工程技术人员的参考书, 以及高等院校有关专业高年级本科生和研究生的教学用书.

借此书出版之际, 作者衷心感谢清华大学经济管理学院管理科学与工程系陈剑教授、美国 Iona 大学机器智能研究所 Ronald R. Yager 教授以及直觉模糊集理

论的创始人保加利亚科学院 Krassimir Atanassov 教授等给予的热情支持和帮助. 本书作者的有关研究得到国家杰出青年科学基金项目(70625005)和中国博士后科学基金项目(20060390051)的资助, 在此特向国家自然科学基金委员会和中国博士后科学基金会表示感谢.

徐泽水

2007 年 10 月于北京

符 号 说 明

$X, \Theta, \tilde{\Theta}, R, R^{+}, \Omega, \varDelta, \varLambda$	集合
x, x_i	元素
f, g	函数
μ	隶属函数
v	非隶属函数
π	犹豫函数
F	模糊集
A	直觉模糊集
$\tilde{A}$	区间直觉模糊集
α	直觉模糊数
$\tilde{\alpha}$	区间直觉模糊数
s	得分函数
h	精确函数
ω, w, ξ	权重向量
a_j, b_j	数据
Y_i	方案
Y	方案集
G_j	属性
G	属性集
C	关联矩阵
D	决策矩阵
$\tilde{D}$	区间决策矩阵
ρ	关联测度
d	距离测度
ϑ	相似性测度
Z	直觉模糊矩阵

S	得分矩阵
H	精确矩阵
Q	直觉判断矩阵
$\tilde{Q}$	区间直觉判断矩阵
$\Pr j$	投影
t	时间变量
$\alpha(t)$	直觉模糊变量
$\tilde{\alpha}(t)$	不确定直觉模糊变量

目　　录

第 1 章　直觉模糊信息集成方式

自从 Zadeh[1] 于 1965 年提出模糊集理论以来，该理论已在现代社会的各个领域得到广泛应用[2]. 模糊集的核心思想是把取值仅为 1 或 0 的特征函数扩展到可在单位闭区间[0,1]中任意取值的隶属函数. 然而，模糊集的隶属函数值仅是一个单一的值，在实际应用中，它不能同时表示支持(肯定)、反对(否定)和犹豫(不确定)的证据. 由于社会经济环境的日益复杂性和不确定性，人们在对事物的认知过程中，往往存在不同程度的犹豫或表现出一定程度的知识缺乏，从而使得认知结果表现为肯定、否定或介于肯定与否定之间的犹豫性这三个方面，如在各种选举投票事件中，除了支持与反对两个方面，经常有弃权情况发生. 因此，传统的模糊集理论因其不能完整地表达所研究问题的全部信息而受到越来越多的制约和挑战.

保加利亚学者 Atanassov 在文献[3,4]中对 Zadeh 的模糊集进行了拓展，把仅考虑隶属度的传统模糊集推广到同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度这三个方面信息的直觉模糊集. 由于直觉模糊集比传统的模糊集能够更细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质[5]，近年来，人们对直觉模糊集理论的研究产生浓厚的兴趣并取得了丰硕的研究成果[6,7]. Atanassov [4] 和 De 等[8]对直觉模糊集的“交”、“并”、“补”和“幂”等基本运算法则进行了研究. 然而，随着对直觉模糊集理论研究的不断深入及应用范围的不断扩展，直觉模糊信息的有效集成和处理显得愈加重要. 仅仅依靠目前已有的直觉模糊集基本运算法则已经远远不能满足实际的需要. 为此，文献[9~11]中系统地研究了直觉模糊信息的集成方式：定义了直觉模糊数的概念，基于得分函数和精确函数，给出了直觉模糊数的比较和排序方法；定义了直觉模糊数的运算法则，给出直觉模糊信息的一系列集成算子，如直觉模糊平均算子、直觉模糊加权平均算子、直觉模糊有序加权平均算子、直觉模糊混合平均算子、直觉模糊几何算子、直觉模糊加权几何算子、直觉模糊有序加权几何算子、直觉模糊混合几何算子等，详细介绍它们的优良性质，并且把它们应用于多属性决策领域.

1.1　直觉模糊集

首先介绍 Zadeh 的模糊集概念.

定义 1.1 [1]　设 X 是一个非空集合，则称

$$F=\{\langle x,\mu_F(x)\rangle | x\in X\} \tag{1.1}$$

为模糊集, 其中 μ_F 是模糊集 F 的隶属函数, $\mu_F: X\to[0,1]$, $\mu_F(x)$ 为 X 中元素 x 属于 F 的隶属度, 且 $\mu_F(x)$ 在单位区间 $[0,1]$ 取单值.

Atanassov [3,4] 把 Zadeh 的模糊集进行了推广, 给出了直觉模糊集的概念.

定义1.2 [3,4] 设 X 是一个非空集合, 则称

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle | x\in X\} \tag{1.2}$$

为直觉模糊集, 其中 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度, 即

$$\mu_A: X\to[0,1], \quad x\in X \to \mu_A(x)\in[0,1], \tag{1.3}$$

$$\nu_A: X\to[0,1], \quad x\in X \to \nu_A(x)\in[0,1], \tag{1.4}$$

且满足条件

$$0\leqslant \mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1, \quad x\in X. \tag{1.5}$$

此外

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x), \quad x\in X \tag{1.6}$$

表示 X 中元素 x 属于 A 的犹豫度或不确定度.

Szmidt 和 Kacprzyk[12] 称 $\pi_A(x)$ 为 X 中元素 x 属于 A 的直觉指标, 且 $0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1$, $x\in X$. 特别地, 若

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-[1-\mu_A(x)]=0, \quad x\in X, \tag{1.7}$$

则 A 退化为 Zadeh 的模糊集. 因此, Zadeh 的模糊集是直觉模糊集的一个特例.

为了方便起见, 称 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$ 为直觉模糊数[9], 其中

$$\mu_\alpha\in[0,1], \quad \nu_\alpha\in[0,1], \quad \mu_\alpha+\nu_\alpha\leqslant 1, \tag{1.8}$$

且设 Θ 为全体直觉模糊数的集合. 显然, $\alpha^+=(1,0)$ 为最大的直觉模糊数, $\alpha^-=(0,1)$ 为最小的直觉模糊数.

可对直觉模糊数 (μ_α,ν_α) 进行物理阐述, 如 $(\mu_\alpha,\nu_\alpha)=(0.5,0.3)$, 则 $\mu_\alpha=0.5$, $\nu_\alpha=0.3$. 其物理意义为 "对于某一项方案, 有 10 人参加投票, 投票结果为 5 人赞成, 3 人反对, 2 人弃权".

对于任一直觉模糊数 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$, 可通过得分函数 s 对其进行评估[13]:

$$s(\alpha) = \mu_\alpha - \nu_\alpha, \tag{1.9}$$

其中 $s(\alpha)$ 为 α 的得分值，$s(\alpha) \in [-1,1]$.

