21 世纪高等院校教材

复变函数与积分变换

宋叔尼　孙　涛　张国伟　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要内容包括:复变函数与解析函数,复变函数的积分,复变函数的级数,留数及其应用,保角映射,Fourier 变换,Laplace 变换,Z 变换,小波变换等.作者用 MATLAB 求解验算了大量的例题,使读者能够熟悉 MATLAB 在复变函数与积分变换课程中的基本方法.另外,在 Cauchy 积分定理的证明,已知解析函数的实部(或虚部)求该解析函数,Taylor 级数与 Laurent 展开级数定理的证明,无穷远点留数的计算等方面有着自己鲜明的特色.

本书适合高等院校工科各专业,尤其是自动控制、通信、电子信息、测控、机械工程、材料成型等专业的大学生作为教学用书,也可供这些专业的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/宋叔尼,孙涛,张国伟编著.—北京:科学出版社,2006

(21 世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-017687-1

Ⅰ.复… Ⅱ.①宋… ②孙… ③张… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 081576 号

责任编辑:李鹏奇 王 静 / 责任校对:郑金红
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006 年 8 月第一次印刷 印张:15 3/4
印数:1—3 500 字数:298 000

定价:23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

前　　言

复变函数起源于分析、力学、数学物理等理论与实际问题，作为流体力学和电动力学中最重要的一种向量场的特征，具有鲜明的物理背景.复变函数理论一直伴随着科学技术的发展，从中汲取养分，并为之提供方法和工具，促进了工程技术等学科的迅速发展. 建立在复变函数理论之上的积分变换方法，通过特定形式的积分建立函数之间的对应关系.它既能简化计算，又具有明确的物理意义，在许多领域被广泛地应用，如电力工程、通信和控制领域、信号分析和图像处理、语音识别与合成、医学成像与诊断、地质勘探与地震预报等方面以及其他许多数学、物理和工程技术领域.而在此基础上发展起来的离散形式的变换在计算机时代更是特别重要.

为适应现代科学技术的发展及相关专业的要求，我们编写的《复变函数与积分变换》以解析函数的理论为基础，阐述了复变函数的积分、级数、留数以及保角映射.同时，对 Fourier 变换及离散 Fourier 变换、Laplace 变换、Z 变换及小波变换等作了较系统介绍，并用 MATLAB 求解验算了积分变换中的所有例题及积分、级数、留数中的部分例题，从而使读者能够熟悉和掌握 MATLAB 在复变函数与积分变换课程中的基本使用方法.本书深入浅出，突出基本概念和方法，在知识体系完整性的基础上，尽量做到数学推导简单易懂并在与工程问题密切结合等方面形成了自己的特色.书中精心编排了大量的例题和习题，以供读者进一步理解教材的内容，其中加 * 号者是特为学有余力的读者提供.

本书的出版获得了科学出版社的大力支持，获得了东北大学教材建设计划立项项目“复变函数与积分变换教材建设”以及东北大学学位与研究生教育科学研究计划的大力支持，在此向他们表示感谢.同时，孙艳蕊教授等在试用本书期间提出了宝贵的建议，在此我们表示衷心的感谢.

本书由宋叔尼负责书稿的策划和统稿工作并编写了第 4、5 章和第 8 章.孙涛编写了第 1～3 章.张国伟编写了第 6、7 章和第 9～11 章，并运行了所有的 MATLAB 程序.

欢迎读者对书中错误和不足之处提出宝贵意见.

作　者

2006 年 5 月

目　　录

第 1 章　复变函数与解析函数 …… 1

1.1　复数 …… 1

1.1.1　复数的概念 …… 1

1.1.2　复数的四则运算 …… 1

1.1.3　复平面与复数的表示法 …… 2

1.1.4　乘幂与方根 …… 4

1.1.5　复球面与无穷远点 …… 6

1.2　平面点集 …… 7

1.2.1　区域 …… 7

1.2.2　Jordan 曲线、连通性 …… 9

1.3　连续函数 …… 11

1.4　解析函数 …… 13

1.4.1　复变函数的导数 …… 13

1.4.2　解析函数 …… 15

1.5　函数可导的充要条件 …… 16

1.6　初等解析函数 …… 19

1.6.1　指数函数 …… 19

1.6.2　对数函数 …… 20

1.6.3　幂函数 …… 23

1.6.4　三角函数和双曲函数 …… 24

习题 1 …… 26

第 2 章　复变函数的积分 …… 29

2.1　复变函数的积分 …… 29

2.1.1　积分的概念 …… 29

2.1.2　积分存在的条件及积分的性质 …… 30

2.2　Cauchy 积分定理 …… 33

2.3　Cauchy 积分公式 …… 36

2.4　解析函数的原函数 …… 41

习题 2 …… 44

第 3 章 复变函数的级数 …… 47
3.1 复数项级数 …… 47
3.1.1 复数列的极限 …… 47
3.1.2 复数项级数 …… 47
3.2 幂级数 …… 49
3.2.1 幂级数的概念 …… 49
3.2.2 幂级数的性质 …… 52
3.3 Taylor 级数 …… 53
3.4 Laurent 级数 …… 61
3.5 调和函数 …… 67
3.5.1 调和函数的概念与实例 …… 67
3.5.2 解析函数与调和函数的关系 …… 68
习题 3 …… 70
第 4 章 留数及其应用 …… 73
4.1 孤立奇点 …… 73
4.1.1 可去奇点 …… 73
4.1.2 极点 …… 74
4.1.3 本性奇点 …… 76
4.2 留数的一般理论 …… 76
4.2.1 留数定义及留数基本定理 …… 76
4.2.2 留数的计算 …… 78
4.3 函数在无穷远点的留数 …… 82
4.3.1 函数在无穷远点的性质 …… 82
4.3.2 函数在无穷远点的留数 …… 83
4.4 留数的应用 …… 86
4.4.1 三角有理式的积分 …… 86
4.4.2 有理函数的无穷积分 …… 88
4.4.3 有理函数与三角函数乘积的积分 …… 90
4.4.4 零点的分布 …… 95
习题 4 …… 97
第 5 章 保角映射 …… 99
5.1 映射与保角映射的概念 …… 99
5.1.1 映射的概念 …… 99
5.1.2 导数的几何意义 …… 100

5.1.3　保角映射的概念 …… 102
5.1.4　关于保角映射的一般理论 …… 103
5.2　分式线性映射 …… 104
5.2.1　分式线性映射的基本性质 …… 106
5.2.2　唯一确定分式线性映射的条件 …… 109
5.2.3　分式线性映射的典型例子 …… 110
5.3　几个初等函数所构成的映射 …… 113
5.3.1　幂函数构成的映射 …… 113
5.3.2　指数函数与对数函数构成的映射 …… 116
5.4　保角映射举例 …… 117
习题 5 …… 123
第 6 章　积分变换的预备知识 …… 127
6.1　几个典型函数 …… 127
6.1.1　单位阶跃函数 …… 127
6.1.2　矩形脉冲函数 …… 127
6.1.3　δ 函数 …… 128
6.2　卷积的概念与性质 …… 130
习题 6 …… 133
第 7 章　Fourier 变换 …… 134
7.1　Fourier 变换概念与性质 …… 134
7.1.1　Fourier 变换的定义 …… 134
7.1.2　Fourier 变换的性质 …… 137
7.1.3　δ 函数的 Fourier 变换 …… 141
7.2　离散 Fourier 变换 …… 142
7.2.1　离散 Fourier 变换及其性质 …… 143
7.2.2　快速 Fourier 变换 …… 145
7.3　Fourier 变换的应用 …… 147
习题 7 …… 150
第 8 章　Laplace 变换 …… 152
8.1　Laplace 变换的概念 …… 152
8.1.1　Laplace 变换的定义 …… 152
8.1.2　周期函数和 δ 函数的 Laplace 变换 …… 155
8.2　Laplace 变换的性质 …… 156
8.3　Laplace 逆变换 …… 164

