

复杂系统的模糊预测 控制及其应用

李少远 李 柠 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书从基本原理与方法、多种控制策略及算法分析、实际应用等多方面阐述了近年来复杂系统模糊预测控制方面的研究成果。内容包括:非线性系统 T-S 模糊模型辨识;预测控制器的设计与系统分析;系统模糊关系矩阵的辨识与预测控制;不确定性系统的模糊优化预测控制;基于控制系统模糊性能指标的预测控制器的参数调整;并以电厂主汽温度回路的控制为背景介绍模糊预测控制的应用。本书是国内模糊预测控制领域的第一本专著,取材新颖、广泛,结合实际,反映了这一领域近年来所取得的进展。

本书适宜控制科学与工程、计算机控制、系统工程和信息工程等专业的科技人员阅读,也可供高等院校相应专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

复杂系统的模糊预测控制及其应用/李少远,李柠著. —北京:科学出版社,2003

ISBN 7-03-011310-1

I. 复… II. ①李…②李… III. 模糊控制-预测控制 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 020230 号

策划编辑:钟 谊/文案编辑:彭 斌 姚 晖/责任校对:柏连海

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 8 月 第 一 版 开本:850×1168 1/32

2003 年 8 月 第一次印刷 印张:5 1/2

印数:1—2 000 字数:142 000

定价:11.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

当前,国内外控制界都把复杂系统的控制作为控制科学与工程学科发展的前沿研究方向。大型复杂工业过程作为重要的背景领域,以其特有的复杂性推动着这一学科前沿的发展,这些复杂性主要表现在:①系统的非线性;②对象和环境的模糊不确定性;③实际系统存在着各种约束;④对控制系统性能要求的综合性。预测控制是20世纪70年代直接从工业过程控制中产生的一类控制算法,它的核心是利用过去及现在的系统信息,并预测到系统未来的输出变化,以有限时域滚动优化的方式使受控量和目标值的偏差尽可能地小,实现系统的优化控制。预测控制之所以能在工业过程控制中显示出巨大的生命力,应归功于其基本原理对于复杂系统的不确定环境的适应性。实际的控制系统中往往存在着许多不确定性,包括被控对象参数的不确定性、控制目标和系统约束的不确定性等,这些不确定性属于模糊不确定性。预测控制和模糊控制是各自独立发展起来的两类控制方法,在二者充分发展的基础上,人们提出将预测的思想和模糊的思想结合起来,形成一种新的控制方法——模糊预测控制,其合理性在于:

(1) 预测控制和模糊控制都是对不确定性系统进行控制的有效方法,预测和模糊相结合会进一步提高控制效果。

(2) 模糊控制发展的趋向是由规则向模型转化,而预测控制是典型的基于模型的控制,对象模型可作为沟通二者的桥梁。

(3) 预测控制是一类基于对象数学模型的优化控制方法,而系统的复杂性与分析系统所能达到的精度是相互制约的,因此,研究模糊环境下的预测控制对于拓展预测控制的应用范围具有重要意义。

近几年来模糊预测控制在国际自动控制领域受到关注,不仅

取得了很多理论研究成果,而且在实际中也得到了成功应用。

模糊预测控制的具体形式多种多样,大致可以分为两类:一是在预测控制机理的框架下,针对具有不确定性的非线性系统,将模糊模型作为预测模型,可视为预测与模糊的融合;另一类是模糊决策和预测控制方法的有机结合,充分发挥滚动优化和模糊决策的长处,相互促进。本书从以上两个方面进行了论述,内容包括:第一章对这一领域进行了综述和分析;第二至五章对基于模糊模型的预测控制进行了讨论和分析;第六和七章讨论了不确定性系统的模糊优化与预测控制的多种结合算法;第八章以电厂主汽温度回路的控制为背景介绍模糊预测控制的应用;第九章对模糊预测控制的进一步发展进行探讨和展望。

本书作者要对上海交通大学的席裕庚教授和南开大学的袁著祉教授在模糊预测控制方面所给予的指导表示衷心的感谢,并对课题组成员所进行的有益讨论表示感谢。作者的研究工作先后得到了国家自然科学基金、国家高新技术研究发展计划(863 计划)和上海市“曙光计划”的资助,特此表示感谢。

本书是作者最近几年研究工作的结晶,希望本书的出版能为推动模糊预测控制在我国的研究和应用起到一定的促进作用。

由于作者水平有限,书中纰漏和错误在所难免,恳请广大读者批评指正。

作 者

2003 年 1 月

目 录

前 言

第一章 绪 言	1
1.1 模糊预测控制产生的背景.....	1
1.2 模糊预测控制的实现形式.....	3
1.3 本书的安排.....	7
第二章 非线性系统的 T-S 模糊模型辨识	9
2.1 T-S 模糊模型的结构形式	9
2.2 基于模糊聚类算法的 T-S 模糊模型辨识	11
2.3 基于满意聚类算法的 T-S 模糊模型辨识	16
2.4 仿真结果.....	23
2.5 T-S 模糊模型启发式辨识方法	27
第三章 基于 T-S 模糊模型的预测控制	35
3.1 一阶系统的间接模糊预测控制算法.....	35
3.2 一般非线性系统的间接模糊预测控制算法.....	42
3.3 模糊预测控制的一般形式.....	44
3.4 模糊预测控制的实质与多步输出预测.....	47
3.5 计算机仿真结果.....	51
第四章 多变量系统的模糊预测控制	57
4.1 基于 T-S 模糊模型的多变量广义预测控制	57
4.2 基于多步线性化的 T-S 模糊多变量预测控制	76
第五章 基于模糊关系模型的预测控制	85
5.1 多步模糊关系预测模型的基本结构.....	85
5.2 多步模糊关系预测模型辨识的 supervised learning 算法.....	87

5.3	基于模糊关系模型的间接预测控制算法	100
5.4	基于模糊关系模型的直接预测控制算法	103
5.5	仿真实例	105
第六章	具有模糊软约束系统的预测控制	110
6.1	问题的描述	111
6.2	满意控制中系统约束的模糊化处理	113
6.3	基于模糊优化的预测控制算法	116
6.4	仿真结果	119
第七章	不确定性系统的模糊优化预测控制	122
7.1	预测控制中的模糊决策	122
7.2	基于模糊优化的视觉机器人路径规划	126
7.3	基于模糊性能指标的广义预测控制器参数调整 ..	134
第八章	模糊预测控制在电厂主汽温控制中的应用	142
8.1	火电厂主汽温对象特性分析	142
8.2	主汽温对象模型的模糊辨识	145
8.3	电厂主蒸汽温度的模糊自适应预测控制	151
8.4	仿真结果	154
第九章	结束语	160
参考文献	162
附录	166
附录 A	广义汽温对象有限脉冲响应序列	166
附录 B	168