由(1.9)式可知：直觉模糊数 α 的得分值与其隶属度 μ_α 和非隶属度 ν_α 的差值直接相关，即 μ_α 和 ν_α 的差值越大，则 α 的得分值越大，从而直觉模糊数 α 越大. 特别地，若 $s(\alpha)=1$，则 α 取最大值 $(1,0)$；若 $s(\alpha)=-1$，则 α 取最小值 $(0,1)$.

例 1.1　设 $\alpha_1 = (0.7, 0.2)$ 和 $\alpha_2 = (0.5, 0.3)$，则由(1.9)式求得它们的得分值：

$$s(\alpha_1) = 0.7 - 0.2 = 0.5, \quad s(\alpha_2) = 0.5 - 0.3 = 0.2.$$

由于 $s(\alpha_1) > s(\alpha_2)$，因此 $\alpha_1 > \alpha_2$.

Gau 和 Buehrer[14] 定义了 Vague 集概念. Bustince 和 Burillo [5] 指出 Vague 集就是直觉模糊集. Chen 和 Tan [13] 利用 max 和 min 运算以及得分函数给出基于 Vague 集的多属性决策方法. 然而，在某些特殊情况下，无法通过得分函数来比较直觉模糊数的大小.

例 1.2　设 $\alpha_1 = (0.6, 0.2)$ 和 $\alpha_2 = (0.7, 0.3)$，则由(1.9)式可得

$$s(\alpha_1) = 0.6 - 0.2 = 0.4, \quad s(\alpha_2) = 0.7 - 0.3 = 0.4.$$

由于 $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$，因此，不能确定 α_1 与 α_2 孰大孰小.

Hong 和 Choi [15] 定义了一种精确函数：

$$h(\alpha) = \mu_\alpha + \nu_\alpha, \tag{1.10}$$

其中 $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ 为直觉模糊数，h 为 α 的精确函数，$h(\alpha)$ 为 α 的精确度. $h(\alpha)$ 值越大，则直觉模糊数 α 的精确度越高.

由(1.6)式、(1.9)式和(1.10)式，可得 α 的犹豫度和精确度之间的关系如下：

$$\pi_\alpha + h(\alpha) = 1. \tag{1.11}$$

因此，犹豫度 π_α 越小，则精确度 $h(\alpha)$ 值越大.

根据(1.10)式计算例 1.2 中直觉模糊数 α_1 和 α_2 的精确度，可得

$$h(\alpha_1) = 0.6 + 0.2 = 0.8, \quad h(\alpha_2) = 0.7 + 0.3 = 1,$$

从而 $h(\alpha_2) > h(\alpha_1)$，即直觉模糊数 α_2 的精确度比直觉模糊数 α_1 的精确度高.

得分函数 s 和精确函数 h 类似于统计学中的均值与方差[15]. 众所周知，统计学中的有效估计量是估计的样本分布的方差测量. 方差越小，则估计量的结果越好. 基于此思想，可以认为：在直觉模糊数的得分值相等的情况下，精确度越高，则相应的直觉模糊数越大，从而 α_2 大于 α_1.

基于上述分析, 下面定义直觉模糊数的一种比较和排序方法:

定义 1.3[9,10] 设 $\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})$ 和 $\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},\nu_{\alpha_2})$ 为直觉模糊数, $s(\alpha_1)=\mu_{\alpha_1}-\nu_{\alpha_1}$ 和 $s(\alpha_2)=\mu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_2}$ 分别为 α_1 和 α_2 的得分值, $h(\alpha_1)=\mu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_1}$ 和 $h(\alpha_2)=\mu_{\alpha_2}+\nu_{\alpha_2}$ 分别为 α_1 和 α_2 的精确度, 则

- 若 $s(\alpha_1)<s(\alpha_2)$, 则 α_1 小于 α_2, 记为 $\alpha_1<\alpha_2$;
- 若 $s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$, 则
  1) 若 $h(\alpha_1)=h(\alpha_2)$, 则 α_1 和 α_2 相等, 即 $\mu_{\alpha_1}=\mu_{\alpha_2}$ 和 $\nu_{\alpha_1}=\nu_{\alpha_2}$, 记为 $\alpha_1=\alpha_2$;
  2) 若 $h(\alpha_1)<h(\alpha_2)$, 则 α_1 小于 α_2, 记为 $\alpha_1<\alpha_2$;
  3) 若 $h(\alpha_1)>h(\alpha_2)$, 则 α_1 大于 α_2, 记为 $\alpha_1>\alpha_2$.

Hong 和 Choi [15] 对文献[13]中的决策方法进行了改进, 利用 max 和 min 运算提出了一种基于得分函数和精确函数的决策途径. 然而, 在运用 max 和 min 运算集成直觉模糊信息 (或称 Vague 信息) 时极易丢失决策信息, 从而导致决策结果缺乏准确性和合理性. 因此, "如何无丢失地集成直觉模糊信息?" 是一个重要且值得关注的问题.

国内外已有许多学者对数据信息集成方式进行了研究, 针对不同的决策环境, 提出了各种不同的数据集成算子[16~20]. 其中加权平均(WA)算子[21]、加权几何(WG)算子[22]、有序加权平均(OWA)算子[23]和有序加权几何(OWG)算子[24,25] 是四种常见的数据集成算子.

定义 1.4 [21] 设 $\mathrm{WA}:R^n\to R$, 若

$$\mathrm{WA}_\omega(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j a_j. \tag{1.12}$$

则称 WA 为加权平均算子, 其中 R 为实数集, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为数据组 $a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量, $\omega_j\in[0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$), $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$.

定义 1.5[22] 设 $\mathrm{WG}:R^{+n}\to R^+$, 若

$$\mathrm{WG}_\omega(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\prod_{j=1}^{n}a_j^{\omega_j}, \tag{1.13}$$

则称函数 WG 为加权几何算子, 其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为数据组 $a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的指数权重向量, $\omega_j\in[0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$), $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$, R^+ 为正实数集.

WA 算子和 WG 算子均首先加权所给的数据, 然后对这些加权的数据进行集成. 但二者的侧重点有所不同: 前者强调整体数据的影响; 后者则突出单个数据的作用. 例如, 在学校招生时, 若需招收各方面素质比较均衡的"全才", 则用 WA

算子集成数据信息比较适合; 若需招收某方面素质比较突出的“专才”, 则可用 WG 算子对数据信息进行集成.

定义 1.6 [23]　设 $\mathrm{OWA}: R^n \to R$, 若

$$\mathrm{OWA}_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \ , \tag{1.14}$$

其中 $w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 OWA 相关联的加权向量, $w_j \in [0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$), $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, 且 b_j 是数据组 a_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的元素, 则称函数 OWA 为有序加权平均算子, 简称 OWA 算子.

定义 1.7 [24,25]　设 $\mathrm{OWG}: R^{+n} \to R^{+}$, 若

$$\mathrm{OWG}_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \ , \tag{1.15}$$

其中 $w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}}$ 是与函数 OWG 相关联的指数加权向量, $w_j \in [0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$), $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, 且 b_j 是数据组 a_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 中第 j 大的元素, 则称函数 OWG 为有序加权平均算子, 简称 OWG 算子.