8.4 Laplace 变换的应用 …… 168
习题 8 …… 175
第 9 章 Z 变换 …… 177
9.1 Z 变换的概念与性质 …… 177
9.1.1 Z 变换的定义 …… 177
9.1.2 Z 变换的性质 …… 179
9.2 Z 逆变换 …… 182
9.3 Z 变换的应用 …… 184
习题 9 …… 187
第 10 章 小波变换基础 …… 189
10.1 小波变换的背景 …… 189
10.2 窗口 Fourier 变换简介 …… 191
10.3 连续小波变换 …… 194
10.4 二进小波变换和离散小波变换 …… 196
10.5 多分辨分析 …… 198
10.6 Mallat 分解与重构算法 …… 199
10.7 小波变换应用实例 …… 200
第 11 章 复变函数与积分变换的 MATLAB 求解 …… 205
11.1 MATLAB 基础 …… 205
11.2 复变函数的 MATLAB 求解 …… 210
11.3 Fourier 变换的 MATLAB 求解 …… 219
11.4 Laplace 变换的 MATLAB 求解 …… 226
11.5 Z 变换的 MATLAB 求解 …… 231
习题参考答案 …… 234
参考文献 …… 243

第 1 章　复变函数与解析函数

1.1　复　　数

1.1.1　复数的概念

由于解代数方程的需要,人们引进了复数.例如,简单的代数方程

$$x^2+1=0$$

在实数域内无解.为了建立代数方程的普遍理论,引入等式

$$i^2=-1$$

由该等式所定义的数称为虚单位 $i=\sqrt{-1}$,并称形如 $x+iy$ 或 $x+yi$ 的表达式为复数,其中 x 和 y 是任意两个实数.把这里的 x 和 y 分别称为复数 $z=x+iy$(或 $z=x+yi$)的实部和虚部,并记做

$$x=\mathrm{Re}\,z,\qquad y=\mathrm{Im}\,z$$

当复数的虚部为零,实部不为零(即 $y=0,x\neq 0$)时,复数 $z=x+iy=x+0i=x$ 为实数,而虚部不为零(即 $y\neq 0$)的复数称为虚数.在虚数中,实部为零(即 $x=0$, $y\neq 0$)的称为纯虚数.例如,$3+0i=3$ 是实数,$4+5i$,$-3i$ 都是虚数,而 $-3i$ 是纯虚数.

复数 $x-iy$ 称为复数 $z=x+yi$ 的共轭复数(其中 x,y 均为实数),并记做 $\bar{z}$.显然,$z=x+yi$ 是 $x-iy$ 的共轭复数,并有 $\bar{\bar{z}}=\overline{(\bar{z})}=z$.

1.1.2　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+iy_1$,$z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数,如果 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$,则称 z_1 和 z_2 相等,记为 $z_1=z_2$.

复数 z_1,z_2 的加、减、乘、除运算定义如下:

(1) $z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$;

(2) $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$;

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

不难验证,这些运算满足如下运算规律:

(1) 交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1$,$y_1y_2=y_2y_1$;

(2) 结合律　$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$；

(3) 分配律　$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

并且还满足：

(4) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(5) $\overline{\overline{z}}=\overline{(\overline{z})}=z$；

(6) $z+\overline{z}=2x=2\mathrm{Re}\,z$，$z-\overline{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z$；

(7) $z\overline{z}=x^2+y^2=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2$.

在实际计算中，只要记住 $\mathrm{i}^2=-1$ 及上述各式，四则运算问题便可以解决了.

例 1.1　设 $z_1=3-4\mathrm{i}$，$z_2=-1+\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 及 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解　$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{(3-4\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，而 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{7}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

例 1.2　$\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\mathrm{i}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^5=\mathrm{i}^4\mathrm{i}=\mathrm{i}$.

例 1.3　设 z_1，z_2 是两个任意复数，证明：

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

证明　因为

$$\overline{z_1\overline{z_2}}=\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}=\overline{z_1}z_2$$

所以由运算规律(6)，有

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

本例也可以用乘法和共轭复数的定义证明.

1.1.3　复平面与复数的表示法

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 是由实部 x 和虚部 y 两个实数作为有序的数对确定的，给定复数 z，其实部 x 和虚部 y 也完全确定.这样便建立了复数 z 和一对实数 (x,y) 之间的一一对应.把这一对有序实数视为平面直角坐标系下点 P 的坐标时，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 和 xOy 平面上点 $P(x,y)$ 也构成了一一对应.给定一个复数 $z=x+y\mathrm{i}$，在坐标平面 xOy 上，存在唯一的点 $P(x,y)$ 与 $z=x+y\mathrm{i}$ 对应.反之，对 xOy 平面上的点 $P(x,y)$，存在唯一的复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 与它对应.根据复数的代数运算及向量的代数运算的定义知，这种对应构成了同构映射.因此，可以用 xOy 平面上的点表示复数 z.这时把 xOy 平面称为复平面.有时简称为 Z 平面.

显然，实数与 x 轴上的点一一对应，而 x 轴以外的点都对应一个虚数，纯虚数 $\mathrm{i}y(y\neq0)$ 与 y 轴上的点(除原点)对应.因此，称 x 轴为实轴，y 轴为虚轴.

今后把复平面上的点和复数 z 不加区别，即“点 z”和“复数 z”是同一个意思.有时用大写字母 C 表示全体复数或者复平面.复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 还可以用以原点为起

点而以点 P 为终点的向量表示(图 1.1).

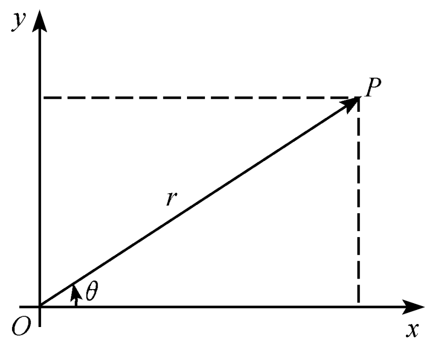


图 1.1

这时复数加、减法满足向量加、减法中的平行四边形法则.

用$\overline{OP}$表示复数 z 时,这个向量在 x 轴和 y 轴上的投影分别为 x 和 y.把向量$\overline{OP}$的长度 r 称为复数 z 的模或称为 z 的绝对值,并记做$|z|$,显然

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1-1}$$

$$|z| \leqslant |x| + |y|, \qquad |x| \leqslant |z|, \qquad |y| \leqslant |z|$$

如果点 P 不是原点(即 $z\neq0$),那么把 x 轴的正向与向量$\overline{OP}$的夹角 θ 称为复数 z 的辐角,记做 $\mathrm{Arg}\,z$.对每个 $z\neq0$,都有无穷多个辐角,因为用 θ_0 表示复数 z 的一个辐角时,

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

就是 z 的辐角的一般表达式.

满足$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的复数 z 的辐角称为主辐角(或称辐角的主值),记做 $\arg z$,则

$$\mathrm{Arg}\,z = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{1-2}$$

也可以把主辐角定义为 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角,这时式(1-2)仍成立.在第 5 章保角映射中,这样规定主辐角比较方便.

当 $z=0$ 时,$\mathrm{Arg}\,z$ 没有意义,即零向量没有确定的方向角;但当 $z=0$ 时,$|z|=0$;当 $z\neq0$ 时,有

$$\tan(\mathrm{Arg}\,z) = \frac{y}{x} \tag{1-3}$$

利用直角坐标与极坐标之间的关系

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-4}$$

表达式(1-4)称为复数 z 的三角表示式.再利用 Euler(欧拉)公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 还可表示为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1-5}$$

式(1-5)称为复数的指数表示式.式(1-4)和式(1-5)中的 $r=|z|$,$\theta=\mathrm{Arg}\,z$.

易见,当 $z\neq0$ 时,$\mathrm{Arg}\,\bar{z}=-\mathrm{Arg}\,z$.当 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$时,$\bar{z}=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.从几何上看,复数 z_2-z_1 所表示的向量,与以 z_1 为起点、z_2 为终点的向量相等(方向相同,模相等).由此可知不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$$

在复数范围内仍然成立.复数的加、减运算对应于复平面上相应向量的加、减运算.