第一章 绪 言

1.1 模糊预测控制产生的背景

当前,国内外控制界都把复杂系统的控制作为控制科学与工程学科发展的前沿研究方向。大型复杂工业过程作为重要的背景领域,以其特有的复杂性推动着这一学科前沿的发展,这些复杂性主要表现在:

1. 系统的非线性

线性系统的控制理论已发展得很成熟,非线性系统的控制,无论在理论上和技术上都存在着许多困难,而实际系统往往是非线性的被控对象,往往通过转化为线性系统借鉴“分解-合成”的思想来进行设计和分析。

2. 对象和环境的不确定性

工业过程的对象一般很难以精确的数学模型描述,基于精确数学模型的优化控制方法在应用上受到很大限制,尤其对复杂非线性或部分未知的工业系统控制问题,经典的线性控制理论往往受到限制或只能应用于局部线性的情况,不能得到全局工况的优化解。此外,工业环境中存在着各种扰动,给过程动态带来很大影响。控制系统存在的不确定性表现为模糊不确定性。

3. 实际系统存在着各种约束

由于机构、能量、工艺条件以及安全性等方面的考虑,工业过程中的物理量受到形式多样的约束,使得控制器的控制动作受到限制。另外,复杂工业过程的控制对节能降耗亦提出了更高的要

求,相应地,在优化求解时亦应考虑到经济指标的约束。

4. 对控制系统性能要求的综合性

复杂工业过程的规模日益庞大,生产者已不可能对生产全部过程参数提出控制要求,转而根据生产要求提出不同指标,并尽可能综合考虑这些指标的优化,从而构成了在动态不确定性环境下的满意优化问题。

因此,针对复杂系统在不确定性环境下的约束优化控制成为控制理论界和工业应用界共同面临的课题。预测控制是20世纪70年代^[1]直接从工业过程控制中产生的一类控制算法,它的核心是利用过去及现在的系统信息,并注意到系统未来的目标变化,使受控量和目标值的偏差尽可能小,从而提高系统的控制性能。

预测控制发展至今已有上百种具体算法,但其基本原理可归结为预测模型、滚动优化和反馈校正。预测控制本质上是一种基于模型的有限时域的优化算法,但又不同于传统的基于准确数学模型和给定性能指标的最优控制。预测控制之所以能在工业过程控制中显示出巨大的生命力,应归功于其基本原理对于复杂系统的不确定环境的适应性。预测控制的创始人 Richalet 早已指出^[1],模型预测控制蕴含了一种强有力的方法论思想,它非常类似于人类在复杂的动态环境中进行决策的行为,这种方法论思想自然应该具有更广泛的适用性。

系统具有的模糊性是区别于随机性的另外一种不确定性,许多控制系统是在这种模糊不确定性环境中进行建模、控制和优化的。对具有模糊性的被控对象,无法用一个明确的界限对其进行分类,传统的集合论中关于集合的概念无法描述这种不确定性。1965年 L.A. Zadeh 提出的模糊集合论,寻求一种处理模糊不确定性问题的严谨的数学方法;1974年 E.H. Madani 首先将模糊推理应用于蒸汽发电机的压力和速度控制中,取得了良好的控制效果,从此,模糊控制作为一种处理在不确定性环境中不易建立数学模型的系统控制方法,无论在理论上还是在应用中都获得了长足

进展。模糊控制的最大特征是将专家的控制经验、知识表示成语言控制规则,然后用这些规则进行系统控制,对系统中的许多不确定性表现出良好的鲁棒性。

预测控制和模糊控制是各自独立发展起来的两类控制方法,在二者充分发展的基础上,人们提出将预测的思想和模糊的思想结合起来,形成一种新的控制方法——模糊预测控制,以下几点可以说明其合理性:

(1) 预测控制和模糊控制都是对不确定性系统进行控制的有效方法,预测和模糊相结合会进一步提高控制效果。

(2) 模糊控制发展的趋向是由规则向模型转化,而预测控制是典型的基于模型的控制,对象模型可作为沟通二者的桥梁。

(3) 预测控制是一类基于对象数学模型的优化控制方法,而系统的复杂性与分析系统所能达到的精度是相互制约的,因此,研究模糊环境下的预测控制对于拓展预测控制的应用范围具有重要意义。

模糊预测控制的具体形式多种多样,大致可以分为两类:一是在预测控制机理的框架下,针对具有不确定性的非线性系统,将模糊模型作为预测模型,可视为预测与模糊的融合;另一类是模糊决策和预测控制方法的有机结合,充分发挥滚动优化和模糊决策的长处,相互促进。

1.2 模糊预测控制的实现形式

1.2.1 基于模糊模型的预测控制

模糊控制的最初形式是由一组相对简单的控制规则组成的推理控制器,控制规则通常来自于现场的操作人员,运用专家经验的形式归纳成控制规则,控制规则要求具有完整性、一致性和交叉性。模糊控制近年来之所以引起人们的极大关注,其主要原因在于规则型模糊控制器的成功应用。但是规则型模糊控制器具有明显的不足:首先,当对对象缺乏了解时,事先得到一组具有完备性

的控制规则是很困难的,这就要求必须对规则进行在线调整;其次,针对同一被控对象,不同操作人员的知识、经验可能是不同的,甚至差异较大;第三,基于人的控制策略,规则型模糊控制器的控制品质不会超过操作人员所能达到的水平,无法实现优化控制;第四,规则型模糊控制器不便于进行系统分析和规范性设计,基本型模糊控制器的稳定性问题至今仍没有解决。

目前,模糊控制的发展出现了由规则转向模型的趋势。自适应控制、最优控制等都需要对象的准确模型,而对非线性、时变、不确定性系统,准确数学模型的建立是很困难的。鉴于规则型模糊控制器的不足,人们试图找到模糊控制的新形式。一种方法就是类似于间接自适应控制的做法,先建立过程本身的模型,然后把该模型引入某种基于模型的控制策略中。模糊模型是一种与模糊概念和模糊推理有直接关系的系统描述方法,它是一种本质非线性模型,适于表达复杂系统的动态特性,而且模糊参数有较为明显的物理意义,因此模糊模型在复杂系统的控制中有着重要的地位。