OWA 算子和 OWG 算子的特点是: 它们首先需要对给定的数据按从大到小的顺序进行排序并赋予每个位置一定的权重, 然后把每个数据与其所在位置的权重进行综合集成. 显然, 数据 a_i 与 w_i 没有任何联系, w_i 只与集成过程中的第 i 个位置有关. 因此, w_i 又称为位置权重. 而 OWG 算子则是结合 OWA 算子和 WG 算子的特点而得到的.

上述四种算子一般只应用于数据信息以实数表达的情形. 文献[26~47]把它们拓展到不确定环境和模糊语言环境中. 文献[9~11]把它们拓展到直觉模糊环境中, 并且系统地研究了直觉模糊信息的集成方式.

1.2　直觉模糊数的运算法则

定理 1.1 [10]　设 $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$ 和 $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2})$ 为直觉模糊数, 则

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \ \Leftarrow \ \mu_{\alpha_1} \leqslant \mu_{\alpha_2} \ \text{且} \ \nu_{\alpha_1} \geqslant \nu_{\alpha_2} . \tag{1.16}$$

证明　由于 $s(\alpha_1) = \mu_{\alpha_1} - \nu_{\alpha_1}$, $s(\alpha_2) = \mu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_2}$, $\mu_{\alpha_1} \leqslant \mu_{\alpha_2}$ 且 $\nu_{\alpha_1} \geqslant \nu_{\alpha_2}$, 则

$$s(\alpha_1)-s(\alpha_2)=(\mu_{\alpha_1}-\nu_{\alpha_1})-(\mu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_2})$$
$$=(\mu_{\alpha_1}-\mu_{\alpha_2})+(\nu_{\alpha_1}-\nu_{\alpha_2}).$$

若 $\mu_{\alpha_1}=\mu_{\alpha_2}$ 且 $\nu_{\alpha_1}=\nu_{\alpha_2}$，则 $\alpha_1=\alpha_2$；否则 $s(\alpha_1)-s(\alpha_2)<0$，即 $s(\alpha_1)<s(\alpha_2)$．因此，由定义 1.3 可知 $\alpha_1<\alpha_2$．定理证毕.

Goguen [48] 在 X 上定义一种 L 模糊集，它是传统模糊集的一种推广，若 $L=[0,1]$，则格成为它的一种特殊情形，其中 L 是具有满足一定条件算子的完备格．例如, Deschrijver 和 Kerre [49] 定义一种偏序集(L ,$\leqslant_L$)作为完备格，使得 L 的每个非空子集均有一个上、下确界.

格(L ,$\leqslant_L$)上的一个传统关系:

$$\alpha_1 \leqslant_L \alpha_2 \Leftrightarrow \mu_{\alpha_1} \leqslant \mu_{\alpha_2} \text{ 且 } \nu_{\alpha_1} \geqslant \nu_{\alpha_2}, \tag{1.17}$$

也已被应用作为直觉模糊集的一种运算[4,50].

然而，在一些情况下，(1.17)式不能用于比较直觉模糊数．例如，设 $\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})=(0.2,0.4)$，$\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},\nu_{\alpha_2})=(0.4,0.5)$，其中 $\mu_{\alpha_1}=0.2<\mu_{\alpha_2}=0.4$，$\nu_{\alpha_1}=0.4<\nu_{\alpha_2}=0.5$．则由(1.17)式不能比较 α_1 和 α_2 孰大孰小．此时，可用定义 1.3 来进行比较，事实上，由于

$$s(\alpha_1)=0.2-0.4=-0.2,\quad s(\alpha_2)=0.4-0.5=-0.1,$$

则由定义 1.3 可知 $\alpha_1<\alpha_2$．

格(L ,$\leqslant_L$)上另一种比较常见的关系:

$$\alpha_1 \prec_L \alpha_2 \Leftrightarrow \mu_{\alpha_1} \leqslant \mu_{\alpha_2} \text{ 且 } \nu_{\alpha_1} \leqslant \nu_{\alpha_2} \tag{1.18}$$

与直觉模糊集的包含关系不相符[4].

Atanassov [4] 给出直觉模糊集的一些基本运算法则：

定义 1.8[4] 设 X 是一个非空集合，$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$，$A_1=\{\langle x,\mu_{A_1}(x),\nu_{A_1}(x)\rangle|x\in X\}$ 和 $A_2=\{\langle x,\mu_{A_2}(x),\nu_{A_2}(x)\rangle|x\in X\}$ 为直觉模糊集，则

1) $\overline{A}=\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\mid x\in X\}$；

2) $A_1\cap A_2=\{\langle x,\min\{\mu_{A_1}(x),\mu_{A_2}(x)\},\max\{\nu_{A_1}(x),\nu_{A_2}(x)\}\rangle\mid x\in X\}$；

3) $A_1\cup A_2=\{\langle x,\max\{\mu_{A_1}(x),\mu_{A_2}(x)\},\min\{\nu_{A_1}(x),\nu_{A_2}(x)\}\rangle\mid x\in X\}$；

4) $A_1+A_2=\{\langle x,\mu_{A_1}(x)+\mu_{A_2}(x)-\mu_{A_1}(x)\mu_{A_2}(x),\nu_{A_1}(x)\nu_{A_2}(x)\rangle\mid x\in X\}$；

5) $A_1\cdot A_2=\{\langle x,\mu_{A_1}(x)\mu_{A_2}(x),\ \nu_{A_1}(x)+\nu_{A_2}(x)-\nu_{A_1}(x)\nu_{A_2}(x)\rangle\mid x\in X\}$．

De 等[8] 对上述直觉模糊集的运算法则进行了补充，定义了另外两个运算法则:

6) $nA=\{\langle x,1-(1-\mu_A(x))^n,(\nu_A(x))^n\rangle \mid x\in X\}$;

7) $A^n=\{\langle x,(\mu_A(x))^n,1-(1-\nu_A(x))^n\rangle \mid x\in X\}$,

其中 n 为正整数.

上述有关直觉模糊集的运算法则不仅能确保运算结果仍为直觉模糊集，而且对直觉模糊环境下的语言变量计算也颇有用处.

类似 1)~7)，下面定义直觉模糊数的运算法则：

定义 1.9 设 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$, $\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})$ 和 $\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},\nu_{\alpha_2})$ 为直觉模糊数，则

1) $\bar{\alpha}=(\nu_\alpha,\mu_\alpha)$;

2) $\alpha_1\cap\alpha_2=(\min\{\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2}\},\max\{\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2}\})$;

3) $\alpha_1\cup\alpha_2=(\max\{\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2}\},\min\{\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2}\})$;

4) $\alpha_1\oplus\alpha_2=(\mu_{\alpha_1}+\mu_{\alpha_2}-\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},\ \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})$;

5) $\alpha_1\otimes\alpha_2=(\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},\ \nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})$;

6) $\lambda\alpha=(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\nu_\alpha^\lambda)$，$\lambda>0$;

7) $\alpha^\lambda=(\mu_\alpha^\lambda,1-(1-\nu_\alpha)^\lambda)$，$\lambda>0$.