1.1.4 乘幂与方根

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$是两个复数的三角表示式，根据乘法定义和运算法则及两角和公式，

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\qquad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

应该注意的是 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$ 中的加法是集合的加法运算:即将两个集合中所有的元素相加构成的集合.

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\{\theta_1+\theta_2\mid\theta_1\in\mathrm{Arg}z_1,\theta_2\in\mathrm{Arg}z_2\}$$

利用数学归纳法进而可证明:当 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$，$k=1,2,\cdots,n$ 时，

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)] \tag{1-6}$$

特别地，当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=r(\cos\theta+i\sin\theta)$时，

$$z^n=z\cdot z\cdot\cdots\cdot z=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{1-7}$$

于是

$$|z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cdots\cdot|z_n|$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2\cdots z_n)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2+\cdots+\mathrm{Arg}z_n$$

$$|z|^n=|z^n|,\qquad \mathrm{Arg}(z^n)=n\mathrm{Arg}z$$

如果把式(1-6)和式(1-7)写成指数形式，即当 $z_k=r_ke^{i\theta_k}$($k=1,2,\cdots,n$)，$z=re^{i\theta}$时，

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_ne^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)} \tag{1-6$'$}$$

$$z^n=r^ne^{in\theta} \tag{1-7$'$}$$

特别地，当$|z|=r=1$ 时，式(1-7)变为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \tag{1-8}$$

这就是 De Movire(棣莫弗)公式.

当用 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$定义负整数幂时，公式(1-8)仍成立.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，当 $z_2\neq0$(即 $r_2\neq0$)时，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{1}{|z_2|^2}z_1\overline{z_2}=\frac{1}{r_2^2}z_1\overline{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1-9}$$

把式(1-9)写成指数形式，即当 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1-9$'$}$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$$

指数表示法在处理复数的乘、除运算时很方便，其运算结果符合实数情况下所用过的运算规律.

对给定的复数 z，方程 $w^n=z$ 的解 w 称为 z 的 n 次方根，记做 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$. 下面利用公式(1-7)求 $w=\sqrt[n]{z}$. 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则根据式(1-7)，有

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

于是，当 $r\neq0$ 时，

$$\rho^n=r,\qquad \cos n\varphi=\cos\theta,\qquad \sin n\varphi=\sin\theta$$

满足以上三式的充分必要条件是

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\qquad n\varphi=\theta+2k\pi\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

由此得

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\qquad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 表示算术根. 于是

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-10}$$

当取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，对一个取定的 θ，可得 n 个相异根

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

由三角函数的周期性

$$\begin{aligned} w_{k+n}&=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2(k+n)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(k+n)\pi}{n}\right]\\ &=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\ &=w_k \end{aligned}$$

可见,除 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ 外,均是重复出现的,故这 n 个复数就是所要求的 n 个根.

当 $z=0$ 时,$w=0$ 是 $z^{\frac{1}{n}}=0$ 的 n 重根.

在上面的推导过程中,可取 θ 为一个定值,通常取主辐角.若用指数表示式,则当 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时,

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}{n}} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

例 1.4　求方程 $w^4+16=0$ 的四个根.

解　因为 $-16=2^4\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}$,所以方程可化为

$$w^4 = 2^4\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}$$

于是

$$w = \left[2^4\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}}\right]^{\frac{1}{4}} = 2\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k}{2}\pi\right)\mathrm{i}} \qquad (k=0,1,2,3)$$

即

$$w_0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1+\mathrm{i})$$

$$w_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$$

$$w_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$$

$$w_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1-\mathrm{i})$$

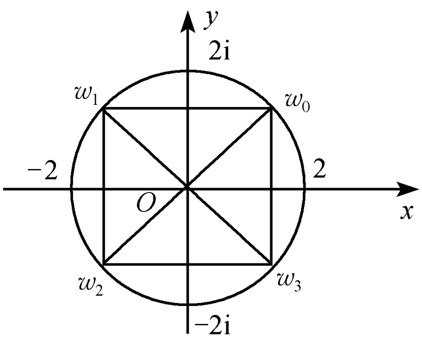


图 1.2

w_0, w_1, w_2, w_3 恰好是以原点为圆心、半径为 2 的圆 $|w|=2$ 的内接正方形的四个顶点(图 1.2),且

$$w_1 = \mathrm{i}w_0$$

$$w_2 = \mathrm{i}w_1 = -w_0$$

$$w_3 = \mathrm{i}w_2 = -\mathrm{i}w_0$$

一般情况下,$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个根就是以原点为中心、半径为 $r^{\frac{1}{n}}$ 的圆的内接正多边形的 n 个顶点所表示的复数.

1.1.5　复球面与无穷远点

复数可以用平面上的点表示,这是复数的几何表示法的一种,另外还可以用球面上的点表示复数.

设 Σ 是与复平面 C 切于原点 O 的球面.过原点 O 做垂直于平面 C 的直线,与 Σ 的另一交点为 N.原点 O 称为 Σ 的南极(S 极),点 N 称为 Σ 的北极(图 1.3).已知平面 C 上的任意点 P 都能对应一个复数 z,联结 PN,则和球面 Σ 交于唯一异

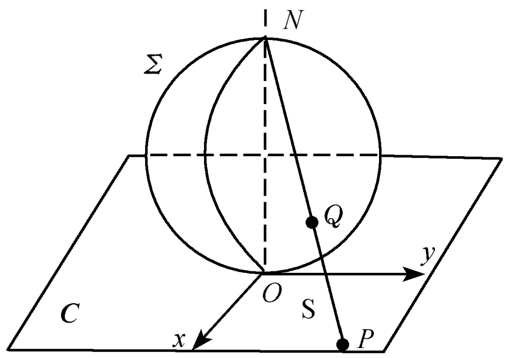


图 1.3

于 N 的点 Q，就用 Q 表示 P．于是平面 C 上任意点 P 都有球面 Σ 上唯一表示它的点 Q；反之，对球面 Σ 上任意异于 N 的点 Q，过 N，Q 的直线与平面 C 交于唯一点 P．显然，Q 正好是 Σ 上表示 P 的点，这说明：任何复数 z 都可以用球面 Σ 上的一点 Q 表示；反之，球面 Σ 上任何异于 N 的点 Q 都能表示唯一的复数 z．球面 Σ 的北极 N 不能对应平面 C 上的一个定点．当球面 Σ 上的点离北极 N 越近时，它所表示的复数的绝对值越大．于是，在复平面 C 上加进去一个假想的点，正好让它和北极 N 对应，称它为无穷远点，并记做 ∞．此处符号 ∞ 代表一个点——无穷远点，不要和过去曾使用过的无穷大相混肴．就是说，这里的 ∞ 是复平面上加进去的对应于北极 N 的点，而无穷大量是一个变量．在复平面中加进去对应于北极的点——无穷远点之后，称它为扩充复平面．而前面提到的 Σ 称为复球面．

对无穷远点而言，其实部、虚部和辐角等概念都没有意义，而约定 $|\infty|=+\infty$．通常的复数称为有限复数或有限点，并且 $|z|<+\infty$．为了使用方便，做如下约定：

设 α 是有限复数，则

$$\alpha\pm\infty=\infty\pm\alpha=\infty$$

$$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty\qquad(\alpha\neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty}=0\qquad(\alpha\neq\infty),\qquad\frac{\alpha}{0}=\infty\qquad(\alpha\neq 0)$$

而 $\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\dfrac{0}{0}$ 以及 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 没有意义．

1.2　平面点集

1.2.1　区域

先介绍邻域、内点、外点、边界点的概念，再给出开集和区域等定义．

1．邻域

z_0 是复平面内的定点，满足不等式

$$|z-z_0|<\delta\qquad(1\text{-}11)$$

的一切点所组成的集合 $\{z\,|\,|z-z_0|<\delta\}$ 称为 z_0 的 δ 邻域，简称为 z_0 的邻域，其中 $\delta>0$．z_0 的邻域实际上是以 z_0 为中心，δ 为半径的圆的内部所有点组成的点集．简记为 $B(z_0,\delta)$．

由满足不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所有点构成的集合称为 z_0 的去心邻域,而满足不等式

$$|z|>R \qquad (R>0) \tag{1-12}$$

的一切点(包括无穷远点)的集合称为无穷远点的邻域,用 $R<|z|<+\infty$ 表示无穷远点的去心邻域.也就是说,在扩充复平面中,去掉圆 $|z|=R$ 及其内部点的点集称为无穷远点的邻域;而在普通复平面中,去掉 $|z|\leqslant R$ 的一切点的集合称为无穷远点的去心邻域.