在现代控制理论中,复杂非线性系统的辨识和控制仍是一大难题,模糊逻辑推理、神经网络及二者的结合为非线性系统的建模与控制提供了强有力的工具,特别是模糊模型易于表达结构性知识,成为模糊控制系统研究的关键问题。早在 1973 年,Zadeh 就提出“不相容原理”,即当一个系统复杂性增加时,人们能对它精确化的能力将降低,当达到一定的阈值时,复杂性和精确性将相互排斥,也就是说,在多变量、非线性、时变的复杂大系统中,系统的复杂性与人类要求的精确性之间形成了尖锐矛盾。Sugeno 等在文献[2]中认为这正是 Zadeh 提出模糊集合论的初衷。因此,许多研究者在研究非线性系统建模和控制问题时用到了模糊推理。

在模糊模型辨识中,研究者都注意到非线性系统的模糊建模,其中研究最多的是 Sugeno 模型。Sugeno 本人及合作者自 1985 年在 Fuzzy Identification of System and its Applications to Modeling and Control^[3]一文中提出 Sugeno 模糊模型后,系统地提出了其辨识方法,Sugeno 模型的辨识分前提结构和参数的辨识、结论结构

和参数的辨识。Sugeno 模型具有以下优点：

- (1) 可以用较少的模糊规则表示高度非线性的复杂系统。
- (2) 易于推广到多输入—多输出模糊系统,方便地调整参数。
- (3) 利用系统的输入输出数据定量提取系统的定性知识。
- (4) 局部线性模型易于设计控制器和系统分析。

基于 T-S 模糊模型的控制可以采用并行结构,如图 1.1 所示。由于 T-S 模糊模型构成的各条规则采用线性方程式作为结论,使得模型的全局输出具有良好的数学表达特性,便于采用线性控制策略设计非线性控制。将 T-S 模糊模型对非线性系统的良好描述特性和预测控制的优化算法相结合,可以实现对非线性系统的优化控制,是目前模糊预测控制的主要形式。

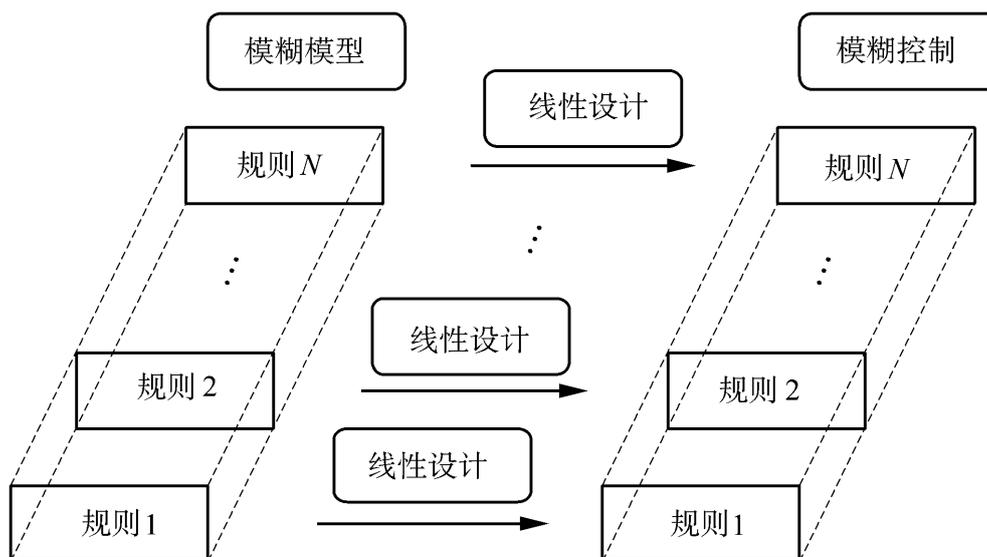


图 1.1 T-S 模糊控制系统的设计

模糊关系模型是在模糊关系的基础上用关系矩阵表示的语言模型,其辨识问题归结为确定模糊关系矩阵中的各元素的值,这需要同时确定输入输出之间的关系和模糊子集的隶属度。关系型模糊模型的辨识要比 T-S 模糊模型的辨识复杂,但其最大的优点是仍保持了模糊推理的直观性,其中的物理关系易于设计者理解。将关系模型嵌入到预测控制算法中是目前模糊预测控制的另外一种重要形式。

1.2.2 预测控制与模糊决策的结合

非线性系统的模糊预测控制实质上是模糊决策和预测控制方法的有机结合。预测控制本质上是在有限时间内的优化控制算法,并通过滚动优化机制克服系统不确定性因素的影响。系统预测和模糊推理都是人们在处理复杂工业过程控制问题时的自然想法,在现有的模糊预测控制文献中,大多是先通过模糊推理建立全局系统的模型,然后利用这一模型对系统的输出进行预测,利用预测控制算法得到控制量;已经证明模糊模型都有对非线性函数的万能逼近性质,因而模糊预测对于非线性系统的控制有一定的作用,这是处理非线性系统优化控制的一种有效策略。然而,这一做法与预测控制的初衷是不一致的,因为预测控制以滚动优化机制来降低对控制模型的要求,而用模糊推理建立非线性系统的全局模型是很复杂的事情,再结合预测控制算法反而增加了复杂性。另外,在现有模糊预测控制研究中,也没有考虑多目标和多约束的实际控制问题。

模型预测控制的本质是利用系统的预测信息,在有限时域内对某一性能指标进行优化。为了克服系统的不确定性,在预测控制中采用滚动优化策略。系统的预测输出 $\hat{y}(k+i)$, $i=1,2,\dots,N$ 是由系统当前时刻 k 的信息和未来的控制信号 $u(k+i)$, $i=1,2,\dots,N-1$ 得到的,其中 N 为系统的预测时域。为了优化问题的简化,一般取控制时域 $M < N$,即 $u(k+i) = u(k+M-1)$, $M, \dots, N-1$,优化目标为

$$J = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\hat{e}(k+i))^2 + \sum_{i=1}^M \gamma_i (\Delta u(k+i-1))^2$$

式中, $\hat{e}(k+i)$ 为系统的预测误差; $\Delta u(k+i-1)$ 为系统控制增量; α_i 和 γ_i 分别为对预测误差和控制增量的加权系数。在上式所示的二次型性能指标的优化问题中,系统的控制性能依赖于加权系数的调整,而这种调整缺乏有效的方法。