设 $S_P(\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2})=\mu_{\alpha_1}+\mu_{\alpha_2}-\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}$ 和 $T_P(\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2})=\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}$，则定义 1.9 中运算法则 4)可以转化成

$$\alpha_1\oplus\alpha_2=(S_P(\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2}),\ T_P(\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2})). \tag{1.19}$$

若令 $S_P(\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2})=\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}$ 和 $T_P(\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2})=\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}$，则定义 1.9 中运算法则 5)可以转化成

$$\alpha_1\otimes\alpha_2=(T_P(\mu_{\alpha_1},\mu_{\alpha_2}),S_P(\nu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_2})), \tag{1.20}$$

其中 $S_P(x_1,x_2)=x_1+x_2-x_1x_2$ 为著名的 t-conorm，它具有下列性质[51]：

1) **(有界性)**. $S_P(1,1)=1$，$S_P(x,0)=S_P(0,x)=x$;

2) **(单调性)**. 若 $x_1\leqslant x_1'$ 且 $x_2\leqslant x_2'$，则 $S_P(x_1,x_2)\leqslant S_P(x_1',x_2')$;

3) **(置换不变性)**. $S_P(x_1,x_2)=S_P(x_2,x_1)$;

4) **(结合律)**. $S_P(x_1,S_P(x_2,x_3))=S_P(S_P(x_1,x_2),x_3)$,

且 $T_P(y_1,y_2)=y_1y_2$ 为著名的 t-norm，它具有下列性质[51]:

1) **(有界性)**. $T_P(0,0)=0$，$T_P(y,1)=y$;

2) **(单调性)**. 若 $y_1\leqslant y_1'$ 且 $y_2\leqslant y_2'$，则 $T_P(y_1,y_2)\leqslant T_P(y_1',y_2')$;

3) **(置换不变性)**. $T_P(y_1,y_2)=T_P(y_2,y_1)$;

4) **(结合律)**. $T_P(y_1,T_P(y_2,y_3))=T_P(T_P(y_1,y_2),y_3)$.

设 $\delta(\lambda,a)=1-(1-a)^\lambda$，其中 $a\in[0,1]$，$\lambda>0$，则函数 $\delta(\lambda,a)$ 关于自变量 λ 和

a 具有下列优良性质:

1) $0 \leqslant \delta(\lambda, a) \leqslant 1$. 特别地, $\delta(\lambda, 0) = 0$, $\delta(\lambda, 1) = 1$ 且 $\delta(1, a) = a$;

2) 若 $\lambda \to 0$ 且 $0 < a < 1$, 则 $\delta(\lambda, a) \to 0$;

3) 若 $\lambda \to +\infty$ 且 $0 < a < 1$, 则 $\delta(\lambda, a) \to 1$;

4) 若 $\lambda_1 > \lambda_2$, 则 $\delta(\lambda_1, a) > \delta(\lambda_2, a)$;

5) 若 $a_1 > a_2$, 则 $\delta(\lambda, a_1) > \delta(\lambda, a_2)$.

上述性质为定义 1.9 中运算法则 4)~7)在集成直觉模糊数方面的应用奠定了良好的理论基础.

定理 1.2 设 $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$, $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2})$ 和 $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ 为直觉模糊数, 且设 $\dot{\alpha}_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, $\dot{\alpha}_2 = \alpha_1 \otimes \alpha_2$, $\dot{\alpha}_3 = \lambda \alpha$, $\dot{\alpha}_4 = \alpha^\lambda$, $\lambda > 0$, 则 $\dot{\alpha}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ 均为直觉模糊数.

证明 由于 $\alpha_1 = (\mu_{\alpha_1}, \nu_{\alpha_1})$ 和 $\alpha_2 = (\mu_{\alpha_2}, \nu_{\alpha_2})$ 为直觉模糊数, 则

$$\mu_{\alpha_1} \in [0,1], \quad \nu_{\alpha_1} \in [0,1], \quad \mu_{\alpha_2} \in [0,1],$$
$$\nu_{\alpha_2} \in [0,1], \quad \mu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_1} \leqslant 1, \quad \mu_{\alpha_2} + \nu_{\alpha_2} \leqslant 1.$$

因此, 根据定义 1.9 中的运算法则 4), 可得

$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_2} - \mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2} = \mu_{\alpha_1}(1 - \mu_{\alpha_2}) + \mu_{\alpha_2} \geqslant \mu_{\alpha_2} \geqslant 0, \quad \mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2} \geqslant 0,$$
$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_2} - \mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2} + \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2} \leqslant \mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_2} - \mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2} + (1 - \mu_{\alpha_1})(1 - \mu_{\alpha_2}) = 1,$$

从而 $\dot{\alpha}_1$ 为直觉模糊数.

根据定义 1.9 中的运算法则 5), 可得

$$0 \leqslant \mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2} \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2} \leqslant 1,$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2} + \nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2} &\leqslant (1 - \nu_{\alpha_1})(1 - \nu_{\alpha_2}) + \nu_{\alpha_1} + \nu_{\alpha_2} - \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2} \\
&= (1 - \nu_{\alpha_1})(1 - \nu_{\alpha_2}) + 1 - (1 - \nu_{\alpha_1})(1 - \nu_{\alpha_2}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

因此, $\dot{\alpha}_2$ 为直觉模糊数.

由于 $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ 为直觉模糊数, 则根据定义 1.9 中的运算法则 6)可知:

$$1 - (1 - \mu_\alpha)^\lambda \geqslant 0, \quad \nu_\alpha^\lambda \geqslant 0,$$

且

$$1 - (1 - \mu_\alpha)^\lambda + {\nu_\alpha}^\lambda \leqslant 1 - (1 - \mu_\alpha)^\lambda + (1 - \mu_\alpha)^\lambda = 1.$$

因此，$\dot{\alpha}_3$ 也为直觉模糊数.

根据定义 1.9 中的运算法则 7)，可得

$$\mu_\alpha^\lambda \geqslant 0,\ 1-(1-\nu_\alpha)^\lambda \geqslant 0,$$

且

$$\mu_\alpha^\lambda + 1-(1-\nu_\alpha)^\lambda \leqslant (1-\nu_\alpha)^\lambda + 1-(1-\nu_\alpha)^\lambda = 1.$$

因此，$\dot{\alpha}_4$ 也为直觉模糊数. 定理证毕.