2.内点

设 E 是复平面上的点集,z_0 是一个定点,若存在 z_0 的一个邻域,使得该邻域内的一切点均属于 E,则称 z_0 是 E 的内点.即存在 $\rho>0$,满足

$$B(z_0,\rho)=\{z\,\big|\,|z-z_0|<\rho\}\subset E$$

3.外点

设 E 是复平面上的点集,z_0 是一个定点,若存在 z_0 的一个邻域,使得在此邻域内的一切点均不属于 E,则称 z_0 是 E 的外点.即存在 $\rho>0$,满足

$$B(z_0,\rho)\cap E=\{z\,\big|\,|z-z_0|<\rho\}\cap E=\phi$$

此处 ϕ 表示空集.

4.边界点

设 E 是复平面上的点集,z_0 是定点,若 z_0 的任何邻域内都含有属于 E 的点和不属于 E 的点,则称 z_0 是 E 的边界点.即对任意的 $\rho>0$,存在 $z_1,z_2\in B(z_0,\rho)$,满足

$$z_1\in E,\qquad z_2\notin E$$

显然,E 的内点属于 E,而外点不属于 E,但边界点既可能属于 E,也可能不属于 E.

E 的边界点的全体所组成的集合称为 E 的边界,记做 ∂E.

5.开集

设 G 是复平面上的点集,如果 G 中的点全部是 G 的内点,则称 G 是开集.

例 1.5　设 z_0 是定点,$r>0$ 是常数,则以 z_0 为中心,r 为半径的圆的内部点,即满足不等式

$$|z-z_0|<r \tag{1-13}$$

的一切点 z 所组成的点集(z_0 的 r 邻域)是开集,而当 $0\leqslant r<R$(r,R 均是常数)时,满足不等式

$$r<|z-z_0|<R \tag{1-14}$$

的一切 z 所组成的点集也是开集.但满足不等式

$$r<|z-z_0|\leqslant R \tag{1-15}$$

的一切点所组成的点集不是开集.因为在圆周 $|z|=R$ 上的点属于由式(1-15)确定的集合,但这些点不是它的内点,而是边界点.

在圆周 $|z-z_0|=r$ 和圆周 $|z-z_0|=R$ 上的点都是由式(1-14)及式(1-15)所确定的点集的边界点.但两个圆周上的点都不属于由式(1-14)所确定的点集,内圆周 $|z-z_0|=r$ 不属于由式(1-15)所确定的点集,外圆周 $|z-z_0|=R$ 属于由式(1-14)所确定的点集.

6.区域

设 D 是复平面上的点集,如果满足以下两个条件:

(1) D 是开集;

(2) D 内的任何两点 z_1 和 z_2 都可以用一条完全位于在 D 内的折线,把 z_1 和 z_2 连接起来(具有这个性质的点集叫做连通的),则称 D 是复平面上的区域.简单地说,连通开集称为区域.

例 1.6　由式(1-13)和式(1-14)所确定的点集都是区域,分别称为圆域和圆环域,但由式(1-15)所确定的点集不是区域,因为虽然具有连通性,但不是开集(图 1.4).

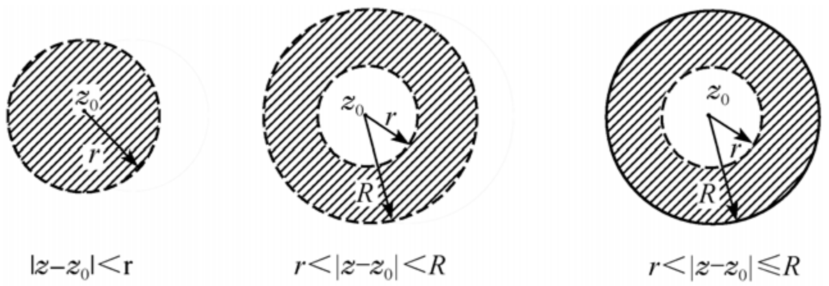


图 1.4

由区域 D 和它的边界 ∂D 所组成的点集,称为闭区域,记做 $\bar{D}$.例如,由式 $|z-z_0|\leqslant r$ 所确定的点集,由 $r\leqslant|z-z_0|\leqslant R$ 所确定的点集以及由 $|z|\geqslant R$ 所确定的点集都是闭区域.

如果一个平面点集完全包含在原点的某一个邻域内,那么称它是有界的.例如,前面所举的由式(1-13)和式(1-14)及式(1-15)所确定的点集都是有界的,但 $|z|\geqslant R$ 所确定的点集不是有界集.不是有界集的点集叫做无界集.例如,整个复平面是区域,也是闭区域,同时也是无界集,$\{z \mid |z|\geqslant R\}$ 是无界闭区域.

1.2.2　Jordan 曲线、连通性

区域的边界往往由一条或多条曲线组成.因此,下面首先讨论复平面上的曲线

及其方程.

当 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$为连续函数时,上述参数方程在 xOy 平面上表示一条连续曲线 C.把 xOy 平面视为复平面时,曲线 C 的参数方程可表示为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{1-16}$$

其中,$x(t),y(t)$是$[\alpha,\beta]$上连续的实值函数.

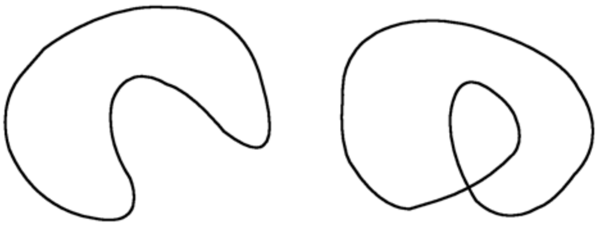
曲线 C 在复平面上的参数方程(1-16)不仅确定了曲线的形状,实际上还给出了曲线的方向,也就是说,曲线是沿着 t 增加的方向变化的.复平面上对应于 $z(\alpha)=x(\alpha)+\mathrm{i}y(\alpha)$的点称为曲线 C 的起点,对应于 $z(\beta)=x(\beta)+\mathrm{i}y(\beta)$的点称为曲线 C 的终点.若曲线 C 的起点与终点重合,即 $z(\alpha)=z(\beta)$,则称 C 是闭曲线.例如,$z=z(t)=\alpha(\cos t+\mathrm{i}\sin t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$是一条闭曲线,因为 $z(0)=z(2\pi)=\alpha$.

对方程(1-16)做变量代换后,得

$$z=z(\beta+\alpha-t)\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\tag{1-17}$$

在复平面上,由式(1-16)和式(1-17)确定的点集是相同的,但由式(1-17)所确定的曲线的起点 $z(\beta)$恰好是由式(1-16)所确定的曲线的终点,由式(1-17)所确定的曲线的终点 $z(\alpha)$恰好是由式(1-16)所确定的曲线起点,因此,由式(1-17)所确定的曲线与由式(1-16)所确定的曲线形状相同,但方向相反.用 C^- 表示与 C 形状相同、方向相反的曲线.

如果 $t_1\neq t_2$,有 $z(t_1)=z(t_2)$,则称 $z(t_1)=z(t_2)$是曲线 $z=z(t)$的重点.如果连续曲线 C:$z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$除起点与终点之外无重点,即除 $t_1=\alpha,t_2=\beta$之外,如果 $t_1\neq t_2$,有 $z(t_1)\neq z(t_2)$,则称曲线 C 是简单曲线.连续的简单闭曲线称为 Jordan(若尔当)曲线(图 1.5).