在复杂工业过程控制中,控制目标和系统约束分别为 $G_1, G_2, \dots, G_p; C_1, C_2, \dots, C_q$ 。控制的目标是在满足控制约束的前提下,使得控制目标尽量满足,而当控制目标受到系统约束时,控制目标不能得到满足,这时需要兼顾控制目标和系统约束,保持系统的稳定和性能优化,称为有约束多目标多自由度优化控制(constrained multi-objective multi-degree of freedom optimization, CMMO)^[4]。由于系统的高度复杂性,系统约束和控制目标往往是用模糊语言变量来表述的,因而上述问题可以扩展为多目标的模糊决策问题^[5]。

通常情况下,复杂工业过程中所遇到的约束——由系统本身物理特性(机械、热力、电气等等)所决定的约束和由产品经济效益特性(产品质量、利润率等等)所决定的约束——都在控制系统上归结为对于控制量的约束、对于控制量变化率的约束和对于输出量的约束。在传统的有约束规划中,约束条件本身意味着就是不能逾越、不能改变的。预测控制是易于处理系统约束的优化算法,为兼顾控制目标和系统约束,达到满意的控制效果,需要在一定的情况下调整“软约束”。也就是说,每一个约束变量都具有在一定范围内可调整的性质,并且有一个函数反映用户对于约束变量取值的倾向。我们可以用模糊变量来描述这一特性。对于模糊变量 \tilde{b} 可以定义隶属度函数 $\mu(\tilde{b}) (0 \leq \mu \leq 1)$ 来反映该变量隶属于某一集合(这里就是使用户满意的条件的集合)的程度。 $\mu=1$ 表示对应的模糊变量属于这一集合(用户完全满意), $\mu=0$ 则反之。其实,在这里我们可以直接把 μ 作为满意度来理解。

1.3 本书的安排

本书将从基本原理与方法、多种控制策略及算法分析、实际应用等多方面阐述近年来复杂系统的建模与控制,特别是预测控制方面的研究成果。全书共分九章:第一章为绪言,对复杂系统的建模与控制进行综述和分析;第二章介绍非线性系统 T-S 模糊模型

辨识;第三、四章分别介绍针对非线性系统的 T-S 模糊模型的预测控制和系统分析等内容,主要从优化设计的角度将线性系统的预测控制推广到非线性系统;第五章则从模糊关系的本质入手,阐述系统输入-输出模糊关系矩阵的辨识与基于这一关系模型的预测控制;第六章从实际系统中存在的模糊目标和模糊约束出发,介绍对象和环境在模糊不确定条件下的优化决策和控制的策略和方法;第七章基于控制系统的模糊性能指标讨论了预测控制器的参数调整;第八章以电厂主汽温度回路的控制为背景介绍模糊预测控制的应用;最后,第九章对模糊预测控制的进一步发展进行探讨和展望。

第二章 非线性系统的 T-S 模糊模型辨识

Takagi 和 Sugeno 于 1985 年在文献[3]中提出了一种 T-S 模糊模型,它是一种本质非线性模型,适用于表达复杂系统的动态特性。自从 20 世纪 60 年代以来,研究者已经提出了许多动态系统的辨识方法,但是总的来说,系统辨识无论在理论上还是实际应用中,还远没有达到完善的程度,对于非线性时变动态系统的辨识,是实际应用中经常遇到的困难,目前常见的有两种方法:一是用多个线性模型在平衡点附近近似描述非线性系统,这对于有严重非线性的系统如何做到平稳切换,减小系统误差仍然缺乏有效的方法;二是根据被控对象已知的信息,选择与之相近的非线性数学模型,显然有其局限性,因此模糊模型辨识方法,被认为是解决此类问题的一种可行方法。

另外,T-S 模糊模型的结论部分采用线性方程式描述,因此便于采用传统的控制策略设计相关的控制器和对控制系统进行分析。

2.1 T-S 模糊模型的结构形式

不失一般性,MIMO 系统可以看成是多个 MISO 系统,具有 p 个输入、单个输出的 MISO 系统离散时间模型可以由 n 条模糊规则组成的集合来表示,其中第 i 条模糊规则的形式为^[6]

$$\begin{aligned} R^i : & \text{if } y(k-1) \text{ is } A_1^i, y(k-2) \text{ is } A_2^i, \dots, y(k-n_y) \text{ is } A_{n_y}^i, \\ & u_1(k-\tau_1) \text{ is } A_{n_y+1}^i, \dots, u_1(k-\tau_1-n_1) \text{ is } A_{n_y+n_1+1}^i, \dots, \\ & u_p(k-\tau_p) \text{ is } A_{n_y+n_1+\dots+n_{p-1}+p}^i, \dots, u_p(k-\tau_p-n_p) \text{ is } A_{n_y+n_1+\dots+n_p+p}^i \\ \text{then } & \dot{y}^i(k) = p_0^i + p_1^i y(k-1) + p_2^i y(k-2) + \dots + p_{n_y}^i y(k-n_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ p_{n_y+n_1+1}^i u_1(k-\tau_1-n_1)+\cdots \\
 &+ p_{n_y+n_1+\cdots+n_{p-1}+p}^i u_p(k-\tau_p)+\cdots \\
 &+ p_{n_y+n_1+\cdots+n_p+1}^i u_p(k-\tau_p-n_p) \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

这里, R^i 表示第 i 条模糊规则; A_j^i 是一个模糊子集, 其隶属度函数中的参数称为前提参数; y^i 是第 i 条规则的输出; p_j^i 是一个结论参数; $u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_p(\cdot)$ 是输入变量; $y(\cdot)$ 是输出变量; $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ 是纯时间滞后; n_y, n_1, \dots, n_p 是有关变量的阶次。有关纯滞后时间和阶次可以采用类似常规的辨识方法来确定。

为方便起见, 令

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(k) = y(k-1) \\ x_2(k) = y(k-2) \\ \vdots \\ x_{n_y}(k) = y(k-n_y) \\ x_{n_y+1}(k) = u_1(k-\tau_1) \\ \vdots \\ x_m(k) = u_p(k-\tau_p-n_p) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

式中, $m = n_y + \sum_{i=1}^p (n_i + 1)$ 。

这样, 式(2.2)可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned}
 R^i: & \text{if } x_1 \text{ is } A_1^i, x_2 \text{ is } A_2^i, \dots, x_m \text{ is } A_m^i \\
 & \text{then } y^i = p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + \dots + p_m^i x_m \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

假设给定一个广义输入向量 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$, 那么由诸规则的输出 $y^i (i=1, 2, \dots, n)$ 的加权平均即可求得系统总的输出

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu^i y^i}{\sum_{i=1}^n \mu^i} \quad (2.4)$$