下面考虑 $\lambda\alpha$ 和 α^λ 在 λ 和 α 取一些特殊值时的情况：

1) 若 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)=(1,0)$，则

$$\lambda\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha^\lambda\right)=\left(1-(1-1)^\lambda,\ 0^\lambda\right)=(1,0),$$

$$\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda, 1-(1-\nu_\alpha)^\lambda\right)=\left(1^\lambda, 1-(1-0)^\lambda\right)=(1,0),$$

即

$$\lambda(1,0)=(1,0), \quad (1,0)^\lambda=(1,0).$$

2) 若 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)=(0,1)$，则

$$\lambda\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha^\lambda\right)=\left(1-(1-0)^\lambda,\ 1^\lambda\right)=(0,1),$$

$$\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda, 1-(1-\nu_\alpha)^\lambda\right)=\left(0^\lambda, 1-(1-1)^\lambda\right)=(0,1),$$

即

$$\lambda(0,1)=(0,1), \quad (0,1)^\lambda=(0,1).$$

3) 若 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)=(0,0)$，则

$$\lambda\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha^\lambda\right)=\left(1-(1-0)^\lambda,\ 0^\lambda\right)=(0,0),$$

$$\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda, 1-(1-\nu_\alpha)^\lambda\right)=\left(0^\lambda, 1-(1-0)^\lambda\right)=(0,0),$$

即

$$\lambda(0,0)=(0,0), \quad (0,0)^\lambda=(0,0).$$

4) 若 $\lambda\to 0$ 且 $0<\mu_\alpha,\nu_\alpha<1$，则

$$\lambda\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha^\lambda\right)\to(0,1),$$

$$\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda,1-(1-\nu_\alpha)^\lambda\right)\to(1,0).$$

5) 若 $\lambda\to+\infty$ 且 $0<\mu_\alpha,\nu_\alpha<1$，则

$$\lambda\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha^\lambda\right)\to(1,0),$$

$$\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda,1-(1-\nu_\alpha)^\lambda\right)\to(0,1).$$

6) 若 $\lambda=1$，则

$$\lambda\alpha=\left(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\ \nu_\alpha^\lambda\right)=(\mu_\alpha,\ \nu_\alpha)=\alpha,$$

$$\alpha^\lambda=\left(\mu_\alpha^\lambda,1-(1-\nu_\alpha)^\lambda\right)=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)=\alpha,$$

即

$$\lambda\alpha=\alpha,\quad \alpha^\lambda=\alpha\quad(\lambda=1).$$

定理 1.3 设 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$，$\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})$ 且 $\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},\nu_{\alpha_2})$ 为直觉模糊数，$\lambda,\lambda_1,\lambda_2>0$，则

1) $\alpha_1\oplus\alpha_2=\alpha_2\oplus\alpha_1$;
2) $\alpha_1\otimes\alpha_2=\alpha_2\otimes\alpha_1$;
3) $\lambda(\alpha_1\oplus\alpha_2)=\lambda\alpha_1\oplus\lambda\alpha_2$;
4) $(\alpha_1\otimes\alpha_2)^\lambda={\alpha_1}^\lambda\otimes{\alpha_2}^\lambda$;
5) $\lambda_1\alpha\oplus\lambda_2\alpha=(\lambda_1+\lambda_2)\alpha$;
6) $\alpha^{\lambda_1}\otimes\alpha^{\lambda_2}=\alpha^{(\lambda_1+\lambda_2)}$.

证明 1) 根据定义 1.9 中运算法则 4)，可得

$$\begin{aligned}\alpha_1\oplus\alpha_2&=(\mu_{\alpha_1}+\mu_{\alpha_2}-\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},\ \nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})\\&=(\mu_{\alpha_2}+\mu_{\alpha_1}-\mu_{\alpha_2}\mu_{\alpha_1},\ \nu_{\alpha_2}\nu_{\alpha_1})\\&=\alpha_2\oplus\alpha_1.\end{aligned}$$

2) 根据定义 1.9 中运算法则 5)，可得

$$\begin{aligned}\alpha_1\otimes\alpha_2&=(\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2},\ \nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})\\&=(\mu_{\alpha_2}\mu_{\alpha_1},\ \nu_{\alpha_2}+\nu_{\alpha_1}-\nu_{\alpha_2}\nu_{\alpha_1})\\&=\alpha_1\otimes\alpha_2.\end{aligned}$$

3) 根据定义 1.9 中运算法则 4)和 6)，有

$$\lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \left(1-(1-(\mu_{\alpha_1}+\mu_{\alpha_2}-\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}))^{\lambda},\ (\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right)$$

$$= \left(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda}(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda},\ (\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right), \tag{1.21}$$

又因为

$$\lambda\alpha_1 = \left(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda},\ \nu_{\alpha_1}^{\lambda}\right),$$

$$\lambda\alpha_2 = \left(1-(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda},\ \nu_{\alpha_2}^{\lambda}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2 &= \left(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda}+1-(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda}-(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda})(1-(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda}),\ (\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right)\\ &= \left(2-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda}-(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda}-(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda}-(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda}\right.\\ &\quad \left.+(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda}(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda}),\ (\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right)\\ &= \left(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\lambda}(1-\mu_{\alpha_2})^{\lambda},\ (\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right).\end{aligned} \tag{1.22}$$

由(1.21)式和(1.22)式可知:

$$\lambda(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = \lambda\alpha_1 \oplus \lambda\alpha_2 .$$

4) 根据定义 1.9 中运算法则 5)和 7)，有

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)^{\lambda} = \left((\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2})^{\lambda},\ 1-(1-(\nu_{\alpha_1}+\nu_{\alpha_2}-\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_2}))^{\lambda}\right)$$

$$= \left((\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2})^{\lambda},\ 1-((1-\nu_{\alpha_1})(1-\nu_{\alpha_2}))^{\lambda}\right)$$

$$= \left(\mu_{\alpha_1}^{\lambda}\mu_{\alpha_2}^{\lambda},\ 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\lambda}(1-\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right), \tag{1.23}$$

又因为

$$\alpha_1{}^{\lambda} = \left(\mu_{\alpha_1}^{\lambda},\ 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\lambda}\right), \quad \alpha_2{}^{\lambda} = \left(\mu_{\alpha_2}^{\lambda},\ 1-(1-\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha_1^{\lambda} \otimes \alpha_2^{\lambda} &= \left(\mu_{\alpha_1}^{\lambda}\mu_{\alpha_2}^{\lambda}, 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\lambda}+1-(1-\nu_{\alpha_2})^{\lambda}-(1-(1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\lambda})(1-(1-\nu_{\alpha_2})^{\lambda}))\right)\\ &= \left(\mu_{\alpha_1}^{\lambda}\mu_{\alpha_2}^{\lambda},\ 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\lambda}(1-\nu_{\alpha_2})^{\lambda}\right).\end{aligned} \tag{1.24}$$

由(1.23)式和(1.24)式可知

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)^\lambda = {\alpha_1}^\lambda \otimes {\alpha_2}^\lambda .$$