Jordan 曲线　　闭曲线、非 Jordan 曲线

图 1.5

正如 Jordan 所指出的,任何 Jordan 曲线 C 将平面分为两个区域,即内部区域(有界)与外部区域(无界),C 是它们的公共边界.

Jordan 曲线 C 有两个方向,当 z 沿着给定这个方向变化时,若 C 的内部出现在点 z 的前进方向的左侧,就规定这个方向是正的;否则就说是负的.简单地说,规定逆时针方向为曲线的正向,顺时针方向为曲线的负向.

如果曲线 C 的参数方程(1-16)中的 $x(t),y(t)$都在$[\alpha,\beta]$上存在连续的导函数,且对任何 $t\in[\alpha,\beta]$,都有

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$$

称 C 是一条光滑曲线.由几段光滑曲线依次相接的曲线称为按段光滑曲线.能求出长度的曲线称为可求长曲线(在此不细讨论),按段光滑曲线是一条可求长曲线.

设 D 是复平面内的一个区域,如果位于 D 内的任何 Jordan 曲线的内部区域

也都包含于 D，则称 D 是单连通区域．例如，整个复平面，复平面中去掉从一定点出发的射线而得到的区域，一条 Jordan 曲线的内部区域等都是单连通区域．

若区域 D 不是单连通区域，则称它为多连通区域．例如，$0<|z-z_0|<+\infty$，$r<|z-z_0|<R$ 等都是多连通区域．

设 $C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 都是 Jordan 曲线，$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 中的每一条都在其余的外部，而它们都包含在 C_0 的内部，则位于 C_0 内部，且在 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 外部的点所组成的区域是多连通区域，更具体地说，是$(n+1)$连通区域，$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是这个区域的边界．如图 1.6 所示是四连通区域．

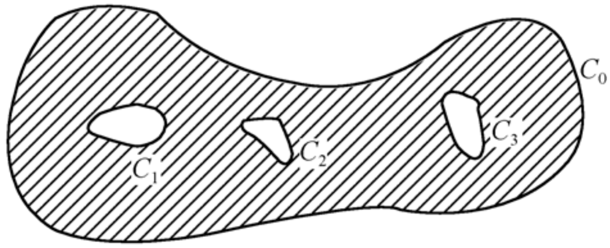


图 1.6

形如式(1-16)的曲线 C 不但给出了曲线的形状，同时确定了方向(t 增加的方向)，但有时给出的曲线可能看不出曲线的方向，例如 $|z-z_0|=r$，此时应该指出选定了什么方向．

如果未特别说明，约定一条 Jordan 曲线的正向为这条曲线的方向．例如：$|z-z_0|=r$ 是指以 z_0 为中心、r 为半径的圆的正向(即逆时针方向)．

1.3　连续函数

定义 1.1　设 E 是复平面上的点集，若对任何 $z\in E$，都存在唯一确定的复数 w 和 z 对应，称在 E 上确定了一个单值函数，用 $w=f(z)$，$w=\varphi(z)$等符号表示该函数．E 称为该函数的定义域．

在上述对应中，当 $z\in E$ 所对应的 w 不止一个时，称在 E 上确定了一个多值函数．

例如，$w=|z|$是以复平面 C 为定义域的单值函数，而

$$w=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

是定义在 $C-\{0\}$上的多值函数．

以后不特别声明时，所指的复变函数都是单值函数．

定义 1.2　设复变函数 $w=f(z)$在 z_0 的某个去心邻域内有定义，A 是复常数．若对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的 z，都有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

成立.则称当 z 趋于 z_0 时,$f(z)$以 A 为极限,并记做$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $f(z)\to A(z\to z_0)$.

定义 1.3 设 $f(z)$在 z_0 的邻域内有定义,且$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$,则称 $f(z)$在 z_0 处连续.

若 $f(z)$在区域 D 内的每一点都连续,则称 $f(z)$在区域 D 上连续.

以后还经常提到复变函数 $f(z)$在连续曲线 C 上的连续性和闭区域 $\overline{D}$ 上的连续性.这时只要把定义 1.2 和定义 1.3 中的变化范围限制在 C 或者 $\overline{D}$ 上即可.此处不再重复叙述.

应该注意:$z=x+\mathrm{i}y$ 和 w 都是复数,若把 w 记为 $u+\mathrm{i}v$ 时,u 与 v 也是 z 的函数,因此也是 x,y 的函数.于是,可以写成

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

其中 $u(x,y)$,$v(x,y)$都是关于实变量 x、y 的二元函数.

定理 1.1 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,则 $f(z)$在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充分必要条件是 $u(x,y)$,$v(x,y)$都在(x_0,y_0)点连续.

证明 只需注意,由等式

$$|f(z)-f(z_0)|=\{[u(x,y)-u(x_0,y_0)]^2+[v(x,y)-v(x_0,y_0)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

可得不等式

$$|u(x,y)-u(x_0,y_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|$$

$$|v(x,y)-v(x_0,y_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|$$

$$|f(z)-f(z_0)|\leqslant|u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|$$

利用这些不等式及定义 1.2,结论易证.

这个定理说明复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的连续性等价两个二元实变量 $u(x,y)$,$v(x,y)$的连续性.

定理 1.2 设 $f(z)$,$g(z)$都在 $z=z_0$ 点连续,则 $f(z)\pm g(z)$,$f(z)g(z)$都在 $z=z_0$ 点连续,而当 $g(z_0)\neq 0$ 时,$\dfrac{f(z)}{g(z)}$也在 $z=z_0$ 点连续.

定理 1.3 设 $\varphi(z)$在 z_0 处连续,$\varphi(z_0)=w_0$,而 $f(w)$在 $w=w_0$ 点连续,则 $f[g(z)]$在 $z=z_0$ 点连续.

用定理 1.1 或仿实函数类似的方法可以证明上述两个定理.由此可知多项式

$$P(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$$

在复平面内处处连续.而有理分式

$$R(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n+1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}$$

在复平面内除分母为零的点之外,处处连续.其中,a_i,b_i,c_i,$\mathrm{i}=0,1,2,\cdots,n$ 都是复常数.

以后还要用到以下的有界性定理.

定理 1.4　设 $f(z)$在有限长的连续曲线 C上连续,则 $f(z)$在 C上有界.即存在 $M>0$,当 $z\in C$时,有$|f(z)|\leqslant M$.

例 1.7　设复变函数 $f(z)$在点 z_0 连续,且不为 0,则存在 z_0 的某个邻域,使 $f(z)$在此邻域内恒不为 0.

证明　由于 $f(z)$在点 z_0 连续,根据定理 1.1,$u(x,y)$,$v(x,y)$在(x_0,y_0)点连续,因而二元实函数$|f(z)|=\sqrt{u(x,y)^2+v(x,y)^2}$在$(x_0,y_0)$点连续.由条件 $f(z_0)\neq 0$得$|f(z_0)|\neq 0$.再由二元函数的连续性,必存在(x_0,y_0)点的某个邻域,在此邻域内,$|f(z)|>0$,即 $f(z)$在此邻域内恒不为 0.

1.4　解析函数

1.4.1　复变函数的导数

设 $w=f(z)$是定义在区域 D上的复变函数.类似于高等数学的方法,引入复变函数导数的概念.

定义 1.4　设 z_0 是区域 D内的定点.若极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{1-18}$$

存在,则称 $f(z)$在 $z=z_0$ 点可导,并把这个极限值称为 $f(z)$在 $z=z_0$ 点的导数,记作 $f'(z_0)$.式(1-18)可以写为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{1-19}$$

即当 $f(z)$在 $z=z_0$ 点可导时

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

若 $f(z)$在区域 D内每一点都可导,则称 $f(z)$在区域 D内可导.

此时,对 D内任一点 z,有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

和实函数的情况一样,也用$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$,$\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$等表示 $f(z)$在 z点的导数.