式中, n 是模糊规则的数量; y^i 由第 i 条规则的结论方程式求取; μ^i 代表对应此广义输入向量的第 i 条规则的适应度(隶属度), 由下式确定:

$$\mu^i = \prod_{j=1}^m A_j^i(x_{j0}) \quad (2.5)$$

式中, \prod 是模糊算子, 通常采用取小运算或乘积运算。

2.2 基于模糊聚类算法的 T-S 模糊模型辨识

上面讨论了 T-S 模糊模型的结构和推理, 在复杂非线性系统的建模中显示出比以往建模方法的优越性, 因而得到了广泛应用, 然而在实际中建立系统的 T-S 模糊模型并不是一种简单的事情, 主要表现在:

(1) 输入变量的隶属度函数难以确定。通常采用的有三角形或梯形隶属度函数, 对应一个模糊集合的隶属度至少要有三个参数需要确定, 通常是通过非线性规划方法计算, 工作量大。

(2) 结论参数是一个多参数的复杂优化问题。如果有 m 个输入变量, 由 n 条规则表示, 则需要辨识 $n(m+1)$ 个结论参数, 计算量大。

由于以往建立 T-S 模型需要前提部分结构、参数和结论部分的参数联合辨识, 先给出初始的前提结构和参数, 然后辨识结论参数, 再计算性能指标; 如果不满足要求, 再一次修改模糊集合的划分, 其流程图如图 2.1 所示。

在这种辨识方法中, 前提部分的划分和参数与结论参数直接耦合, 前提条件中模糊集合划分的改变直接影响到结论参数的辨

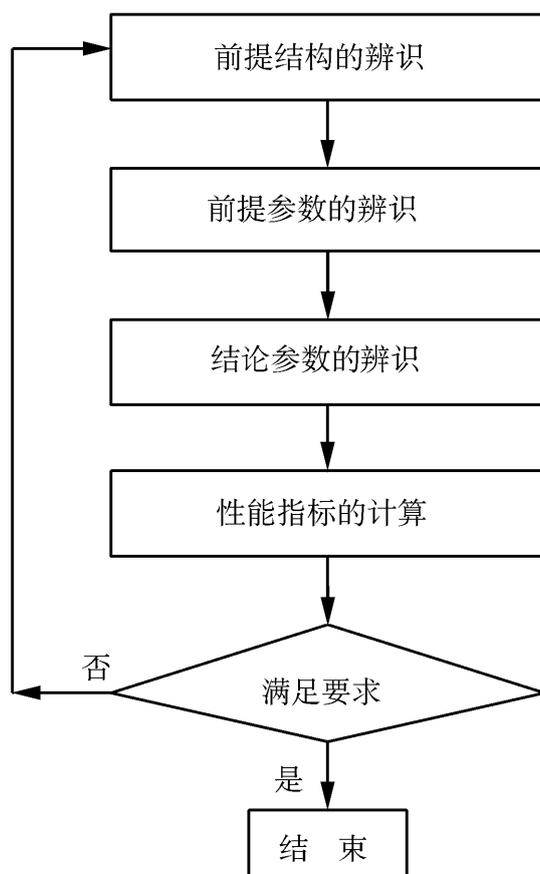


图 2.1 T-S 模糊模型的辨识步骤

识,建立的模型对特定的数据有较高的精度,但工况的改变又会影响到模糊集合的划分,因而,如何简化 T-S 模型的辨识步骤,提高模型的泛化能力,是这种模糊模型需要解决的问题,为此本章提出 T-S 模糊模型前提部分和结论部分分开辨识,其基本思想是:根据系统的特征或某种指标,对输入变量先进行模糊聚类,确定前提部分输入变量的隶属度函数分布,在这种划分下,再辨识结论部分的参数。

2.2.1 前提部分的模糊离散化

模糊离散化(fuzzy discretization)在以往辨识模糊关系中是常用的方法,首先将输入变量在论域上分为 c 个模糊集合 A_1, A_2, \dots, A_c ,称为参考模糊集合,满足完备性条件

$$\forall x \in \Omega \quad \exists 2 \leq i \leq c \quad \text{s.t.} \quad A_i(x) > 0 \quad (2.6)$$

即在论域 Ω 中任一元素至少属于某一个模糊集合 A_i , 则在论域 Ω 中的任一模糊集合 A 可用隶属度 $[a_1, a_2, \dots, a_c]$ 表示。这样, 系统输入变量的非线性数据则可用它们的隶属度表示成模糊信息, 称为模糊离散化。

设在论域 Ω 中有 c 个参考模糊集合, 则任一模糊集合可以用 c 个参考模糊集合的隶属度表示, 即

$$\mu_{A(k)}(A_1, A_2, \dots, A_c) = [\mu_{11}(k), \mu_{21}(k), \dots, \mu_{c1}(k)]^T$$

$$(k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

式中, N 为输入变量数据个数; c 为参考模糊集合的个数。则在 T-S 模糊模型中有 $n = c$ 条规则。

按照三角形隶属度函数, 关键是确定 c 个模糊集合的中心值 c_i , 为此, 本章采用模糊聚类的方法确定 c_i 。

2.2.2 模糊聚类算法

给定一组数据向量 $x_k, 1 \leq k \leq N$, 将这一组数据划分为 c 个模糊类, 第 k 个数据属于第 i 个模糊类的隶属度函数用 μ_{ik} 表示, 假设

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ik} = 1 \quad (\text{对所有 } k) \quad (2.8)$$

并且定义 $\mu_{ik} (i=1, 2, \dots, c; k=1, 2, \dots, N)$ 阵为 U 。

模糊聚类算法如下:

(1) 给出初始划分 $c=2$, 初始隶属度矩阵 $U^{(1)}$, 初始步数 $m=1$;

(2) 计算 $i=1, 2, \dots, c$ 个模糊类的中心值

$$c_i = \frac{\sum_{k=1}^N \mu_{ik} x_k}{\sum_{k=1}^N \mu_{ik}}, \quad 2 \leq i \leq c \quad (2.9)$$

并定义第 k 个数据与第 i 个模糊类的距离为

$$d_{ik} = \| x_k - c_i \| \quad (2.10)$$

(3) $m = m + 1$, 计算新的隶属度矩阵 $U^{(m+1)}$ 。

定义

$$I \triangleq \{2, \dots, c\}$$

$$I_k \triangleq \{i \mid 2 \leq i \leq c; d_{ik} = \| x_k - c_i \| = 0\} \quad (\text{中心值点集合})$$

$$\bar{I}_k \triangleq I - I_k \quad (\text{非中心值点集合})$$

(2.11)