5) 根据定义 1.9 中运算法则 6), 可得

$$\lambda_1\alpha = \left(1-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_1},\ \nu_\alpha^{\lambda_1}\right),$$
$$\lambda_2\alpha = \left(1-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_2},\ \nu_\alpha^{\lambda_2}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda_1\alpha \oplus \lambda_2\alpha &= \left(2-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_1}-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_2}\ -(1-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_1})(1-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_2}),\ \nu_\alpha^{\lambda_1}\nu_\alpha^{\lambda_2}\right)\\ &= \left(1-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_1}(1-\mu_\alpha)^{\lambda_2},\ (\nu_\alpha)^{\lambda_1+\lambda_2}\right)\\ &= \left(1-(1-\mu_\alpha)^{\lambda_1+\lambda_2},\ (\nu_\alpha)^{\lambda_1+\lambda_2}\right)\\ &= (\lambda_1+\lambda_2)\alpha .\end{aligned}$$

6) 根据定义 1.9 中运算法则 7), 可得

$$\alpha^{\lambda_1} = \left(\mu_\alpha^{\lambda_1},\ (1-\nu_\alpha)^{\lambda_1}\right),$$
$$\alpha^{\lambda_2} = \left(\mu_\alpha^{\lambda_2},\ (1-\nu_\alpha)^{\lambda_2}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha^{\lambda_1} \otimes \alpha^{\lambda_2} &= \left(\mu_\alpha^{\lambda_1}\mu_\alpha^{\lambda_2},\ (1-\nu_\alpha)^{\lambda_1}+(1-\nu_\alpha)^{\lambda_2}-(1-\nu_\alpha)^{\lambda_1}(1-\nu_\alpha)^{\lambda_2}\right)\\ &= \left(\mu_\alpha^{\lambda_1}\mu_\alpha^{\lambda_2}, (1-\nu_\alpha)^{\lambda_1}(1-\nu_\alpha)^{\lambda_2}\right)\\ &= \left((\mu_\alpha)^{\lambda_1+\lambda_2},\ (1-\nu_\alpha)^{\lambda_1+\lambda_2}\right)\\ &= \alpha^{\lambda_1+\lambda_2} .\end{aligned}$$

定理证毕.

1.3　直觉模糊集成算子

基于定义 1.9, 下面给出直觉模糊数的一些集成算子:

定义 1.10[10]　设 $\alpha_j = (\mu_{\alpha_j}, \nu_{\alpha_j})$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组直觉模糊数, 且设 $\mathrm{IFWA}: \Theta^n \to \Theta$, 若

$$\mathrm{IFWA}_\omega(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \omega_1\alpha_1 \oplus \omega_2\alpha_2 \oplus \cdots \oplus \omega_n\alpha_n, \tag{1.25}$$

则称 IFWA 为直觉模糊加权平均算子, 其中 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为

α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量，$\omega_j\in[0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$)，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$．特别地，若 $\omega=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm{T}}$，则 IFWA 算子退化为直觉模糊平均(IFA)算子:

$$\mathrm{IFA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{n}(\alpha_1\oplus\alpha_2\oplus\cdots\oplus\alpha_n)\,. \tag{1.26}$$

定义 1.11 [9] 设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数，且设 $\mathrm{IFWG}:\Theta^n\to\Theta$，若

$$\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha_1^{\omega_1}\otimes\alpha_2^{\omega_2}\otimes\cdots\otimes\alpha_n^{\omega_n}\,, \tag{1.27}$$

则称 IFWG 为直觉模糊加权几何算子，其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 的指数权重向量，$\omega_j\in[0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$)，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$．特别地，若 $\omega=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm{T}}$，则 IFWG 算子退化为直觉模糊几何(IFG)算子:

$$\mathrm{IFG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1\otimes\alpha_2\otimes\cdots\otimes\alpha_n)^{\frac{1}{n}}\,. \tag{1.28}$$

由定义 1.9、定义 1.10 和定理 1.3 得到下列定理:

定理 1.4[10] 设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊值，则由 IFWA 算子得到的集成值也是直觉模糊数，其中

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right), \tag{1.29}$$

其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为直觉模糊数组 α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量，$\omega_j\in[0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$)，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$．特别地，若 $\mu_{\alpha_j}=1-\nu_{\alpha_j}$ ($j=1,2,\cdots,n$)，则(1.29)式退化为下面的形式:

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j}\right). \tag{1.30}$$

证明 下面用数学归纳法证明:

1) 当 $n=2$ 时，则

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)=\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2\,.$$

根据定理 1.2 可知：$\omega_1\alpha_1$ 和 $\omega_2\alpha_2$ 均为直觉模糊数，$\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2$ 的值也为直觉模糊数，由定义 1.9 中的运算法则 6)，有

$$\omega_1\alpha_1=(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\omega_1},\ \nu_{\alpha_1}^{\omega_1}),$$

$$\omega_2\alpha_2=(1-(1-\mu_{\alpha_2})^{\omega_2},\ \nu_{\alpha_2}^{\omega_2}),$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{IFWA}_\omega(\alpha_1,\alpha_2)&=\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2\\&=(2-(1-\mu_{\alpha_1})^{\omega_1}-(1-\nu_{\alpha_2})^{\omega_2}\\&\quad-(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\omega_1})(1-(1-\mu_{\alpha_2})^{\omega_2}),\ \nu_{\alpha_1}^{\omega_1}\nu_{\alpha_2}^{\omega_2})\\&=(1-(1-\mu_{\alpha_1})^{\omega_1}(1-\mu_{\alpha_2})^{\omega_2},\ \nu_{\alpha_1}^{\omega_1}\nu_{\alpha_2}^{\omega_2}).\end{aligned}$$

2) 假设 $n=k$, (1.29)式也成立, 即

$$\begin{aligned}\mathrm{IFWA}_\omega(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)&=\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2\oplus\cdots\oplus\omega_k\alpha_k\\&=\left(1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{k}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right),\end{aligned}$$

且其集成值为直觉模糊数, 则当 $n=k+1$时, 由定义 1.9 中的运算法则 4)和 6), 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{IFWA}_\omega(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+1})&=\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2\oplus\cdots\oplus\omega_k\alpha_k\oplus\omega_{k+1}\alpha_{k+1}\\&=(\omega_1\alpha_1\oplus\omega_2\alpha_2\oplus\cdots\oplus\omega_k\alpha_k)\oplus\omega_{k+1}\alpha_{k+1}\\&=\left(1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j}+(1-(1-\mu_{\alpha_{k+1}})^{\omega_{k+1}})\right.\\&\qquad\left.-(1-\prod_{j=1}^{k}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j})(1-(1-\mu_{\alpha_{k+1}})^{\omega_{k+1}}),\ \prod_{j=1}^{k+1}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right)\\&=\left(1-\prod_{j=1}^{k+1}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{k+1}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right),\end{aligned}$$

其集成值为直觉模糊数. 因此, 当 $n=k+1$ 时, (1.29)式也成立.

因此, 由 1)和 2)可知: (1.29)式对任何 n 都成立. 定理证毕.

