

21世纪高等院校教材
国家工科基地规划教材——力学系列

高等动力学

张劲夫 秦卫阳 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

高等动力学是理论力学课程内容的深化和扩展。本书分别介绍了分析力学、刚体的定点运动和一般运动动力学、运动稳定性、多刚体系统动力学、动力系统的数值仿真等内容。这些内容既相互联系又相对独立,教师可根据不同教学要求选择相应的教学内容。

本书可作为工程力学专业、理论与应用力学专业的本科生教材,也可作为机械、土建、航空、航天类专业的研究生教材。本书亦可供高等院校教师和其他有关的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等动力学/张劲夫,秦卫阳编著. —北京:科学出版社,2004.9
(21世纪高等院校教材·国家工科基地规划教材——力学系列)
ISBN 7-03-014163-6

I. 高… II. ①张…②秦… III. 动力学-高等学校-教材 IV. O313
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 082658 号

责任编辑:段博原 贾瑞娜 / 责任校对:张 琪
责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 9 月 第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 9 月 第一次印刷 印张:11

印数:1—2 500 字数:213 000

定价:18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

前 言

科学技术的迅速发展使人类能够设计出越来越多的复杂机械系统,为了使这些系统能够正常地工作,人们希望它们能够按照某种预定的规律运动(或处于一定的静止形态)。这就要求在研制这些系统时必须对它们进行相关的动力学分析、计算和优化。显然要完成这一工作,研制者必须具备广博的动力学理论知识,因此,学习动力学理论知识具有重要的现实意义。动力学中的一些概念、理论和方法已在理论力学课程中有所涉及,但是鉴于学时所限,目前针对各专业所开设的理论力学课程也只能讲授动力学中的一些最基本、最简单的内容。高等动力学作为理论力学课程内容的深化和扩展,主要包括分析力学、刚体的定点运动和一般运动动力学、运动稳定性、多刚体系统动力学、动力系统的数值仿真等内容。

本书作为高等动力学教材,其各章内容安排如下:第1章介绍分析力学的基本概念,动力学普遍方程,第一、二类拉格朗日方程,Routh方程和Kane方程;第2章介绍刚体的定点运动和一般运动的运动学,作为数学补充知识在第2章开头还介绍了矢量运算的矩阵形式;第3章在介绍刚体的惯性矩阵和惯性主轴等概念的基础上,重点讲述刚体的定点运动微分方程和一般运动微分方程;第4章介绍运动稳定性的基本概念和研究各种系统(定常齐线性系统、具有周期系数的齐线性系统、定常非线性系统、具有周期的非定常非线性系统)运动稳定性的基本理论和方法;第5章介绍多刚体系统动力学的基本概念和建立多刚体系统动力学方程的几种常用方法(Schiehlen法、Kane法、Roberson-Wittenburg法);考虑到一般离散系统的动力学方程为非线性常微分方程,这种方程的解析解通常无法得到,因此,寻求数值方法求解其动力学方程显得尤为重要,为此在本书的第6章专门介绍用于动力学系统数值仿真的一些常用算法。

本书的主要内容取自编著者在西北工业大学讲授高等动力学课程的教案,另外在撰写过程中,还参考了国内外同类教材的先进经验。参加本书编写工作的有张劲夫(第1~5章)和秦卫阳(第6章)。

限于编著者的水平,本书中错误或不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

张劲夫

2004年3月于西安

目 录

前言

第 1 章 分析力学基础	1
1.1 约束及其分类	1
1.2 虚位移、自由度、广义坐标	4
1.3 动力学普遍方程	6
1.4 第二类拉格朗日方程	8
1.5 用于碰撞分析的拉格朗日方程.....	15
1.6 Routh 方程	19
1.7 第一类拉格朗日方程.....	23
1.8 Kane 方程	25
习题	29
第 2 章 刚体运动学	32
2.1 矢量运算的矩阵形式.....	32
2.2 刚体的定点运动、欧拉角	34
2.3 方向余弦矩阵及其性质.....	36
2.4 欧拉角与方向余弦矩阵的关系.....	41
2.5 欧拉定理.....	44
2.6 刚体转动的合成.....	50
2.7 刚体的角速度和角加速度.....	54
2.8 定点运动刚体上各点的速度和加速度.....	55
2.9 角速度合成定理.....	58
2.10 连体矢量对时间的导数、绝对导数与相对导数的关系.....	60
2.11 角加速度合成定理	62
2.12 以方向余弦矩阵和欧拉角表示刚体的角速度	64
2.13 刚体的一般运动	69
习题	72
第 3 章 刚体动力学	75
3.1 惯性矩阵.....	75
3.2 刚体的惯性主轴.....	82
3.3 刚体的定点运动微分方程.....	83

3.4 刚体的一般运动微分方程	89
习题	93
第4章 运动稳定性基础	96
4.1 运动稳定性的基本概念	96
4.2 系统的分类	102
4.3 线性系统稳定性的性质	103
4.4 定常齐线性系统的稳定性	104
4.5 具有周期系数的齐线性系统的稳定性	112
4.6 定常非线性系统的稳定性	118
4.7 李雅普诺夫第一近似理论	128
4.8 具有周期的非定常非线性系统的稳定性	130
习题	132
第5章 多刚体系统动力学基础	135
5.1 多刚体系统的分类	135
5.2 Schiehlen 法	136
5.3 Kane 法	142
5.4 Roberson-Wittenburg 法	148
习题	158
第6章 动力系统的数值仿真	159
6.1 欧拉法	160
6.2 龙格-库塔法	161
6.3 纽马克 β 法	164
6.4 刚性微分方程与(吉尔)法	166
习题	167
参考文献	169

第 1 章 分析力学基础

研究动力学问题的方法大体上可分为两类：一是以牛顿(Newton)定律为基础的矢量力学方法；二是以变分原理为基础的分析力学方法。前一种方法已在理论力学教材中介绍过，本章将重点介绍后一种方法。

概括地讲，分析力学方法是以功和能这样的标量为基本概念，通过引入广义坐标描述系统的位形，运用数学分析的手段来建立系统的运动微分方程。

本章将介绍分析力学的基础部分，重点讲述拉格朗日(Lagrange)方程、Routh 方程、Kane 方程及其应用。

1.1 约束及其分类

设一系统由 n 个质点组成，这 n 个质点所占据的空间位置的集合称为该系统的位形。显然系统的位形描述了系统内各质点空间位置的几何分布情况。如果一个系统是运动着的，那么这个系统的位形将随时间而发生变化，反之亦然。系统的位形和系统内各质点的速度分布总称为系统的状态。因此，一个系统的状态描述了组成这个系统的各个质点的位置及其速度的分布情况。根据系统的状态是否受制约，可以将系统分为两类——自由系统和非自由系统。自由系统是指系统的状态不受任何预先规定的条件所制约而能任意变化的系统，如飞行器、飞鸟和沙尘暴等。非自由系统是指系统的状态受到预先规定的一些条件所制约而不能任意变化的系统，如四连杆机构、机械手和沿轨道运行的列车等。工程技术中所遇到的绝大多数受控系统都属于非自由系统，因此研究非自由系统的动力学问题具有重要的理论及实际意义。

预先给定的制约非自由系统状态(位形或速度)的条件称为约束。约束的制约条件可用数学方程——约束方程来表示

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1-1)$$

方程中的 x_n, y_n, z_n 为系统中第 n 个质点的坐标； $\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ 分别为 x_n, y_n, z_n 对时间的导数(其物理意义是第 n 个质点的速度在轴 x, y, z 上的投影)， t 表示时间。