则

$$\mu_{ik}^{(m+1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{j=1}^c \frac{d_{jk}}{d_{ik}}} & (I_k = \emptyset) \\ \left. \begin{array}{l} 0 \quad \forall i \in \bar{I}_k \\ a_{ik} \quad \forall i \in I_k \end{array} \right\} & (I_k \neq \emptyset) \end{cases} \quad (2.12)$$

式中,

$$a_{ik} : \sum_{i \in I_k} a_{ik} = 1, \quad \forall i \in I_k \neq \emptyset \quad (2.13)$$

(4) 给定目标 ϵ :

如果 $\| U^{(m+1)} - U^{(m)} \| \leq \epsilon$, 则 c_i 为聚类中心值点, 否则增加模糊类数, 返回②。

2.2.3 结论参数的辨识

根据式(2.4)和(2.5), 定义

$$\beta_i \triangleq \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} \quad (2.14)$$

可以写成

$$y_k = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i = \sum_{i=1}^n \beta_i (p_{i0} + p_{i1} x_1 + \cdots + p_{im} x_m) \quad (2.15)$$

写成向量形式,有

$$y_k = \phi_k^T \theta \quad (2.16)$$

其中

$$\begin{aligned} \theta &= [p_{10}, \cdots, p_{n0}, p_{11}, \cdots, p_{n1}, p_{1m}, \cdots, p_{nm}]^T \in R^{(m+1)n} \\ \phi_k^T &= [\beta_1^k, \cdots, \beta_n^k, \beta_1^k x_1^k, \cdots, \beta_n^k x_1^k, \cdots, \beta_1^k x_m^k, \cdots, \beta_n^k x_m^k] \\ y &= [y^1, y^2, \cdots, y^N]^T \end{aligned} \quad (2.17)$$

则根据最小二乘法,有

$$\theta = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y \quad (2.18)$$

显然, $(m+1)n$ 个参数一起用最小二乘法辨识,其计算量大,不宜直接使用,采用正交参数辨识是一种有效的方法。

将式(2.17)简记为

$$\theta \triangleq [\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r] \quad (2.19)$$

$$\phi_k^T \triangleq [f_{1k}, f_{2k}, \cdots, f_{rk}] \quad r = (m+1)n$$

式(2.16)可写成

$$y_k = \sum_{i=1}^r f_{ik} \theta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \quad k = 1, 2, \cdots, N \quad (2.20)$$

r 是被辨识式参数的个数; N 为样本个数。

将式(2.20)转化为

$$y_k = \sum_{i=1}^r w_{ik} \theta_i \quad (2.21)$$

式中, w_{ik} 是一组正交基,可按下述公式计算:

$$\begin{cases} w_{1k} = f_{1k} \\ w_{hk} = f_{hk} - \sum_{i=1}^{h-1} \alpha_{ih} w_{ik}, \quad h = 2, 3, \dots, r \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\alpha_{ih} = \frac{\sum_{k=1}^N w_{ik} f_{hk}}{\sum_{k=1}^N w_{ik}}, \quad i < h, \quad h = 2, 3, \dots, r \quad (2.23)$$

被辨识参数 g_i 由下式给出:

$$\hat{g}_i = \frac{\sum_{k=1}^N w_{ik} y_k}{\sum_{k=1}^N w_{ik}}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.24)$$

则原来被辨识参数 θ_i 由下式给出:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_r = \hat{g}_r \\ \hat{\theta}_i = \hat{g}_i - \sum_{j=i+1}^r \alpha_{ij} \hat{\theta}_j, \quad i = r-1, r-2, \dots, 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

至此, T-S 模糊模型前件的模糊划分和结论参数就全部确定了。辨识思想是将前件划分和结论参数分开辨识, 首先确定前件的模糊区间划分和隶属度, 然后利用一些现有的线性系统辨识方法辨识结论部分线性关系中的系数, 大大简化了辨识过程。

2.3 基于满意聚类算法的 T-S 模糊模型辨识

2.3.1 Gustafsson-Kessel 聚类算法^[7]

GK 算法目标是通过求取目标函数获得隶属度矩阵 $U = [\mu_{ij}]_{c \times N}$ 和聚类中心 $V = [v_1, v_2, \dots, v_c]$:

$$\min J(Z, V, U) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N \mu_{ij}^m d^2(z_j, v_i) \quad (2.26)$$

满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^c \mu_{i,j} = 1, & j = 1, 2, \dots, N \\ 0 < \sum_{j=1}^N \mu_{i,j} < N, & i = 1, 2, \dots, c \end{cases} \quad (2.27)$$

式中, $d(z_j, v_i)$ 表示样本 z_j 与聚类中心 v_i 之间的距离, 它决定了聚类的形状。GK 算法中采用自适应的距离度量方法:

$$d^2(z_j, v_i) = (z_j - v_i)^T M_i (z_j - v_i) \quad (2.28)$$

式中 M_i 是一个正定矩阵, 由近似反映各聚类实际形状的聚类协方差矩阵 F_i 决定:

$$F_i = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_{i,j}^m (z_j - v_i)(z_j - v_i)^T}{\sum_{j=1}^N \mu_{i,j}^m} \quad (2.29)$$

$$M_i = \det(F_i)^{\frac{1}{d+1}} F_i^{-1} \quad (2.30)$$

由于无法得出解析解, GK 算法提供一种迭代算法来近似得出目标函数的最优值, 其算法描述如下:

Step 1: 给定数据集 Z , 聚类个数 c , 任意的初始隶属度矩阵 U ;

$$\text{Step 2: 计算聚类中心向量 } v_i = \frac{\sum_{j=1}^N \mu_{i,j}^m z_j}{\sum_{j=1}^N \mu_{i,j}^m};$$

Step 3: 利用式(2.29)计算聚类协方差矩阵 F_i ;

Step 4: 利用式(2.30)计算矩阵 M_i ;

Step 5: 按式(2.28)计算平方距离 $d^2(z_j, v_i)$;

Step 6: 重新计算模糊隶属度矩阵 U : $\mu_{i,j} = \frac{d^2(z_j, v_i)^{-1/(m-1)}}{\sum_{l=1}^c d^2(z_j, v_l)^{-1/(m-1)}}$; 如果对 $i=k$ 有 $d^2(z_j, v_i)=0$, 则令 $\mu_{k,j}=1$, $\mu_{i,j}=0, \forall i \neq k$;