定理 1.5[9] 设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊值, 则由 IFWG 算子得到的集成值也是直觉模糊数, 其中

$$\mathrm{IFWG}_\omega(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j},\ 1-\prod_{j=1}^{n}(1-\nu_{\alpha_j})^{\omega_j}\right),\tag{1.31}$$

其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为直觉模糊数组 α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 的指数权重向量,

$\omega_j \in [0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$)， $\sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1$. 特别地，若 $\mu_{\alpha_j} = 1-\nu_{\alpha_j}$ ($j=1,2,\cdots,n$)，则 (1.31)式退化为下面的形式:

$$\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \left(\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j},\ 1-\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right). \tag{1.32}$$

证明 下面用数学归纳法证明:

1) 当 $n=2$ 时，则

$$\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1^{\omega_1} \otimes \alpha_2^{\omega_2}.$$

根据定理 1.2 可知: $\alpha_1^{\omega_1}$ 和 $\alpha_2^{\omega_2}$ 均为直觉模糊数，$\alpha_1^{\omega_1} \otimes \alpha_2^{\omega_2}$ 的值也为直觉模糊数，由定义 1.9 中的运算法则 7)，可得

$$\alpha_1^{\omega_1} = \left(\mu_{\alpha_1}^{\omega_1}, 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\omega_1}\right),$$

$$\alpha_2^{\omega_2} = \left(\mu_{\alpha_2}^{\omega_2}, 1-(1-\nu_{\alpha_2})^{\omega_2}\right),$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)\\
&=\alpha_1^{\omega_1} \otimes \alpha_2^{\omega_2}\\
&=\left(\mu_{\alpha_1}^{\omega_1}\mu_{\alpha_2}^{\omega_2},\ 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\omega_1}+1-(1-\nu_{\alpha_2})^{\omega_2}-(1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\omega_1})(1-(1-\nu_{\alpha_2})^{\omega_2})\right)\\
&=\left(\mu_{\alpha_1}^{\omega_1}\mu_{\alpha_2}^{\omega_2},\ 1-(1-\nu_{\alpha_1})^{\omega_1}(1-\nu_{\alpha_2})^{\omega_2}\right).
\end{aligned}$$

2) 假设 $n=k$, (1.31)式也成立，即

$$\begin{aligned}
\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k) &= \alpha_1^{\omega_1} \otimes \alpha_2^{\omega_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_k^{\omega_k}\\
&=\left(\prod_{j=1}^{k}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j}, 1-\prod_{j=1}^{k}(1-\nu_{\alpha_j})^{\omega_j}\right),
\end{aligned}$$

且其集成值为直觉模糊数，则当 $n=k+1$ 时，由定义 1.9 中的运算法则 5)和 7)，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+1}) &= \alpha_1^{\omega_1} \otimes \alpha_2^{\omega_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_k^{\omega_k} \otimes \alpha_{k+1}^{\omega_{k+1}}\\
&=(\alpha_1^{\omega_1} \otimes \alpha_2^{\omega_2} \otimes \cdots \otimes \alpha_k^{\omega_k}) \otimes \alpha_{k+1}^{\omega_{k+1}}\\
&=\left(\prod_{j=1}^{k+1}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j},\ 1-\prod_{j=1}^{k}(1-\nu_{\alpha_j})^{\omega_j} + \left(1-(1-\nu_{\alpha_{k+1}})^{\omega_{k+1}}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$-\left(1-\prod_{j=1}^{k}(1-\nu_{\alpha_j})^{\omega_j}\right)\left(1-(1-\nu_{\alpha_{k+1}})^{\omega_{k+1}}\right)\Bigg)$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{k+1}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j},\ 1-\prod_{j=1}^{k+1}(1-\nu_{\alpha_j})^{\omega_j}\right),$$

其集成值为直觉模糊数. 因此, 当 $n=k+1$ 时, (1.31)式也成立.

因此, 由 1)和 2)可知: (1.31)式对任何 n 都成立. 定理证毕.

例 1.3 设 $\alpha_1=(0.3, 0.5)$, $\alpha_2=(0.2, 0.6)$, $\alpha_3=(0.7, 0.2)$, 且 $\alpha_4=(0.4, 0.3)$ 为直觉模糊数, 且 $\omega=(0.3, 0.4, 0.2, 0.1)^{\mathrm{T}}$ 为 α_j $(j=1,2,3,4)$ 的权重向量, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)&=\left(1-\prod_{j=1}^{4}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{4}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right)\\&=\Big(1-(1-0.3)^{0.3}\times(1-0.2)^{0.4}\times(1-0.7)^{0.2}\times(1-0.4)^{0.1},\\&\qquad 0.5^{0.3}\times0.6^{0.4}\times0.2^{0.2}\times0.3^{0.1}\Big)\\&=(0.386, 0.425),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)&=\left(\prod_{j=1}^{4}\mu_{\alpha_j}^{\omega_j},\ 1-\prod_{j=1}^{4}(1-\nu_{\alpha_j})^{\omega_j}\right)\\&=(0.3^{0.3}\times0.2^{0.4}\times0.7^{0.2}\times0.4^{0.1},\\&\qquad 1-(1-0.5)^{0.3}\times(1-0.6)^{0.4}\times(1-0.2)^{0.2}\times(1-0.3)^{0.1})\\&=(0.311, 0.480).\end{aligned}$$

IFWA 算子具有下列性质:

定理 1.6[10]**(幂等性)** 设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数, $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量, $\omega_j\in[0,1]$ ($j=1,2,\cdots,n$), $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$. 若所有直觉模糊数 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是相等的, 即 $\alpha_j=\alpha$ ($j=1,2,\cdots,n$), 则

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha\ . \tag{1.33}$$

证明 设 $\alpha=(\mu_{\alpha},\nu_{\alpha})$, 则由(1.29)式以及 $\alpha_j=\alpha$ ($j=1,2,\cdots,n$), 得

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\right)$$

$$=\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha})^{\omega_j},\ \prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha}^{\omega_j}\right)$$
$$=\left(1-(1-\mu_{\alpha})^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j},\ (\nu_{\alpha})^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j}\right)$$
$$=(\mu_{\alpha},\nu_{\alpha})=\alpha\ .$$

定理证毕.

定理 1.7 [10] **(有界性)**　设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数, 且

$$\alpha^{-}=\left(\min_j\{\mu_{\alpha_j}\},\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}\right),\quad \alpha^{+}=\left(\max_j\{\mu_{\alpha_j}\},\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}\right),$$

则

$$\alpha^{-}\leqslant \mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\alpha^{+}\ . \tag{1.34}$$

证明　由于对任意 j, 有

$$\min_j\{\mu_{\alpha_j}\}\leqslant\mu_{\alpha_j}\leqslant\max_j\{\mu_{\alpha_j}\},$$

$$\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}\leqslant\nu_{\alpha_j}\leqslant\max_j\{\nu_{\alpha_j}\},$$