约束可按下面的几种情况分类。

1.1.1 定常约束和非定常约束

根据约束方程中是否显含时间,可将约束分为定常约束和非定常约束。定常约束是指约束方程中不显含时间的约束,这类约束的方程形如

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1-2)$$

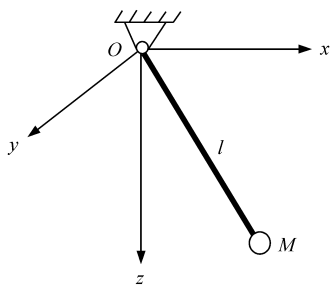


图 1-1

非定常约束是指约束方程中显含时间的约束,这类约束的方程形如式(1-1)。

在图 1-1 中,小球 M 与长度为 l 的刚性杆固连,刚性杆的另一端铰接(球铰接)于支座 O 。若支座 O 是固定的,则小球 M 的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \quad (1-3)$$

由于方程(1-3)中不显含时间 t ,所以小球所受的约束是定常约束;若支座 O 按某种规律运动,则小球 M 的约束方程为

$$[x - x_0(t)]^2 + [y - y_0(t)]^2 + [z - z_0(t)]^2 - l^2 = 0 \quad (1-4)$$

其中, $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ 为球铰中心 O 的坐标。因方程(1-4)中显含时间 t ,所以小球所受的约束是非定常约束。

只受定常约束的系统称为定常系统,否则称为非定常系统。

1.1.2 完整约束和非完整约束

根据约束制约的是系统的位形还是速度,我们可以将约束分为完整约束和非完整约束。完整约束是指只限制系统位形的约束,其约束方程可表示为

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1-5)$$

如果约束表现为对系统速度的限制,这样的约束称为非完整约束。非完整约束的方程形如式(1-1)。和完整约束相比,非完整约束方程的特点表现为微分形式,但这并不是说凡是以微分形式出现的约束方程就代表非完整约束。如果约束方程是以微分形式出现的,但它又可积分成有限的形式(此时约束实际上只限制系统的位形),在这种情况下,约束方程所代表的约束仍然是完整约束;如果约束方程是以微分形式出现的,且它不能积分成有限的形式,此时约束表现为对系统速度的限制,这种情况下,约束方程所代表的约束就属于非完整约束。

在图 1-2 中的圆盘在水平地面上沿直线纯滚动时,其位形可用盘心 C 的坐标 x_C 、 y_C 及圆盘的转角 φ 来描述,圆盘所受的约束可表示为

$$y_c = r \quad (1-6)$$

$$\dot{x}_c - r\dot{\varphi} = 0 \quad (1-7)$$

约束方程(1-6)代表盘心到地面的距离保持不变(即圆盘边缘始终同地面相接触);约束方程(1-7)代表圆盘在滚动中不发生打滑现象(即圆盘上同地面相接触的点为圆盘的速度瞬心),从形式上来看,方程(1-7)表现为微分形式,但此方程可积分成以下的有限形式,即

$$x_c - r\varphi = 0 \quad (1-8)$$

因此,方程(1-7)所表示的约束实则为完整约束。

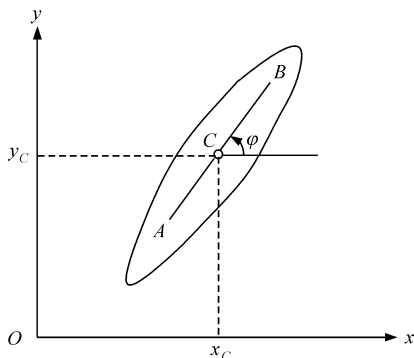


图 1-3

在图 1-3 中的雪橇在水平面上滑动,其位形可用雪橇中心 C 的坐标 x_c 、 y_c 及雪橇轴线 AB 的转角 φ 来描述。雪橇在滑动中其中心 C 的速度方向始终沿轴线 AB ,这种约束可表示为

$$\dot{x}_c \tan \varphi - \dot{y}_c = 0 \quad (1-9)$$

约束方程(1-9)为微分方程,且不能积分成有限形式,所以雪橇所受的这种约束为非完整约束。

只受完整约束的系统称为完整系统,否则称为非完整系统。以上二例中的圆盘和雪橇分别属于完整系统和非完整系统。

1.1.3 单面约束和双面约束

由不等式表示的约束称为单面约束,由等式表示的约束称为双面约束。例如,图 1-4 中,设球摆的摆线为软绳(绳长为 l),则摆锤 A 被限制在以 O 为球心 l 长为半径的球面上或球面内运动。摆锤所受的这种约束可用不等式表示为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2 \quad (1-10)$$

所以摆锤所受的约束为单面约束。如果将图 1-4 中的摆线改为刚性细直杆(O 端为球铰),则摆锤 A 仅能在球面上运动,这时摆锤所受的约束可用

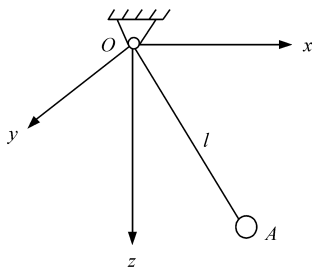


图 1-4

式(1-3)等式,因此,在这种情况下摆锤所受的约束为双面约束。

1.2 虚位移、自由度、广义坐标

我们来考查由 n 个质点所组成的系统,设该系统受有 m 个完整约束,即

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1-11)$$

和 p 个非完整约束,即

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj} \dot{x}_j + b_{kj} \dot{y}_j + c_{kj} \dot{z}_j) + e_k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (1-12)$$

将方程(1-11)的两边取微分并将方程(1-12)的两边同乘以 dt , 分别得到

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j \right] + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n (a_{kj} dx_j + b_{kj} dy_j + c_{kj} dz_j) + e_k dt &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

这样系统的约束方程变为形如式(1-13)的这种微分形式,由此可以看出系统中各质点的无限小位移 $d\mathbf{r}_j (dx_j, dy_j, dz_j), (j=1, 2, \dots, n)$ 必须满足约束方程(1-13)。我们把满足系统所有约束方程的各质点无限小位移称为该系统的可能位移。因此系统的可能位移实则约束所允许的无限小位移。

取系统在同一时刻、同一位形上的两组可能位移 $d\mathbf{r}_j (dx_j, dy_j, dz_j)$ 和 $d\mathbf{r}'_j (dx'_j, dy'_j, dz'_j), (j=1, 2, \dots, n)$, $d\mathbf{r}_j$ 和 $d\mathbf{r}'_j$ 都满足约束方程(1-13)。以 $\delta\mathbf{r}_j (\delta x_j, \delta y_j, \delta z_j)$ 表示两者之差,即

$$\delta\mathbf{r}_j = d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}'_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1-14)$$

则诸 $\delta\mathbf{r}_j$ 都满足齐次方程组,即

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \delta z_j \right] &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n (a_{kj} \delta x_j + b_{kj} \delta y_j + c_{kj} \delta z_j) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

其中, $\delta\mathbf{r}_j (\delta x_j, \delta y_j, \delta z_j)$ 称为系统的虚位移。满足方程(1-15)的任意一组矢量 $\delta\mathbf{r}_j (j=1, 2, \dots, n)$ 都是系统的一组虚位移。将可能位移所满足的方程(1-13)同虚位移所满足的方程(1-15)相比较,可以看出,它们之间的差别仅仅在于后者没有 $\frac{\partial f_i}{\partial t} dt$ 和 $e_k dt$ 项。亦即,虚位移的发生并不伴随时间 t 的无限小增量 dt 。因此可以说,虚位移是设想时间突然停滞,从而约束被“凝固”时系统可能发生的无限小位