Step 7: 重复上述步骤, 直到满足某给定的收敛指标, 如 $\|U_l - U_{l-1}\| < \epsilon$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示某适当的范数; l 为迭代次数; ϵ 为终止迭代的指标, 一般取 $\epsilon=0.01$ 就能够满足精度要求。

迭代结束后, 隶属度矩阵 U 、聚类中心 v_i 及协方差矩阵 F_i ($i=1, 2, \dots, c$) 就能相应得出。

2.3.2 基于满意聚类的 T-S 模糊建模

简便恰当模型是进行有效控制的前提。实际工业过程尤其是化工过程往往呈现强非线性、多工况等特点, 因而对类似复杂非线性系统的辨识问题仍有待解决。针对上述特点, 人们开始着手研究基于多模型的辨识和控制手段, T-S 模型是其中一种有效方法。多模型策略的基本原理是分解-合成, 因此如何将全局非线性系统分解为局部线性系统, 换句话说, 需要多少个局部模型以及各自所属的有效区间又是什么, 就成为多模型方案首先要解决的问题, 不难理解, 这也正是 T-S 模糊建模所面临的问题。下面, 本节介绍一种满意聚类算法来解决上述问题。

众所周知, 聚类算法目的是将数据集按照某种相似性准则划分为若干子集, 因此可将聚类算法自然而然的引入到多模型策略中来。聚类算法可分为两种: 硬聚类和(模糊)软聚类。前者往往应用于聚类间边界明显的情况, 对于聚类边界不十分清晰的系统, 采用模糊聚类法则更为适当, GK 算法就是模糊聚类方法中非常有效的一种。GK 算法由 Gustafsson 和 Kessel 于 1979 年提出, 它通过聚类协方差矩阵采用自适应的距离度量进行模糊聚类。

容易理解,利用聚类算法解决 T-S 建模问题时,聚类算法中的聚类个数 c 即对应于 T-S 模型的规则个数,因此将全局系统进行满意的划分即等同于求取合适的聚类个数 c 。然而很多聚类算法,包括 GK 算法在内,前提都是要事先给定聚类个数 c ,这一定程度上限制了聚类算法的应用。目前较常见的 c 确定方法有两种:比较法(validity measure)和融合法(cluster merging)。前者利用某种度量指标来评价聚类的质量,即将样本集进行若干次聚类($c \in [2, N]$), N 表示样本个数,其中对应于最小度量指标的聚类个数即被视做最佳的聚类数目。聚类融合策略首先从某个较大的聚类个数 c_{\max} 开始聚类 c ($c \in [2, c_{\max}]$), c_{\max} 要足够大以便覆盖整个系统的非线性特征,然后陆续将相近或相似的聚类中心进行合并,以此减少聚类数目。由于聚类个数本质上依赖于系统所呈现的非线性程度,因此对于缺乏足够先验知识的系统来说,一般只能采用试凑比较的方法来逐步确定聚类个数,这无疑会增加计算负担;尽管聚类融合法能够一定程度上减小计算量,但其初始聚类个数仍需事先确定而且要足够大以覆盖整个系统,因此累积的计算量仍很可观,这一点对于大样本集合尤其明显。

考虑聚类算法的原理,可以知道它是按相似性将数据集划分为几个类别,同时这几个类别之间应满足彼此间最小的重叠,以避免聚类的重复性,即各聚类中心彼此之间应该在包含足够多相似样本的基础上最不相似,换句话讲,同一聚类中的样本应尽可能的靠紧,而不同聚类中心之间的距离应尽可能的远。聚类算法也就是寻找若干包含一组与其相似的样本的最不相似样本中心,才能最大程度的代表系统的不同特征,同时各聚类中心应包含足够数目的样本以保证以尽可能少的聚类中心点表达系统。

由此提出一种基于 GK 模糊满意聚类算法,如果将比较法称作中间值法,聚类融合法称作递减法的话,则本文提出的满意聚类方法可称作递增法。简单地说,给定初始聚类个数 $c=2$ ($c \in [2, c^*]$), 其中 c^* 是有待求解的满意的聚类数目,在对系统进行初次聚类后,若聚类效果尚未令人满意,则从样本集中找出一个与各聚

类中心点 $v_1 \sim v_c$ 最不相似的样本作为新的样本中心 v_{c+1} , 并将 $v_1 \sim v_{c+1}$ 作为初始聚类中心, 在此基础上计算新的非随机的隶属度矩阵 U , 继而后用 GK 算法重新对系统进行 $c+1$ 类划分, 根据性能指标的要求重复上述步骤, 直到得出令人满意的指标要求, 此时所得的聚类个数原则上一定是满足要求的合适聚类数目。由于 $c^* \leq c_{\max} \leq N$, 而且计算过程中无需重新初始化聚类中心, 因而其计算量将大大降低, 性能指标递减速度也将明显加快。

由于基于 GK 模糊满意聚类算法能够得出系统的较好划分, 因此可以将其引入 T-S 建模方法中, 即利用该方法确立系统的规则集。

考虑一多输入单输出(MISO)系统, 其样本集由系统的输入输出数据组成, 假设其样本表示为 (φ_j, y_j) , $j=1, 2, \dots, N$, φ_j 表示影响系统输出的递推向量, 一般选择系统当前及以往的输入输出作为其向量分量, y_j 是系统输出。定义 $z_j = [\varphi_j, y_j]^T$, 则样本集可表示为 $Z = [z_1, z_2, \dots, z_N]$, 其中 $z_j \in R^{d+1}$ 。假定样本集 Z 被分成 c 个聚类 $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_c\}$, 则系统可由 c 个子模型 $\{M_1, M_2, \dots, M_c\}$ 表征, 全局系统模型可利用局部模型间的模糊加权组合求出, 图 2.2 给出了基于 GK 模糊满意聚类的 T-S 建模方法的结构示意图。