例 1.8　设 $f(z)=z^2$,则 $f(z)$在复平面内处处可导,且 $f'(z)=2z$.

解　因为

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(z+\Delta z)^2-z^2=2z\Delta z+(\Delta z)^2$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

所以,对复平面上的任何 z,$f(z)=z^2$ 可导,且 $f'(z)=2z$.

例 1.9 证明 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在复面内处处连续,但处处不可导.

证明 对复平面内任意点 z_0,有

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=(x_0+\Delta x)+2(y_0+\Delta y)\mathrm{i}-x_0-2y_0\mathrm{i}=\Delta x+2\Delta y\mathrm{i}$$

故$\lim\limits_{\Delta z\to 0}[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]=0$,这说明 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 在复平面内处处连续.但

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\Delta x+2\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}$$

当 $\Delta y=0$,$\Delta x\neq 0$ 时,有

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\equiv 1$$

当 $\Delta x=0$,$\Delta y\neq 0$ 时,有

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\equiv 2$$

于是

$$\lim_{\substack{\Delta y=0\\ \Delta x\to 0}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=1$$

$$\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=2$$

就是说 $z_0+\Delta z$ 沿平行于 x 轴的方向趋于 z 及平行于 y 轴的方向趋于 z_0 时,商的极限不同,这样 $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\dfrac{\Delta x+2\Delta y\mathrm{i}}{\Delta x+\Delta y\mathrm{i}}$,当 $\Delta z\to 0$ 时极限不存在,所以 $f(z)$在复平面内处处不可导.

复变函数导数的定义式(1-18)和高等数学中讲的一元函数 $f(x)$的导数定义在形式上完全一样,只不过把变量 x 换成 z 而已,由此可得出以下性质.

设 $f(z)$,$g(z)$,$\varphi(z)$都可导,则

(1) $(C)'=0$ (C是常数);

(2) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$;

(3) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$;

(4) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$, $g(z)\neq 0$;

(5) $\{f[\varphi(z)]\}'=f'[\varphi(z)]\varphi'(z)$;

(6) $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n是自然数);

(7) $f'(z)=\dfrac{1}{\varphi'(w)}$,其中 $z=\varphi(w)$是 $w=f(z)$的反函数,且 $\varphi'(w)\neq 0$.

1.4.2　解析函数

在复变函数论中起重要作用的是在一个区域上的可微函数.它具有很多在实变量的情况下所不具有的性质,这类函数称为解析函数.

定义 1.5　设 $f(z)$ 在区域 D 有定义.

(1) 设 $z_0\in D$,若存在 z_0 的一个邻域,使得 $f(z)$ 在此邻域内处处可导,则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析,也称 z_0 是 $f(z)$ 的解析点;

(2) 若 $f(z)$ 在区域 D 上每一点都解析,则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析,或称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数;

(3) 设 G 是一个区域,若闭区域 $\overline{D}\subset G$,且 $f(z)$ 在 G 内解析,则称 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析.

根据定义,$f(z)$ 在区域 D 内解析和在区域 D 内可导是等价的;但在 z_0 处解析和在 z_0 处可导意义不同,前者指的是在 z_0 的某一邻域内可导,但后者只要求在 z_0 处可导;在 z_0 处解析和在 z_0 的某一个邻域内解析是一个意思;而闭区域上 $\overline{D}$ 解析,指的是包含它的某一个区域内解析,也就是说,属于 $\overline{D}$ 的每一点都是 $f(z)$ 的解析点.

若 $f(z)$ 在 z_0 处不解析,则称 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.若 z_0 是 $f(z)$ 的奇点,但在 z_0 的某邻域内除 z_0 之外,再没有其他的奇点,则称 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点.第 4 章将详细讨论孤立奇点.

例 1.8 中的 z^2 是全平面内的解析函数,但例 1.9 中的 $f(z)=x+2y\mathrm{i}$ 是处处不解析的连续函数.

例 1.10　$f(z)=z|z|^2$ 在 $z=0$ 处可导,但处处不解析.

解　根据导数的定义,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}|z|^2=0$$

因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$,当 $z_0\neq 0$ 时,由 $|z|^2=z\overline{z}$,$|z_0|^2=z_0\overline{z_0}$ 得

$$f(z)-f(z_0)=z^2\overline{z}-z_0^2\overline{z_0}=(z^2\overline{z}-z_0^2\overline{z})+(z_0^2\overline{z}-z_0^2\overline{z_0})$$

故

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=(z+z_0)\overline{z}+z_0^2\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$$

注意

$$\lim_{z\to z_0}(z+z_0)\overline{z}=2z_0\overline{z_0}=2|z_0|^2$$

但当 z 分别从平行于 x, y 轴方向趋于 z_0 时,$\dfrac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ 分别以 1, -1 为极限,因此

$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$不存在.而 $z_0^2\neq 0$,于是当 $z_0\neq 0$ 时,$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$不存在,所以 $f(z)$ 在 $z\neq 0$时不可导.这样在复平面内 $f(z)$处处不解析.

例 1.11 除 $z=0$ 点外,$f(z)=\dfrac{1}{z}$在复平面内处处解析.

解 $f(z)$在 $z=0$ 处不连续,故在 $z=0$ 处显然不可导,而 $z\neq 0$ 时,根据性质(4)与(6),$f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$,即 $z\neq 0$ 时,$f'(z)$处处存在.对任何 $z\neq 0$,都存在它的不含 $z=0$点的邻域,在此邻域内,$f'(z)$存在,故 $z\neq 0$ 的点都是解析点.显然,$z=0$是唯一的奇点,因此,也是孤立奇点.

根据性质(1)～(6),$f(z)$,$g(z)$在区域 D 内解析,则 $f(z)\pm g(z)$,$f(z)g(z)$也在 D 内解析,$g(z_0)\neq 0$ 时,z_0 是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的解析点.特别地,多项式 $P(z)$是全平面内的解析函数,而有理分式 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在复平面内除分母为零的点之外,处处解析,分母为零的点是 $R(z)$的孤立奇点.

1.5 函数可导的充要条件

用定义判断复变函数的可导性很不方便,如例 1.10 的函数虽然不是很复杂,但根据定义判断已经不容易,如果函数再复杂一些,就更不方便了.下面给出简便而有效的判别方法.

首先给出复变函数可微的概念.

定义 1.6 设函数 $f(z)$在 z_0 的某邻域内有定义,若存在复常数 A,使得

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+\alpha\Delta z$$

其中$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha=0$,则称 $f(z)$在 z_0 点可微.

复变函数的可微与高等数学中学习过的一元实函数的可微在形式上看是相同的.同样,我们也有复变函数在一点可微与可导等价,这可由下面引理得到.

引理 复变函数 $f(z)$在 z_0 点可导的充分必要条件是 $f(z)$在 z_0 点可微,即存在常数 A,满足

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+\alpha\Delta z$$

此时 $A=f'(z_0)$.

证明 若 $f'(z_0)$存在,设 $A=f'(z_0)$,则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=A$$

令

$$\alpha = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - A$$

则

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha \cdot \Delta z \tag{1-20}$$

且$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha = 0$.反之,如果式(1-20)成立,则

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = A + \alpha$$

令 $\Delta z \to 0$,则 $f'(z_0) = A$ 存在.

如果记 $\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$,则式(1-20)成为

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha \cdot \Delta z \tag{1-21}$$

当 $\Delta z \to 0$ 时,$\alpha\Delta z$ 是 Δz 的高阶无穷小量,$f'(z_0)\Delta z$ 是 $\Delta f(z_0)$的线性主部.记 $f'(z_0)\Delta z$ 为 $\mathrm{d}f(z_0)$,并称它为 $f(z)$在 z_0 处的微分.而当 z 为自变量时,记 $\Delta z = \mathrm{d}z$ 则

$$\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0)\mathrm{d}z$$

对一般的可微点 z 处,有 $\mathrm{d}f(z) = f'(z)\mathrm{d}z$.