移。因此,从数学上来说虚位移实质是一种等时变分(equal-time variation),即时间不变的情况下,对系统中各质点的矢径 \mathbf{r}_j 的变分,用 $\delta \mathbf{r}_j$ 表示,以便同可能位移 $d\mathbf{r}_j$ 相区别。

式(1-15)中共有 $m+p$ 个方程,这样 $3n$ 个坐标的变分 $\delta x_j, \delta y_j, \delta z_j (j=1, 2, \dots, n)$ 中只有

$$l = 3n - m - p \quad (1-16)$$

个是独立的,称 l 为系统的自由度,即系统的自由度为系统的独立坐标变分的个数。

除用直角坐标外,还可以采用其他不同的坐标来描述一个给定系统位形。如对一个质点的简单情况而言,除直角坐标外,还可用球坐标和柱坐标来描述它的位置。需要指出,自由度是系统本身的特征,只取决于系统的结构特征和内外约束条件,并不依赖于描述系统位形所采用的一组特定的坐标。考虑到各种各样的坐标变换,任何一组能够用来规定系统位形的参数在更一般的意义上都能作为一种描述系统位形的坐标。这样一组足以规定系统位形的参数就叫做系统的广义坐标。

对于含有 n 个质点的自由系统来说,描述其位形需要 $3n$ 个独立的广义坐标;而对于含有 n 个质点的只承受 m 个完整约束的系统(完整系统)来说,描述其位形所需的独立的广义坐标的个数就减少到 $3n-m$,这时系统的独立的广义坐标的变分个数也为 $3n-m$,即系统的自由度为 $3n-m$ 。可见,对于完整系统而言,描述其位形所需的独立广义坐标的个数总是等于系统的自由度;对于含有 n 个质点的承受 m 个完整约束和 p 个非完整约束的系统(非完整系统)来说,系统的独立的广义坐标的变分个数减少到 $3n-m-p$,即系统的自由度为 $3n-m-p$ 。但由于这 p 个非完整约束方程不能积分成坐标间的有限关系式,因而对于该系统来说,描述其位形仍需 $3n-m$ 个独立的广义坐标。可见,对于非完整系统而言,描述其位形需要的独立广义坐标的个数总是大于系统的自由度。

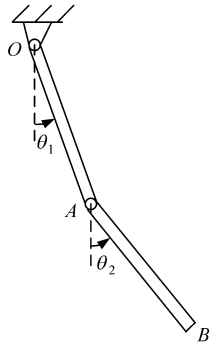


图 1-5

如图 1-5 所示的双杆机械臂属于完整系统,该系统的自由度为 2,描述其位形需 2 个独立的广义坐标,可选取图中的关节角 θ_1 和 θ_2 作为一组独立的广义坐标。

前面所述的在水平面上滑动的雪橇(图 1-3)为非完整系统,描述其位形需 3 个独立的广义坐标,可选取图中的参数 x_c, y_c 和 φ 作为一组独立的广义坐标。但雪橇受有非完整约束,其约束方程可写成变分形式,即

$$\delta x_c \tan \varphi - \delta y_c = 0 \quad (1-17)$$

这样在 3 个广义坐标的变分 $\delta x_c, \delta y_c$ 和 $\delta \varphi$ 中, 只有 2 个是独立的, 故雪橇的自由度为 2。

1.3 动力学普遍方程

1.3.1 理想约束

分析力学的主要目的之一是建立不涉及未知约束反力的非自由系统的运动方程式。这个目的只有在建立了理想约束的概念后才能达到。工程实际中许多约束具有一个共同的特性: 约束反力在系统的任何虚位移中的元功之和等于零。我们把具有这种特性的约束叫做理想约束。理想约束是实际约束在一定条件下的近似。工程中常见的理想约束包括: ①通过不可伸长的柔绳连接所构成的约束。②由光滑的刚性接触面所构成的约束, 如光滑的刚性铰链连接、光滑的刚性辊轴支座和光滑的刚性滑道等。③由滚动摩阻可不计的纯滚动接触所构成的约束。

设某系统由 n 个质点组成, 其中第 i 个质点所受的约束反力为 \mathbf{R}_i , 该质点的虚位移为 $\delta \mathbf{r}_i$, 则系统的理想约束的条件可表示为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1-18)$$

理想约束是分析力学中的一条基本假设, 这条假设贯穿于分析力学体系的全过程。

1.3.2 动力学普遍方程

我们研究受有理想约束的非自由系统, 设该系统由 n 个质点组成, 其中第 i 个质点 M_i 的质量为 m_i , 它所受到的主动力和约束力分别为 \mathbf{F}_i 和 \mathbf{R}_i , 该质点相对某一惯性参考系 $Oxyz$ 的加速度为 \mathbf{a}_i (图 1-6)。根据牛顿第二定律可知

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-19)$$

即

$$\mathbf{R}_i = -(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-20)$$

由于系统受理想约束, 故有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1-21)$$

将式(1-20)代入式(1-21), 得

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1-22)$$

方程(1-22)称为动力学普遍方程。它可表述为: 在任一时刻作用在受理想约束系

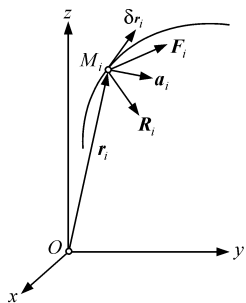


图 1-6

统上的所有主动力与惯性力在系统的任意一组虚位移上的元功之和等于零。这个结论也称为拉格朗日形式的达朗贝尔(d'Alembert)原理。

如果用 (x_i, y_i, z_i) 表示质点系中第 i 个质点 M_i 的坐标, F_{ix} 、 F_{iy} 和 F_{iz} 分表示力 F_i 在轴 x 、 y 和 z 上的投影, 那么动力学普遍方程(1-22)的形式为

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0 \quad (1-23)$$

关于动力学普遍方程, 我们做以下两点说明: ①此方程只限于约束是理想的情形, 至于约束的其他性质并未加以限制。②此方程是分析力学的基本原理, 分析力学中的其他形式的动力学方程(如拉格朗日方程和哈密顿(Hamilton)方程)都可以由此方程推出。

例 1-1 瓦特离心调速器以匀角速度 ω 绕铅直轴 z 转动(图 1-7), 飞球 A 、 B 的质量均为 m , 套筒 C 的质量为 M , 可沿轴 z 上下移动; 各杆长为 l , 质量可略去不计。求稳态运动时杆的张角 α (套筒和各铰链出的摩擦均不计)。

解 取调速器系统为研究对象。设在研究瞬时, 调速器所在平面重合于固定坐标平面 Oxz 。因在稳态运动下, 张角 α 为常量, 故点 C 保持静止, 而球 A 、 B 在水平面内作匀速圆周运动, 其加速度大小为

$$a_1 = a_2 = l\omega^2 \sin \alpha \quad (1)$$

这样球 A 、 B 的惯性力大小为

$$Q_1 = Q_2 = ml\omega^2 \sin \alpha \quad (2)$$

根据动力学普遍方程, 有

$$G_{1z} \delta z_1 + Q_{1x} \delta x_1 + G_{2z} \delta z_2 + Q_{2x} \delta x_2 + G_{3z} \delta z_3 = 0 \quad (3)$$