则

$$\begin{aligned}1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j}&\geqslant 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\min_j\{\mu_{\alpha_j}\}\right)^{\omega_j}\\&=1-\left(1-\min_j\{\mu_{\alpha_j}\}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j}\\&=\min_j\{\mu_{\alpha_j}\},\end{aligned}\tag{1.35}$$

$$\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\geqslant\prod_{j=1}^{n}\left(\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}\right)^{\omega_j}=\left(\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j}=\min_j\{\nu_{\alpha_j}\},\tag{1.36}$$

$$\begin{aligned}1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j}&\leqslant 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\max_j\{\mu_{\alpha_j}\}\right)^{\omega_j}\\&=1-\left(1-\max_j\{\mu_{\alpha_j}\}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j}\\&=\max_j\{\mu_{\alpha_j}\},\end{aligned}\tag{1.37}$$

$$\prod_{j=1}^{n} \nu_{\tilde{a}_j}^{\omega_j} \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}\right)^{\omega_j} = \left(\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\omega_j} = \max_j\{\nu_{\alpha_j}\}. \tag{1.38}$$

设 $\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$, 则

$$s(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha \leqslant \max_j\{\mu_{\alpha_j}\}-\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}=s(\alpha^+),$$

$$s(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha \geqslant \min_j\{\mu_{\alpha_j}\}-\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}=s(\alpha^-).$$

下面分三种情况讨论:

1) 若 $s(\alpha)<s(\alpha^+)$ 且 $s(\alpha)>s(\alpha^-)$, 则由定义 1.3 可知(1.34)式成立.

2) 若 $s(\alpha)=s(\alpha^+)$, 即 $\mu_\alpha-\nu_\alpha=\max_j\{\mu_{\alpha_j}\}-\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}$, 则根据(1.35)式和(1.36)式, 可得

$$\mu_\alpha=\max_j\{\mu_{\alpha_j}\}, \quad \nu_\alpha=\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}.$$

因此

$$h(\alpha)=\mu_\alpha+\nu_\alpha=\max_j\{\mu_{\alpha_j}\}+\min_j\{\nu_{\alpha_j}\}=h(\alpha^+).$$

此时, 根据定义 1.3, 有

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha^+. \tag{1.39}$$

3) 若 $s(\alpha)=s(\alpha^-)$, 即 $\mu_\alpha-\nu_\alpha=\min_j\{\mu_{\alpha_j}\}-\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}$, 则由(1.35)式和(1.38)式可知

$$\mu_\alpha=\min_j\{\mu_{\alpha_j}\}, \quad \nu_\alpha=\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}.$$

因此

$$h(\alpha)=\mu_\alpha+\nu_\alpha=\min_j\{\mu_{\alpha_j}\}+\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}=h(\alpha^-).$$

此时, 根据定义 1.3, 有

$$\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha^-. \tag{1.40}$$

因此, 由 1)~3)可知: (1.34)式一定成立. 定理证毕.

定理 1.8[10] **(单调性)** 设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 和 $\alpha_j^*=(\mu_{\alpha_j^*},\nu_{\alpha_j^*})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为两组直觉模糊数, 若对任意 j, 有 $\mu_{\alpha_j}\leqslant\mu_{\alpha_j^*}$ 且 $\nu_{\alpha_j}\geqslant\nu_{\alpha_j^*}$, 则

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant \mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*)\,. \tag{1.41}$$

证明　因为对任意 j，有 $\mu_{\alpha_j}\leqslant\mu_{\alpha_j^*}$ 和 $\nu_{\alpha_j}\geqslant\nu_{\alpha_j^*}$，因此, 对任意 j，有

$$\left(1-\mu_{\alpha_j}\right)^{\omega_j}\geqslant\left(1-\mu_{\alpha_j^*}\right)^{\omega_j},\quad \nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\geqslant\nu_{\alpha_j^*}^{\omega_j}\,.$$

进一步地, 有

$$1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j}\right)^{\omega_j}\leqslant 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j^*}\right)^{\omega_j},\quad \prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\geqslant\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j^*}^{\omega_j}\,,$$

从而, 可得

$$1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j}\right)^{\omega_j}-\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}\leqslant 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j^*}\right)^{\omega_j}-\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j^*}^{\omega_j}\,. \tag{1.42}$$

若 $\alpha=\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 且 $\alpha^*=\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*)$，则由(1.42)式可得

$$s(\alpha)\leqslant s(\alpha^*)\,.$$

若 $s(\alpha)<s(\alpha^*)$，则由定义 1.3 可得

$$\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)<\mathrm{IFWA}_{\omega}(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*)\,. \tag{1.43}$$

若 $s(\alpha)=s(\alpha^*)$，即

$$1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j}\right)^{\omega_j}-\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}=1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j^*}\right)^{\omega_j}-\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j^*}^{\omega_j}\,.$$

因此, 根据条件: 对任意 j，$\mu_{\alpha_j}\leqslant\mu_{\alpha_j^*}$ 和 $\nu_{\alpha_j}\geqslant\nu_{\alpha_j^*}$，有

$$1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j}\right)^{\omega_j}=1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_j^*}\right)^{\omega_j},$$

$$\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j}=\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j^*}^{\omega_j}\,.$$

因此

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= 1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j})^{\omega_j}+\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}^{\omega_j} \\ &= 1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j^*})^{\omega_j}+\prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j^*}^{\omega_j}=h(\alpha^*). \end{aligned} \tag{1.44}$$

由(1.43)式和(1.44)式可知: (1.41)式一定成立. 定理证毕.

类似地，IFWG 算子也有上述性质:

定理 1.9 [9]　设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数，且 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 的权重向量，$\omega_j\in[0,1]$ $(j=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，则

1) **(幂等性)**　若所有直觉模糊数 α_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 均相等，即 $\alpha_j=\alpha$ $(j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha\,. \tag{1.45}$$

2) **(有界性)**　对任意 ω，有

$$\alpha^-\leqslant \mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\alpha^+, \tag{1.46}$$

其中

$$\alpha^-=(\min_j\{\mu_{\alpha_j}\},\max_j\{\nu_{\alpha_j}\}),\quad \alpha^+=(\max_j\{\mu_{\alpha_j}\},\min_j\{\nu_{\alpha_j}\})\,.$$

3) **(单调性)**　设 $\alpha_j^*=(\mu_{\alpha_j^*},\nu_{\alpha_j^*})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数，若对任意 j，有 $\mu_{\alpha_j}\leqslant\mu_{\alpha_j^*}$ 且 $\nu_{\alpha_j}\geqslant\nu_{\alpha_j^*}$，则

$$\mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant \mathrm{IFWG}_{\omega}(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\cdots,\alpha_n^*)\,. \tag{1.47}$$

基于定义 1.3 和定义 1.9，下面给出一些直觉模糊有序加权集成算子:

定义 1.12 [10]　设 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊数. 直觉模糊有序加权平均(IFOWA)算子是一个映射: $\mathrm{IFOWA}:\Theta^n\to\Theta$，使得 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，$w_j\in[0,1]$ $(j=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，且

$$\mathrm{IFOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=w_1\alpha_{\sigma(1)}\oplus w_2\alpha_{\sigma(2)}\oplus\cdots\oplus w_n\alpha_{\sigma(n)}, \tag{1.48}$$

其中 $(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n))$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换，使得对任意 j，有