定理 1.5　复变函数 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$在点 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 处可微(即可导)的充分必要条件是二元函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$在(x_0, y_0)处都可微,并且满足 Cauchy-Riemann(柯西-黎曼)方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1-22}$$

此时 $f'(z_0) = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} + \mathrm{i}\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$.

证明　必要性.若 $f'(z_0)$存在,设 $f'(z_0) = a + \mathrm{i}b$($a$ 与 b 是实常数),则由引理

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= f'(z_0)\Delta z + \alpha\Delta z \\ &= (a + \mathrm{i}b)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + (\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) \\ &= (a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y) \\ &\quad + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y) \end{aligned}$$

其中,$\alpha_1 = \mathrm{Re}\alpha$, $\alpha_2 = \mathrm{Im}\alpha$,且当 $\Delta z \to 0$ 时,$\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$.

设 $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$,有

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v$$

于是有

$$\Delta u + \mathrm{i}\Delta v = (a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y) + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y)$$

由两个复数相等的条件可得

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y$$

因此,$u(x,y)$,$v(x,y)$在(x_0,y_0)处可微,且

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b=-\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=a=\frac{\partial v}{\partial y}$$

充分性.若 $u(x,y)$,$v(x,y)$在(x_0,y_0)处可微,且满足式(1-22).令

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=b$$

则

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\rho\varepsilon_1,\qquad \Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\rho\varepsilon_2$$

其中,$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=|\Delta z|$,且当 $\rho\to 0$ 时,$\varepsilon_1\to 0$,$\varepsilon_2\to 0$.于是

$$\begin{aligned}&f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\\&=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v\\&=a\Delta x-b\Delta y+\rho\varepsilon_1+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y+\rho\varepsilon_2)\\&=a(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+b(\mathrm{i}\Delta x-\Delta y)+\rho(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2)\\&=(a+b\mathrm{i})\Delta z+\rho(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2)\end{aligned}$$

由 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=|\Delta z|$ 可得 $\rho(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_2)=o(\Delta z)(\Delta z\to 0)$.由引理可知 $f(z)$在 z_0 处可微,且 $f'(z_0)=a+b\mathrm{i}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$.

当 z_0 在区域 D 内变化时,可以得出下面的定理 1.6.

定理 1.6 复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内解析的充分必要条件是 $u(x,y)$,$v(x,y)$都在区域 D 内可微,且在 D 内满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

并且在区域 D 内

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\tag{1-23}$$

例 1.12 证明 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$是复平面 C 上的解析函数,且 $f'(z)=f(z)$.

证明 显然,$u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$,$v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$ 在复平面上可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y$$

u,v 在复平面处处满足 Cauchy-Riemann 方程(1-22).所以 $f(z)$是复平面 C 上的解析函数.而根据式(1-23),

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=f(z)$$

例 1.13　设 $f(z)=x^2+y^2+2xyi$,问 $f(z)$在何处可微?是否解析?

解　记 $u=x^2+y^2$,$v=2xy$,二元函数 u 和 v 在复平面内处处可微,但

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

只有在实轴 $y=0$ 上满足式(1-22).故 $f(z)$在实轴上可微.但在任何一点的邻域内都有不可微的点,因此,$f(z)$处处不解析.

例 1.14　设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$,其中 a,b,c,d 是常数,问它们取何值时,$f(z)$在复平面上解析.

解　显然,$u=x^2+axy+by^2$,$v=cx^2+dxy+y^2$ 在复平面可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+ay,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=ax+2by$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2cx+dy,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=dx+2y$$

当 $a=2$,$b=-1$,$c=-1$,$d=2$ 时,u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程,这时 $f(z)$在复平面解析.

Cauchy-Riemann 方程(1-22)在解析函数论及其在力学、物理学等的应用中具有根本性的意义,特别是在流体力学和静电场理论中,起到重要作用.

1.6　初等解析函数

本节将具体讨论几个初等函数及其特性.这些函数是高等数学中基本初等函数在复数域中的自然推广.

1.6.1　指数函数

由例 1.12 可见,函数

$$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$$

在 Z 平面上解析,且 $f'(z)=f(z)$.当 z 为实数时,即当 $y=0$ 时,$f(z)=e^x$ 与通常实指数函数一致,因此给出下面定义.

定义 1.7　假设 $z=x+iy$,则由 $e^x(\cos y+i\sin y)$定义了复指数函数,记

$$\exp(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$$

或简记

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{1-24}$$

显然

$$\mathrm{Re}(e^z)=e^x\cos y,\qquad \mathrm{Im}(e^z)=e^x\sin y$$

$$|e^z|=e^x,\qquad \mathrm{Arg}(e^z)=y+2k\pi\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

如果对于函数 $f(z)(z\in C)$,存在着复数 $T\in C$,使得 $f(z+T)=f(z)$对于所

有 $z\in C$ 成立,则称 $f(z)$为周期函数,称 T 为 $f(z)$的周期,显然 nT(n 为整数,且 $n\neq 0$)也是 $f(z)$的周期.

定理 1.7 e^z 为指数函数,则 e^z 在全平面解析,$(e^z)'=e^z$,且

(1) $e^{z+w}=e^z e^w$ 对所有 $z,w\in C$ 成立,所以$(e^z)^n=e^{nz}$;

(2) $e^z\neq 0$,如果 $z=x$ 为实数,当 $x>0$,$e^x>1$,当 $x<0$,$e^x<1$;

(3) e^z 是周期函数,其周期 $T=2n\pi i$(n 为非零整数);

(4) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$,$e^{\pi i}=-1$,$e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i$,$e^{2\pi i}=1$;

(5) $e^z=1$ 的充分必要条件是 $z=2n\pi i$(n 为整数).

证明 只证明第一条,其余的请读者自证.

令 $z=x+iy$ 和 $w=s+it$,于是由指数函数定义

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{(x+iy)+(s+it)} = e^{(x+s)+i(y+t)} \\
&= e^{x+s}[\cos(y+t)+i\sin(y+t)] \\
&= e^x e^s[(\cos y\cos t-\sin y\sin t)+i(\sin y\cos t+\cos y\sin t)] \\
&= [e^x(\cos y+i\sin y)]\cdot[e^s(\cos t+i\sin t)] \\
&= e^z\cdot e^w
\end{aligned}$$

由此可知

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$$

由式(1-24),有

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

$$|e^{iy}|=\sqrt{\cos^2 y+\sin^2 y}=1$$

例 1.15 求 $\exp(e^z)$的实部与虚部.

解 令 $z=x+iy$,因为

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

所以

$$\exp(e^z)=e^{e^x\cos y}[\cos(e^x\sin y)+i\sin(e^x\sin y)]$$

从而有

$$\mathrm{Re}[\exp(e^z)]=e^{e^x\cos y}\cdot\cos(e^x\sin y)$$

$$\mathrm{Im}[\exp(e^z)]=e^{e^x\cos y}\cdot\sin(e^x\sin y)$$

1.6.2 对数函数

定义 1.8 指数函数的反函数称为对数函数,即把满足方程

$$e^w=z\qquad(z\neq 0)$$

的函数 $w=f(z)$称为 z 的对数函数,记作

$$w=\mathrm{Ln}\,z$$

令 $w=u+\mathrm{i}v$, $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则由 $\mathrm{e}^{w}=z(z\neq0)$可得 $\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,从而由复数相等的定义知 $\mathrm{e}^{u}=r$, $v=\theta+2k\pi$,即

$$u=\ln r,\qquad v=\theta+2k\pi\qquad(k\text{ 为整数})$$

或

$$u=\ln|z|,\qquad v=\operatorname{Arg}z$$

所以

$$w=\operatorname{Ln}z=\ln|z|+\mathrm{i}\operatorname{Arg}z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\qquad(k=0,\pm1,\cdots)$$

由于 $\operatorname{Arg}z$ 是多值的,所以 $\operatorname{Ln}z$ 是多值函数,若记

$$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z\tag{1-25}$$

则对数函数可写为

$$\operatorname{Ln}z=\ln z+2\mathrm{i}k\pi\qquad(k\text{ 为整数})$$

对应某个确定的 k,称为对数函数的第 k 个分支,对应于 $k=0$ 的那个分支,则称为对数函数主支(式(1-25)表示的是对数主支),$\ln z$ 称为对数函数的主值.