由图 1-7 可知

$$G_{1z} = G_1 = mg \quad (4)$$

$$G_{2z} = G_2 = mg \quad (5)$$

$$G_{3z} = G_3 = Mg \quad (6)$$

$$Q_{1x} = -Q_1 = -ml\omega^2 \sin \alpha \quad (7)$$

$$Q_{2x} = Q_2 = ml\omega^2 \sin \alpha \quad (8)$$

$$x_1 = -l \sin \alpha \quad (9)$$

$$z_1 = l \cos \alpha \quad (10)$$

$$x_2 = l \sin \alpha \quad (11)$$

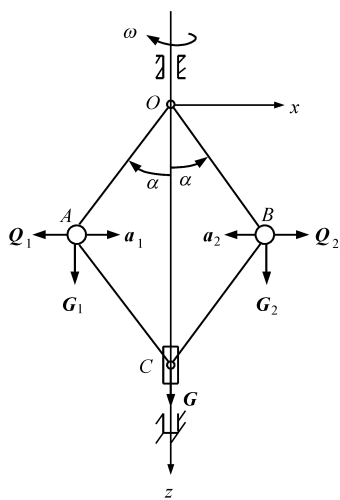


图 1-7

$$z_2 = l \cos \alpha \quad (12)$$

$$z_3 = 2l \cos \alpha \quad (13)$$

将式(9)~式(13)变分,得

$$\delta x_1 = -l \cos \alpha \delta \alpha \quad (14)$$

$$\delta z_1 = -l \sin \alpha \delta \alpha \quad (15)$$

$$\delta x_2 = l \cos \alpha \delta \alpha \quad (16)$$

$$\delta z_2 = -l \sin \alpha \delta \alpha \quad (17)$$

$$\delta z_3 = -2l \sin \alpha \delta \alpha \quad (18)$$

将式(4)~式(8)、式(14)~式(18)代入式(3),整理后得到

$$2l(m\omega^2 \cos \alpha - mg - Mg) \sin \alpha \delta \alpha = 0 \quad (19)$$

考虑到 $\delta \alpha$ 的任意性,由方程(19)可得到

$$2l(m\omega^2 \cos \alpha - mg - Mg) \sin \alpha = 0 \quad (20)$$

从而解出

$$\alpha = 0 \text{ 或 } \alpha = \arccos \frac{(m+M)g}{m\omega^2}$$

第一个解是不稳定的,因为只要稍加扰动,调速器就会张开,最后平衡在第二个解给出的位置上。第二个解建立了稳态运动时调速器的张角 α 与转速 ω 之间的关系,它是设计时选择调速器参数的依据。

1.4 第二类拉格朗日方程

系统的位形除了可以用直角坐标描述外,还可以用广义坐标来描述。所以人们很自然地想到如能给出以广义坐标表示的系统动力学方程,那将对分析系统的运动规律和研究系统的动力学特性都是非常有利的。18世纪法国著名数学、力学大师拉格朗日首次通过数学分析的方法建立了以广义坐标表示的受理想约束的完整系统的动力学方程——第二类拉格朗日方程。该方程可以通过多种不同的途径得到。本书将应用动力学普遍方程推导第二类拉格朗日方程。

设某一受理想约束的系统由 n 个质点组成, q_1, q_2, \dots, q_k 为描述该系统位形的独立广义坐标。系统中任一质点 M_i 相对惯性参考系 $Oxyz$ 的矢径 \mathbf{r}_i 可表示为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-24)$$

此函数中显含时间 t 是为了考虑约束为非定期的情况,如只有定常约束,则函数中不显含时间 t 。

在推导第二类拉格朗日方程时将用到如下两个重要关系式——拉格朗日变换式

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-25)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right], \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-26)$$

下面给出式(1-25)和式(1-26)的证明。

将式(1-24)对时间求导数,得

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{l=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-27)$$

再将上式对 \dot{q}_j 求偏导数,便可得到式(1-25)。

下面再来证明式(1-26)。

将式(1-27)对 q_j 求偏导数,得

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-28)$$

考虑到 $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ 是 q_1, q_2, \dots, q_k 和 t 的函数,因此 $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right]$ 可以写成

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] = \sum_{l=1}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-29)$$

设函数(1-24)具有连续的二阶偏导数,这样就有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_l \partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k; l = 1, 2, \dots, k) \quad (1-30)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-31)$$

考虑到式(1-30)和式(1-31),将式(1-28)和式(1-29)进行比较,便可得到式(1-26)。

下面接着来推导第二类拉格朗日方程,将式(1-24)取变分,得

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-32)$$

根据动力学普遍方程,有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1-33)$$

式(1-33)左端的第一项 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ 表示作用于系统上的所有主动力在系统虚位移中的元功之和。由式(1-32)有

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{F}_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] = \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \quad (1-34)$$

定义

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-35)$$

为对应于广义坐标 q_j 的广义力。这样式(1-34)可以写成

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j \quad (1-36)$$

式(1-33)左端的第二项 $-\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ 表示系统的惯性力系在系统虚位移中的元功之和。由式(1-32)有

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= -\sum_{i=1}^n \left[m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \left[-\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (1-37)$$

定义

$$Q'_j = -\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-38)$$

为对应于广义坐标 q_j 的广义惯性力。这样式(1-37)可以写成

$$-\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k Q'_j \delta q_j \quad (1-39)$$

将式(1-36)和式(1-39)代入方程(1-33)后,得到

$$\sum_{j=1}^k [Q_j + Q'_j] \delta q_j = 0 \quad (1-40)$$

根据求导运算规则,式(1-38)可以写成

$$Q'_j = -\sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left[\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right], \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-41)$$

考虑到拉格朗日变换式(1-25)和式(1-26)后,式(1-41)又可以写成

$$\begin{aligned}
 Q'_j &= - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left[\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\
 &= - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right] \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right] \\
 &= - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right] \right] + \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right] \\
 &= - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k)
 \end{aligned} \tag{1-42}$$

其中

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \tag{1-43}$$

为系统的动能。将式(1-42)代入方程(1-40)后,得到

$$\sum_{j=1}^k \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \tag{1-44}$$

方程(1-44)称为广义坐标形式的动力学普遍方程。需要说明的是在推导该方程的过程中只限定了所研究的系统是受理想约束的系统,并没有限定系统是完整系统还是非完整系统,因此,广义坐标形式的动力学普遍方程(1-44)的应用条件是受理想约束的系统。

如果所研究的系统还是一受理想约束的完整系统,则方程(1-44)中的 k 个广义坐标的变分 $\delta q_j (j=1, 2, \dots, k)$ 是互相独立的,这时由方程(1-44)可以得到

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \tag{1-45}$$

这就是著名的第二类拉格朗日方程,它适用于受理想约束的完整系统。对于含有非理想约束的完整系统来说,如果解除其中的所有非理想约束,并把相应的非理想约束力看成是主动力,这时仍然可应用第二类拉格朗日方程来建立系统的动力学方程。

第二类拉格朗日方程的形式对坐标变换具有不变性,即与广义坐标的具体选择无关;方程中不出现未知的理想约束反力,因此便于求解;方程的个数等于广义坐标数或自由度。这一方程在工程中具有极为广泛的应用价值。

应用第二类拉格朗日方程所建立的系统运动微分方程一般是一组关于 k 个广义坐标 $q_j (j=1, 2, \dots, k)$ 的二阶非线性常微分方程,在给定运动初始条件 $q_j(0)$ 、 $\dot{q}_j(0) (j=1, 2, \dots, k)$ 的情况下,可利用适当的数值积分法(如龙格-库塔(Runge-Kutta)方法和 Gear(吉尔)方法等)求出这组方程的数值解,这些数值解就代表了系统的运动规律。

如果所研究的受理想约束的完整系统所受的主动动力均为有势力时,则每个主动动力 F_i 在惯性参考系 $Oxyz$ 的各坐标轴上的投影可表达为

$$F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-46)$$

其中, V 表示系统的势能。将式(1-46)代入式(1-35),得到

$$Q_j = -\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right], \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-47)$$

因系统的势能 V 可看作为系统内各质点的直角坐标 $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 及时间 t 的函数,而 $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, \dots, n)$ 又可看作为系统广义坐标 $q_j (j=1, 2, \dots, k)$ 及时间 t 的函数,于是系统的势能 V 对广义坐标 q_j 的偏导数可表达为

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right], \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-48)$$

比较式(1-47)和式(1-48)后,得到

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-49)$$

将式(1-49)代入方程(1-45)后,得到

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-50)$$

考虑到系统的势能 V 与广义速度 $\dot{q}_j (j=1, 2, \dots, k)$ 无关,故有

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-51)$$

从而方程(1-50)可以改写为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-52)$$

定义一个新函数 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 为

$$L = T - V \quad (1-53)$$

并把这个函数叫做系统的拉格朗日函数。引入该函数后,方程(1-52)可以写成

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-54)$$

这就是主动动力均为有势力情况下的、受理想约束的、完整系统的第二类拉格朗日方程。

应用第二类拉格朗日方程建立受理想约束的完整系统的运动微分方程时,推荐按如下的一个程式化步骤进行推导:

- 1) 确定出系统的自由度数 k , 并恰当地选择 k 个独立的广义坐标。
- 2) 将系统的动能表示成关于广义坐标、广义速度和时间的函数。
- 3) 求广义力。广义力可按如下的方法来求: 将作用在系统上的所有主动力的虚功之和写成为

$$\sum \delta W = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j \quad (1-55)$$

的形式, 则其中 Q_j 即为对应于广义坐标 q_j 的广义力, 或者也可以按下式求广义力

$$Q_j = \frac{\left[\sum \delta W \right]_j}{\delta q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-56)$$

其中, $\left[\sum \delta W \right]_j$ 表示在 $\delta q_j \neq 0$, 而 $\delta q_l = 0 (l = 1, 2, \dots, k \text{ 且 } l \neq j)$ 的情况下, 作用在系统上的所有主动力的虚功之和。如果主动力均为有势力, 则只须写出系统的势能或拉格朗日函数。

4) 将 Q_j 、 T (或 L) 的表达式代入第二类拉格朗日方程, 再经相应的符号运算后, 即可得到系统的运动微分方程式。

下面举例说明第二类拉格朗日方程的应用。

例 1-2 图 1-8 表示质量为 m_1 和 m_2 的两个质点, 用不可伸长、不计质量的细索悬挂, 在 m_2 上作用有水平方向的已知力 $F(t)$, 建立系统的运动微分方程 (假定系统在铅直面内运动, 且细索始终保持张紧状态)。

解 这是一个二自由度的受理想约束的完整系统, 因此可应用第二类拉格朗日方程来建立该系统的运动微分方程。为此选取 θ_1 和 θ_2 作为描述系统位形的广义坐标 (图 1-8), 根据第二类拉格朗日方程, 有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (2)$$

其中, 质点 m_2 的直角坐标为

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

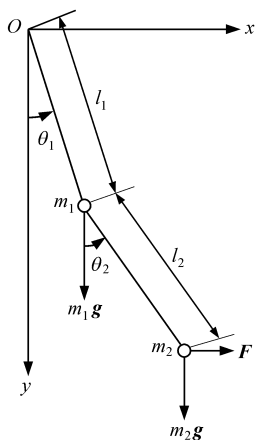


图 1-8

$$y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \quad (4)$$

将以上两式代入式(2),整理后得到

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{l}_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{l}_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (5)$$

作用在系统上的所有主动力的虚功之和为

$$\begin{aligned} \sum \delta W &= m_1 g \delta y_1 + m_2 g \delta y_2 + F \delta x_2 \\ &= m_1 g \delta (l_1 \cos \theta_1) + m_2 g \delta (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) + F \delta (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \\ &= l_1 (F \cos \theta_1 - m_1 g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_1) \delta \theta_1 + l_2 (F \cos \theta_2 - m_2 g \sin \theta_2) \delta \theta_2 \end{aligned} \quad (6)$$

由此可以得到对应于广义坐标 θ_1 和 θ_2 的广义力分别为

$$Q_1 = l_1 (F \cos \theta_1 - m_1 g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_1) \quad (7)$$

$$Q_2 = l_2 (F \cos \theta_2 - m_2 g \sin \theta_2) \quad (8)$$

将式(5)、式(7)和式(8)代入方程组(1),整理后得到

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = F \cos \theta_1 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = F \cos \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

方程(9)即为系统的运动微分方程式,它们是一组二阶非线性常微分方程,要求解析解当然是十分困难的。

例 1-3 如图 1-9 所示的系统由滑块 A 和均质细杆 AB 构成。滑块 A 的质量为 m_1 , 可沿光滑水平面自由滑动。细杆 AB 通过光滑圆柱铰链铰接于滑块 A 上, 细杆 AB 的质量为 m_2 , 长为 $2l$ 。列出此系统的运动微分方程。

解 这是一个两自由度的受理想约束的完整系统, 且作用在该系统上的主动力均为重力(即有势力), 因此可应用主动力均为有势力情况下的受理想约束的完整系统的第二类拉格朗日方程来建立该系统的运动微分方程。

选取滑块的坐标 x 和杆的转角 φ 作为描述系统位形的广义坐标, 根据方程(1-54), 有

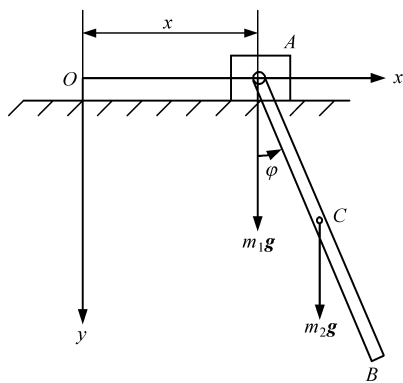


图 1-9

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= T_A + T_{AB} = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m_2 \cdot (2l)^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中,杆 AB 的质心坐标为

$$x_C = x + l \sin \varphi \quad (3)$$

$$y_C = l \cos \varphi \quad (4)$$

将式(3)、式(4)代入式(2),整理后得到

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{2}{3} m_2 l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\phi} \cos \varphi \quad (5)$$

规定轴 x 所在的水平面为零重力势能面,则系统的势能可表达为

$$V = - m_2 g l \cos \varphi \quad (6)$$

于是系统的拉格朗日函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{2}{3} m_2 l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\phi} \cos \varphi + m_2 g l \cos \varphi \quad (7)$$

将式(7)代入方程(1),整理后得到

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\phi} \cos \varphi - m_2 l \dot{\phi}^2 \sin \varphi &= 0 \\ 4 l \ddot{\phi} + 3 \ddot{x} \cos \varphi + 3 g \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

方程(8)即为系统的运动微分方程。

1.5 用于碰撞分析的拉格朗日方程

碰撞是一种常见的力学现象。当物体受到急剧的冲击时就发生碰撞。与一般的动力学问题相比,碰撞问题的基本特征是碰撞力巨大且碰撞时间极短。所以在研究碰撞问题时,可作两点简化:一是碰撞过程中忽略非碰撞力的影响;二是碰撞过程忽略系统位置的变化。在理论力学中通常应用冲量定理和冲量矩定理来研究碰撞前后系统的动量和动量矩的变化,但是这样做会在方程中出现未知的约束力的冲量。由于拉格朗日方程中不含未知的理想约束力,因此,将拉格朗日方程应用