对数函数各分支之间,其虚部仅差 2π 的倍数,因此,当给定特殊分支(即给定 k 的值)时,$\operatorname{Arg}z$ 的值也就被确定.

例如,如果给定分支的虚部落在区间$(-\pi,\pi)$中,那么 $\operatorname{Ln}(1+\mathrm{i})=\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$,即取的是 $k=0$ 的那个对数分支.

如果给定分支的虚部落在区间$(\pi,3\pi)$中,那么 $\operatorname{Ln}(1+\mathrm{i})=\ln\sqrt{2}+\frac{9\pi}{4}\mathrm{i}$,即取的是 $k=1$ 的那个对数分支.这可在

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(1+\mathrm{i})&=\ln|1+\mathrm{i}|+\mathrm{i}\operatorname{Arg}(1+\mathrm{i})\\&=\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\arg(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}2k\pi\\&=\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{aligned}$$

中取 $k=1$ 即得.

利用复数的乘积与商的辐角公式易证,复变函数的对数函数保持了实函数对数函数的乘积与商的相应公式

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln}z_1-\operatorname{Ln}z_2\qquad(z_2\neq0)$$

在实函数对数中,负数不存在对数;但在复变数对数中,负数的对数是有意义的.例如

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-1)&=\ln|-1|+\mathrm{i}\arg(-1)+\mathrm{i}2k\pi\\&=(2k+1)\pi\mathrm{i}\qquad(k=0,\pm1,\cdots)\end{aligned}$$

下面讨论对数函数的解析性.

对于对数主支 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$,其实部 $\ln|z|$ 在除原点外的复平面上处处连续;但其虚部 $\arg z\in(-\pi,\pi]$,它在原点与负实轴上都不连续,因为对于负实轴上的点 $z=x(x<0)$,有

$$\lim_{y\to 0^-}\arg z=-\pi,\qquad \lim_{y\to 0^+}\arg z=\pi$$

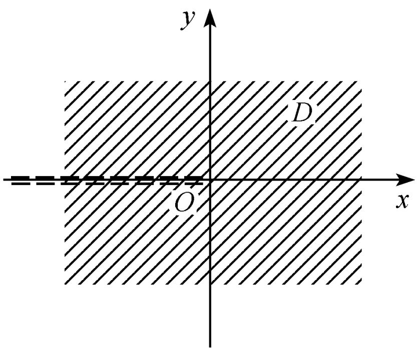


图 1.7

所以,在除去原点与负实轴的复平面 $C\backslash\{x+\mathrm{i}y\mid y=0,x\leqslant 0\}$上 $\ln z$ 处处连续.

定理 1.8　对数主支 $\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$ 在区域 $D=C\backslash\{x+\mathrm{i}y\mid y=0,x\leqslant 0\}$上解析(图 1.7),且$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z=\dfrac{1}{z}$.

证明　记 $f(z)=\ln z$, $w(h)=f(z+h)$,则 $\lim\limits_{h\to 0}w(h)=f(z)$,由 $\mathrm{e}^{f(z)}=z$,对任意的 $h\neq 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{\mathrm{e}^{f(z+h)}-\mathrm{e}^{f(z)}}$$

$$=\lim_{w(h)\to f(z)}\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{w(h)}-\mathrm{e}^{f(z)}}{w(h)-f(z)}}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^{f(z)}}=\frac{1}{z}$$

对于其他各给定的对数分支,因为 $\mathrm{Ln}z=\ln z+2\mathrm{i}k\pi$($k$ 确定),所以也有

$$(\mathrm{Ln}z)'=(\ln z+2\mathrm{i}k\pi)'=\frac{1}{z}$$

因此,对于确定的 k,称 $\mathrm{Ln}z$ 为一个单值解析分支.

例 1.16　求 $\ln[(-1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})]$的值.

解　因为

$$\ln(-1-\mathrm{i})=\ln\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}$$

$$\ln(1-\mathrm{i})=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$$

所以

$$\mathrm{Ln}[(-1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})]=\left(\ln\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}\right)+\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)+2k\pi\mathrm{i}$$

$$=2\ln\sqrt{2}-\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}$$

$$=\ln 2+(2k-1)\pi\mathrm{i}$$

于是

$$\ln[(-1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})]=\ln 2+\pi\mathrm{i}$$

事实上,以上结果还可以由

$$\ln[(-1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})]=\ln(-2)=\ln 2+\pi\mathrm{i}$$

获得.

1.6.3　幂函数

定义 1.9　设 z 为不等于零的复变数,μ 为任意一个复数,定义幂函数 z^{μ} 为 $\mathrm{e}^{\mu \mathrm{Ln} z}$,即

$$z^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu \mathrm{Ln} z}$$

当 z 为正实变数,μ 为实数时,它与高等数学中乘幂的定义一致,而 z 为复变数,μ 为复数时

$$\begin{aligned} z^{\mu} &= \mathrm{e}^{\mu \mathrm{Ln} z}=\mathrm{e}^{(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+\mathrm{i}2k\pi)}=\mathrm{e}^{\mu(\ln z+\mathrm{i}2k\pi)} \\ &= \mathrm{e}^{\mu\ln z}\cdot\mathrm{e}^{2k\pi\mu\mathrm{i}}\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\end{aligned}\tag{1-26}$$

由于 $\mathrm{Ln} z$ 的多值性,所以 z^{μ} 也是多值的,$\mathrm{e}^{\mu \mathrm{Ln} z}$称为 z^{μ} 的主值.

从式(1-26)可见:

(1) 当 μ 是整数时,$z^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu \mathrm{Ln} z}$是单值函数;

(2) 当 μ 为有理数$\dfrac{p}{q}$时$\left(\dfrac{p}{q}\text{为既约分数}\right)$,$z^{\mu}$ 是有限多值的,且

$$z^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu \mathrm{Ln} z}\qquad(k=0,1,2,\cdots,q-1)$$

(3) 当 μ 为无理数与虚部不为零的复数时,z^{μ} 是无穷多值的.

上述定义实质上包含了一个复数的 n 次幂函数与 n 次方根函数的定义.

(1) 因为当 $\mu=n$($n\geqslant1$ 自然数)时

$$\begin{aligned} z^{n} &= \mathrm{e}^{n\mathrm{Ln} z}=\mathrm{e}^{\mathrm{Ln} z+\mathrm{Ln} z+\cdots+\mathrm{Ln} z} && (\text{指数为 } n \text{ 项之和}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{Ln} z}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{Ln} z}\cdot\cdots\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{Ln} z} && (n\text{个因子 } \mathrm{e}^{\mathrm{Ln} z}\text{ 之积}) \\ &= z\cdot z\cdot\cdots\cdot z && (n\text{ 个 } z \text{ 之积})\end{aligned}$$

(2) 当 $\mu=\dfrac{1}{n}$时,有

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln|z|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}\mathrm{i}} \\ &= \sqrt[n]{|z|}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\arg z+2k\pi\mathrm{i}}{n}}=\sqrt[n]{z}\qquad(k=0,1,2,\cdots,n-1)\end{aligned}$$

当 z 给定时,它与 1.1.4 小节中关于一个复数 z 的 n 次方根的定义完全一致.因为 $\mathrm{Ln} z$ 在区域 $D=C\setminus\{x+\mathrm{i}y\mid y=0,x\leqslant0\}$上解析,所以函数在该区域上亦为解析.且由复合函数求导公式可得

$$(z^{\mu})'=(\mathrm{e}^{u})'=u\cdot\frac{1}{z}\cdot\mathrm{e}^{u\mathrm{Ln} z}=uz^{u-1}$$

关于函数 $\mathrm{Ln} z$ 的多值情况的单值化处理,本书不做详细讨论,一般都从它的函数主支出发讨论各类问题.