于碰撞问题的分析时,只要对方程稍作改造,就可以避免出现未知的理想约束力的冲量。

设一受理想约束的完整系统发生碰撞,将第二类拉格朗日方程应用于该系统,并将其方程的两端在碰撞阶段 $[t_1, t_1 + \Delta\tau]$ 内积分,得到

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] dt - \int_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial q_j} dt = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} Q_j dt, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-57)$$

式(1-57)左端的第一项可表达为

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right] dt = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right|_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} = p_j \Big|_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} = \Delta p_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-58)$$

其中

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-59)$$

为对应于广义坐标 q_j 的广义动量, Δp_j 表示广义动量 p_j 在碰撞前后的变化量。

考虑到式(1-57)左端的第二项中的被积函数 $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ 为有限量,而积分区间 $\Delta\tau$ 又极短(即碰撞的时间间隔极短),故有

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial q_j} dt \approx 0, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-60)$$

考虑到式(1-57)右端的广义力 Q_j 实则为碰撞力的广义力(在研究碰撞问题时,非碰撞力不计),这样在碰撞阶段, Q_j 非常大,因此尽管积分区间 $\Delta\tau$ 极短,但是积分

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta\tau} Q_j dt = \hat{Q}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-61)$$

却为有限量。我们称 \hat{Q}_j 为碰撞阶段对应于广义坐标 q_j 的广义冲量。将式(1-58)、式(1-60)和式(1-61)代入式(1-57)后,得到

$$\Delta p_j = \hat{Q}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-62)$$

这就是碰撞阶段的拉格朗日方程。该方程表明:对于受理想约束的完整系统来说,碰撞前后广义动量的变化量等于碰撞阶段的广义冲量。可以看到,这一方程中不包含理想约束力的冲量。

下面来看如何计算碰撞阶段的广义冲量 \hat{Q}_j 。

将广义力的定义式(1-35)代入式(1-61)中,得到

$$\hat{Q}_j = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_1+\Delta\tau} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dt, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-63)$$

考虑到碰撞阶段系统的位置不变,所以在碰撞阶段 $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ 为一常量,于是式(1-63)可变为

$$\hat{Q}_j = \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_1}^{t_1+\Delta\tau} \mathbf{F}_i dt \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1-64)$$

其中

$$\mathbf{S}_i = \int_{t_1}^{t_1+\Delta\tau} \mathbf{F}_i dt, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-65)$$

为碰撞力 \mathbf{F}_i 的冲量。对比式(1-35)和式(1-64),可看出广义冲量可以按广义力的计算办法进行类比计算,即将碰撞力 \mathbf{F}_i 用相应的冲量 \mathbf{S}_i 代替即可。特别是广义冲量亦可通过如下的“虚功”表达形式得到

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \hat{Q}_j \delta q_j \quad (1-66)$$

例 1-4 如图 1-10 所示,两均质细长杆 AB 与 BC 各长 l , 质量皆为 m , 静止地悬挂在铅垂位置。现在 BC 杆中点 D 处受一碰撞,其冲量为 \mathbf{S} , 求碰撞结束时杆 AB 和杆 BC 的角速度。

解 以杆 AB 和杆 BC 所组成的系统为研究对象,该系统是一受理想约束的完整系统,有两个自由度。以点 A 为坐标原点建立如图 1-10 所示的固定坐标系 Oxy , 取杆 AB 和杆 BC 相对轴 y 的夹角 θ_1 和 θ_2 作为描述系统位形的广义坐标。应用碰撞阶段的拉格朗日方程,有

$$\Delta p_1 = \hat{Q}_1 \quad (1)$$

$$\Delta p_2 = \hat{Q}_2 \quad (2)$$

对应于 θ_1 和 θ_2 的广义动量分别为

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \quad (3)$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \quad (4)$$

在碰撞阶段系统的动能可表达为

$$T = T_{AB} + T_{BD}$$

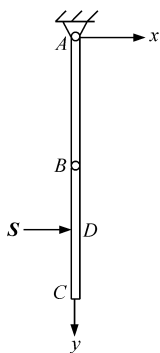


图 1-10

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \left[l \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} l \dot{\theta}_2 \right]^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m l^2 \dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{1}{6} m l^2 \{ 4 \dot{\theta}_1^2 + 3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \} \quad (5)
\end{aligned}$$

将式(5)分别代入式(3)和式(4),得到

$$p_1 = \frac{1}{6} m l^2 (8 \dot{\theta}_1 + 3 \dot{\theta}_2) \quad (6)$$

$$p_2 = \frac{1}{6} m l^2 (3 \dot{\theta}_1 + 2 \dot{\theta}_2) \quad (7)$$

考虑到在碰撞初($t = t_1$)时, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, 这样由式(6)和式(7)可知在碰撞初时, 对应于 θ_1 和 θ_2 的广义动量分别为

$$p_1 \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (8)$$

$$p_2 \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (9)$$

设在碰撞末($t = t_1 + \Delta\tau$)时, $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, 于是根据式(6)和式(7)可知在碰撞末时, 对应于 θ_1 和 θ_2 的广义动量分别为

$$p_1 \Big|_{t=t_1+\Delta\tau} = \frac{1}{6} m l^2 (8 \omega_1 + 3 \omega_2) \quad (10)$$

$$p_2 \Big|_{t=t_1+\Delta\tau} = \frac{1}{6} m l^2 (3 \omega_1 + 2 \omega_2) \quad (11)$$

这样在碰撞前后对应于 θ_1 和 θ_2 的广义动量的变化量分别为

$$\Delta p_1 = p_1 \Big|_{t=t_1+\Delta\tau} - p_1 \Big|_{t=t_1} = \frac{1}{6} m l^2 (8 \omega_1 + 3 \omega_2) \quad (12)$$

$$\Delta p_2 = p_2 \Big|_{t=t_1+\Delta\tau} - p_2 \Big|_{t=t_1} = \frac{1}{6} m l^2 (3 \omega_1 + 2 \omega_2) \quad (13)$$

碰撞阶段的广义冲量可根据式(1-66)来计算, 即有

$$S \delta r_D = S \left[l \delta \theta_1 + \frac{1}{2} l \delta \theta_2 \right] = S l \delta \theta_1 + \frac{1}{2} S l \delta \theta_2 \quad (14)$$

由此可得到碰撞阶段的广义冲量为

$$\hat{Q}_1 = S l \quad (15)$$

$$\hat{Q}_2 = \frac{1}{2} S l \quad (16)$$

将式(12)和式(15)代入方程(1), 得

$$\frac{1}{6} ml^2 (8 \omega_1 + 3 \omega_2) = Sl \quad (17)$$

将式(13)和式(16)代入方程(2),得

$$\frac{1}{6} ml^2 (3 \omega_1 + 2 \omega_2) = \frac{1}{2} Sl \quad (18)$$

联立方程(17)和(18),解得碰撞结束时杆 AB 和杆 BC 的角速度分别为

$$\omega_1 = \frac{3S}{7ml} \quad \omega_2 = \frac{6S}{7ml}$$

其中, ω_1 和 ω_2 的转向均为逆钟向。

1.6 Routh 方程

在 1.4 节中介绍了第二类拉格朗日方程,该方程适合于受理想约束的完整系统的动力学建模。本节将进一步讨论适合于受理想约束的非完整系统的动力学建模问题。

设有一受理想约束的非完整系统,其广义坐标为 q_1, q_2, \dots, q_k , 系统承受有 m 个非完整约束,即

$$\sum_{j=1}^k a_{rj}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_j + a_r(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1-67)$$

因而各广义坐标的变分由方程联系,即

$$\sum_{j=1}^k a_{rj} \delta q_j = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1-68)$$

现在来看广义坐标形式的动力学普遍方程,即

$$\sum_{j=1}^k \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \quad (1-69)$$

对于非完整系统而言,由于式(1-68)存在,使得各广义坐标的变分不再是完全独立的,因此在这种情况下,将无法从方程(1-69)得到第二类拉格朗日方程。为解决此问题,可采用不定乘子法,即将式(1-68)乘以不定乘子 λ_r ($r = 1, 2, \dots, m$),然后相加,得到

$$\sum_{r=1}^m \lambda_r \left[\sum_{j=1}^k a_{rj} \delta q_j \right] = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1-70)$$

交换求和次序,得

$$\sum_{j=1}^k \left[\sum_{r=1}^m \lambda_r a_{rj} \right] \delta q_j = 0 \quad (1-71)$$

将式(1-69)和式(1-71)相加,得

$$\sum_{j=1}^k \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{rj} \right] \delta q_j = 0 \quad (1-72)$$

注意,式(1-72)中含有全部 k 个广义坐标的变分,而其中只有 $k-m$ 个是彼此独立的。另外,该式中还含有 m 个不定乘子 λ_r ($r=1,2,\dots,m$)。我们约定这样来选取各个不定乘子,使得式(1-72)中前 m 个非独立广义坐标变分($\delta q_1, \dots, \delta q_m$)前的系数为零,即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{rj}, \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (1-73)$$

这样式(1-72)就变为

$$\sum_{j=m+1}^k \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{rj} \right] \delta q_j = 0 \quad (1-74)$$

而余下的这 $k-m$ 个广义坐标的变分 $\delta q_{m+1}, \dots, \delta q_k$ 是互相独立的,这样由式(1-74)即可得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{rj}, \quad (j=m+1,2,\dots,k) \quad (1-75)$$

将方程(1-73)和方程(1-75)写在一起,得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{rj}, \quad (j=1,2,\dots,k) \quad (1-76)$$

这 k 个方程称为 Routh 方程,它适合于受理想约束的非完整系统的动力学建模。但这 k 个方程中含有 $k+m$ 个未知函数 q_j ($j=1,2,\dots,k$) 和 λ_r ($r=1,2,\dots,m$), 因此,要求解这 $k+r$ 个未知函数,就必须将 Routh 方程(1-76)和约束方程(1-67)联立起来进行求解。

Routh 方程(1-76)中采用了广义坐标和不定乘子,我们知道是拉格朗日首先将广义坐标的概念和不定乘子法应用到力学中来,因此方程(1-76)也称为含不定乘子的拉格朗日方程。但拉格朗日本人只将广义坐标应用于完整系统,得到的是第二类拉格朗日方程。他将不定乘子法应用于非完整系统时,采用的是笛卡儿坐标,得到的是 1.7 节将要介绍的第一类拉格朗日方程。Ferrers 于 1873 年,Routh 于 1884 年将广义坐标和不定乘子结合起来应用于受理想约束的非完整系统,得到了方程(1-76),所以方程(1-76)又叫 Ferrers 方程,但习惯上称为 Routh 方程。

下面举例说明 Routh 方程的应用。

例 1-5 如图 1-11 所示,质量为 m 的雪橇对其质心轴(通过质心且垂直于水平面的轴)的转动惯量为 J_c ,雪橇质心 C 的速度始终沿轴线 AB ,雪橇在水平面 Oxy 内运动,雪橇上作用有沿 AB 方向的力 F 和水平面内的力偶 M 。设 F 和 M

均为时间 t 的已知函数,试确定雪橇的运动。

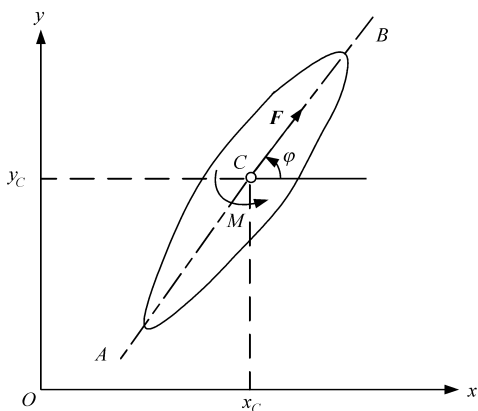


图 1-11

解 选雪橇质心 C 的直角坐标 x_c 、 y_c 和轴线 AB 相对坐标轴 x 的角 φ 作为描述雪橇位形的广义坐标。考虑到雪橇质心 C 的速度始终沿轴线 AB ,故有如下约束方程

$$\dot{x}_c \tan \varphi - \dot{y}_c = 0 \quad (1)$$

因方程(1)不能积分成有限形式,所以雪橇所受的这种约束为非完整约束。雪橇的自由度 $k=2$ 。根据 Routh 方程,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} \right] - \frac{\partial T}{\partial x_c} &= Q_1 + \lambda_1 a_{11} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} \right] - \frac{\partial T}{\partial y_c} &= Q_2 + \lambda_1 a_{12} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_3 + \lambda_1 a_{13} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由式(1)可知

$$a_{11} = \tan \varphi \quad (3)$$

$$a_{12} = -1 \quad (4)$$

$$a_{13} = 0 \quad (5)$$

雪橇的动能为

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 \quad (6)$$

给雪橇以虚位移 $(\delta x_c, \delta y_c, \delta \varphi)$, 则作用在雪橇上的所有主动力的虚功之和为

$$\sum \delta W = F_x \delta x_c + F_y \delta y_c + M \delta \varphi = F \cos \varphi \delta x_c + F \sin \varphi \delta y_c + M \delta \varphi \quad (7)$$

根据式(7)得到广义力为

$$Q_1 = F \cos \varphi \quad (8)$$

$$Q_2 = F \sin \varphi \quad (9)$$

$$Q_3 = M \quad (10)$$

将式(3)~式(6)、式(8)~式(10)一同代入方程(2),整理后得到

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_c &= F \cos \varphi + \lambda_1 \tan \varphi \\ m \ddot{y}_c &= F \sin \varphi - \lambda_1 \\ J_c \ddot{\varphi} &= M \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将方程(11)和方程(1)联立,得到

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x}_c &= F \cos \varphi + \lambda_1 \tan \varphi \\ m \ddot{y}_c &= F \sin \varphi - \lambda_1 \\ J_c \ddot{\varphi} &= M \\ \dot{x}_c \tan \varphi - \dot{y}_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

该方程组就是描述雪橇运动的数学模型。下面将此数学模型作如下的变换:

将方程组(12)中的第一个方程乘以 $\tan \varphi$, 然后减去第二个方程, 得到

$$\lambda_1 \sec^2 \varphi = m (\ddot{x}_c \tan \varphi - \ddot{y}_c) \quad (13)$$

将方程组(12)中的第四个方程对时间求导数, 得到

$$\ddot{x}_c \tan \varphi - \dot{y}_c = -\dot{x}_c \dot{\varphi} \sec^2 \varphi \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 得到

$$\lambda_1 = -m \dot{x}_c \dot{\varphi} \quad (15)$$

因 M 是 t 的已知函数, 故由方程组(12)中的第三个方程可解出

$$\varphi = \varphi(t) \quad (16)$$

将式(15)代入方程组(12)中的第一个方程, 得到关于 x_c 的二阶线性常微分方程, 即

$$\ddot{x}_c + \dot{x}_c \dot{\varphi} \tan \varphi = \frac{F}{m} \cos \varphi \quad (17)$$

令 $\dot{x}_c = u = pq$, 则 $\ddot{x}_c = \dot{u} = \dot{p}q + p\dot{q}$, 代入式(17)中, 得到

$$(\dot{p} + p\dot{\varphi} \tan \varphi)q + p\dot{q} = \frac{F}{m} \cos \varphi \quad (18)$$

取 $p = \cos \varphi$, 则 $\dot{p} + p\dot{\varphi} \tan \varphi = 0$, 代入式(18), 得到

$$\dot{q} = \frac{F}{m} \quad (19)$$

积分式(19),得到

$$q = \int \frac{F(t)}{m} dt = \psi(t) + c \quad (20)$$

若给定初始条件

$$x_c(0) = 0, y_c(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{x}_c(0) = u_0, \dot{y}_c(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \quad (21)$$

可以得到

$$\dot{x}_c = pq = [\psi(t) + u_0] \cos \varphi \quad (22)$$

$$\dot{y}_c = \dot{x}_c \tan \varphi = [\psi(t) + u_0] \sin \varphi \quad (23)$$

积分以上二式,并代入初始条件,最后得到

$$x_c = \int_0^t [\psi(t) + u_0] \cos \varphi dt \quad (24)$$

$$y_c = \int_0^t [\psi(t) + u_0] \sin \varphi dt \quad (25)$$

式(16)、式(24)和式(25)一起描述了雪橇的运动规律。

1.7 第一类拉格朗日方程

设一受理想约束的非自由系统,该系统由 n 个质点所组成,各质点在惯性参考系 $Oxyz$ 中的直角坐标为 $x_i, y_i, z_i (i=1, 2, \dots, n)$, 系统受到 m 个非完整约束, 即

$$\sum_{i=1}^n (a_{ri} \dot{x}_i + b_{ri} \dot{y}_i + c_{ri} \dot{z}_i) + e_r = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1-77)$$

和 l 个完整约束, 即

$$f_s(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, l) \quad (1-78)$$

将式(1-78)对时间求导数, 得

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_s}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_s}{\partial z_i} \dot{z}_i \right] + \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, l) \quad (1-79)$$

由方程(1-77)和方程(1-79)可知虚位移 $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ 所应满足的限制条件为

$$\sum_{i=1}^n (a_{ri} \delta x_i + b_{ri} \delta y_i + c_{ri} \delta z_i) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m) \quad (1-80)$$

和

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f_s}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_s}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_s}{\partial z_i} \delta z_i \right] = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, l) \quad (1-81)$$

将这些条件和动力学普遍方程(1-23)结合起来考虑,并引入不定乘子,作类似于Routh方程的推导(见1.6节),可以得到

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} + \sum_{r=1}^m \lambda_r a_{ri} + \sum_{s=1}^l \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy} + \sum_{r=1}^m \lambda_r b_{ri} + \sum_{s=1}^l \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial y_i} \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} + \sum_{r=1}^m \lambda_r c_{ri} + \sum_{s=1}^l \mu_s \frac{\partial f_s}{\partial z_i} \end{aligned} \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-82)$$

方程(1-82)就是著名的第一类拉格朗日方程。该方程既适合于受理想约束的完整系统,又适合于受理想约束的非完整系统。将方程(1-82)同约束方程(1-77)和(1-78)联立起来,形成一个含有 $3n$ 个未知函数 $x_i(t)$ 、 $y_i(t)$ 、 $z_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 和 $m+l$ 个乘子 λ_r 、 μ_s ($r=1, 2, \dots, m$; $s=1, 2, \dots, l$) 的方程组。结合系统运动的初始条件,求解这组方程即可得到这 $3n+m+l$ 个未知量随时间的变化规律。

将第一类拉格朗日方程同理论力学中的质点运动微分方程相比较,可以看出:第一类拉格朗日方程右端带有乘子的两项实际上分别是由非完整约束和完整约束作用在第 i 个质点上的约束反力在相应坐标轴上的投影。

需要指出对于含多个质点的系统来说,由于其第一类拉格朗日方程的维数很高,因此应用该方程进行动力学分析和计算往往并不方便。

下面举例说明第一类拉格朗日方程的应用。

例 1-6 两个质量均为 m 的质点 M_1 和 M_2 ,由一长度为 l 的刚性杆相连,杆的质量可忽略不计,若此系统只能在铅垂面内运动,且杆中点的速度必须沿杆向(图 1-12),建立该系统运动的数学模型。

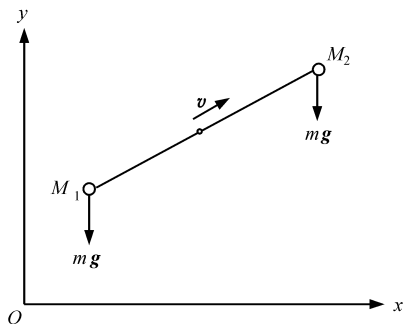


图 1-12

解 选坐标平面 Ox_y 为系统运动的平面,且轴 y 铅直向上。设质点 M_1 和 M_2 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 。考虑到质点 M_1 和 M_2 被一长度为 l 的刚性杆相连,故系统满足完整约束,即

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1)$$

又考虑到杆 $M_1 M_2$ 的中点的速度沿杆向,所以系统还满足非完整约束,即

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)(y_2 - y_1) = 0 \quad (2)$$

由此可见所研究的系统为一具有两自由度的非完整系统。约束方程(1)和方程(2)可分别写成变分形式,即

$$(x_2 - x_1)\delta x_1 + (y_2 - y_1)\delta y_1 + (x_1 - x_2)\delta x_2 + (y_1 - y_2)\delta y_2 = 0 \quad (3)$$

$$(y_1 - y_2)\delta x_1 + (x_2 - x_1)\delta y_1 + (y_1 - y_2)\delta x_2 + (x_2 - x_1)\delta y_2 = 0 \quad (4)$$

根据第一类拉格朗日方程,有

$$m\ddot{x}_1 = \lambda_1(y_1 - y_2) + \mu_1(x_2 - x_1) \quad (5)$$

$$m\ddot{y}_1 = -mg + \lambda_1(x_2 - x_1) + \mu_1(y_2 - y_1) \quad (6)$$

$$m\ddot{x}_2 = \lambda_1(y_1 - y_2) + \mu_1(x_1 - x_2) \quad (7)$$

$$m\ddot{y}_2 = -mg + \lambda_1(x_2 - x_1) + \mu_1(y_1 - y_2) \quad (8)$$

将方程(1)、方程(2)和方程(5)~方程(8)联立形成一个方程组,即

$$\left. \begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)(y_2 - y_1) &= 0 \\ m\ddot{x}_1 &= \lambda_1(y_1 - y_2) + \mu_1(x_2 - x_1) \\ m\ddot{y}_1 &= -mg + \lambda_1(x_2 - x_1) + \mu_1(y_2 - y_1) \\ m\ddot{x}_2 &= \lambda_1(y_1 - y_2) + \mu_1(x_1 - x_2) \\ m\ddot{y}_2 &= -mg + \lambda_1(x_2 - x_1) + \mu_1(y_1 - y_2) \end{aligned} \right\}$$

该方程组即为描述系统运动的数学模型,它是一个微分代数混合方程组。结合系统运动的初始条件,利用适当的数值方法求解该方程组,即可得到系统的运动规律。

1.8 Kane 方程

美国学者 T. R. Kane^[1]建立了受理想约束系统的一种普遍适用的动力学方程——Kane 方程。下面简要介绍这种方程。

设某一受有理想约束的非自由系统由 n 个质点组成, $q_j (j=1, 2, \dots, k)$ 是描述系统位形的一组独立广义坐标,假定该系统受有 m 个非完整约束,这样在广义