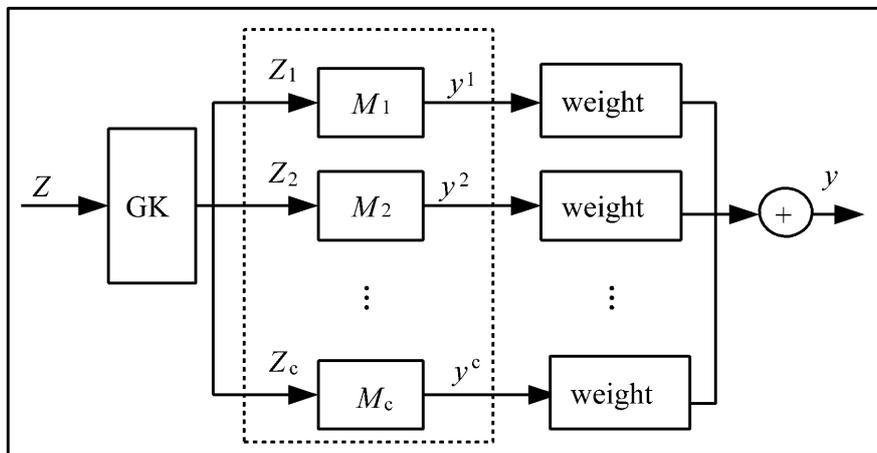


图 2.2 基于满意聚类的 T-S 建模方法框图

2.3.3 基于满意聚类的 T-S 建模方法

Step 1: 令初始聚类个数 $c=2$ 。

Step 2: 由初始隶属度矩阵 U_0 , 利用 GK 算法将样本集合 Z 进行分类, 得出隶属度矩阵 $U = [\mu_{i,j}]_{c \times N}$, 然后根据每组样本所属各子集的隶属度选取最大值进行分类, 将 Z 分为 c 个子集, $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_c\}$ 。

Step 3: 对聚类后生成的每个子集采用 Nakanishi 提出的稳态 Kalman 滤波器迭代算法^[8] 辨识出各子模型的参数, 该算法类同于递推最小二乘法, 借助 Step 2 中生成的隶属度矩阵可以方便地得出参数集 $P = [p_0^1, \dots, p_0^c, p_1^1, \dots, p_1^c, \dots, p_d^1, \dots, p_d^c]^T$, 则对应各聚类中心的子规则可以描述为

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 : \text{if } (\varphi_j, y_j) \in Z_1 \\ \quad \text{then } y^1 = p_0^1 + p_1^1 \varphi_j(1) + \dots + p_d^1 \varphi_j(d) \\ R_2 : \text{if } (\varphi_j, y_j) \in Z_2 \\ \quad \text{then } y^2 = p_0^2 + p_1^2 \varphi_j(1) + \dots + p_d^2 \varphi_j(d) \\ \quad \vdots \\ R_c : \text{if } (\varphi_j, y_j) \in Z_c \\ \quad \text{then } y^c = p_0^c + p_1^c \varphi_j(1) + \dots + p_d^c \varphi_j(d) \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Step 4: 计算出来的隶属度矩阵 $U = [\mu_{i,j}]_{c \times N}$ 可直接作为输入 z_j 隶属于第 i 条规则的程度, 则对应输入 z_j 的系统输出为

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^c \mu_{ij} y^i}{\sum_{i=1}^c \mu_{ij}} \quad (2.32)$$

其实,由 GK 算法推得隶属度矩阵还满足下述关系 $\sum_{i=1}^c \mu_{ij} = 1$;若要预测对于新的输入 $\tilde{\varphi}$ 所对应的输出 \tilde{y} ,则回到 GK 算法通过下式计算 $\tilde{\varphi} \in R^d$ 对应第 i 条规则的隶属度 μ_i

$$\mu_i(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^c (D_{A_i^x}(\tilde{\varphi}, v_i^x) / D_{A_i^x}(\tilde{\varphi}, v_j^x))^{2/(m-1)}} \quad (2.33)$$

式中, v_i^x 表示第 i 个聚类中心除去输出分量后剩余的向量部分, $v_i^x \in R^d$; $D_{A_i^x}(\tilde{\varphi}, v_i^x)$ 表示新输入向量与第 i 个聚类之间的按照 GK 聚类算法中定义的距离函数; m ($m > 1$) 是表征聚类模糊程度的可调参数, m 越大各聚类之间的重叠越多,通常取 $m = 2$,则预测输出 \tilde{y} 可按式 (2.32) 得出。显然,由式 (2.33) 同样可得出

$$\sum_{i=1}^c \mu_i = 1.$$

Step 5: 计算用户给定的系统性能指标 S 的当前值 S_c ,如对于系统建模来说,往往通过模型的均方根误差指标 $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2}$ 来衡量模型的拟合效果;当系统性能指标 $S_c \leq S_{TH}$, S_{TH} 为用户认为满意的性能指标阈值,则认为多模型建模结束;否则,认为系统聚类不成功,转 Step 6。

Step 6: 在样本集中,根据隶属度矩阵 U 找出一个与各子集均不相似样本 z_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 不相似性可按下式给出:

$$n = \arg \min_n \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq c \\ i \neq j}} (\mu_{ni} - \mu_{nj}) \quad (2.34)$$

为避免噪声,一般应找出几个类似的样本求其平均值,作为新的聚类中心 v_{c+1} 。

Step 7: 以 v_1, \dots, v_c, v_{c+1} 为新的聚类初始中心,计算相应的新的初始隶属度矩阵 U_0 ,而非比较法中重新初始化的随机矩阵。

Step 8: 令 $c = c + 1$, $U = U_0$,转 Step 2。

满意聚类算法避免了聚类融合方法中根据系统非线性特征确定 c_{\max} , 而直接采用 $c=2$ 为初始化条件, 使得算法有了确定的初始聚类个数; 而且除初次聚类外, 以后的聚类初始化参数, 如隶属度矩阵等可基本确定, 不必再从随机量开始重新聚类, 因此计算的收敛速度将明显加快, 对于大样本量的数据集, 快速性更为明显。值得说明的是, 聚类数目的选取具有相当的任意性, 但其最终与用户愿意承受的精度要求相关。在这个意义上, 我们认为聚类的划分应该是使用户要求得到最大满足的聚类个数, 即是否能用最少的聚类数目满足用户所接受的要求(阈值), 而不是优化指标的绝对最小, 因此基于满意聚类算法的 T-S 建模方法中采用“均方根误差的阈值”为满意的标准, 而不直接采用“均方根误差最小化”为优化的标准, 这种满意聚类的定义显然更符合实际要求。

基于满意聚类的 T-S 建模方法将一个复杂非线性系统的辨识问题转化为求取一组简单的线性模型及其相应的由模糊边界定义的有效区间, 通过模糊加权组合得出系统全局模型, 使得非线性系统的控制问题相应转化为线性系统控制问题, 为非线性预测控制问题的简化提供了可能。

2.4 仿真结果

2.4.1 Box-Jenkins 煤气炉数据

Box-Jenkins 煤气炉是系统辨识的一个典型例子, 著名的 Box-Jenkins 数据集包含 296 组输入输出观测数据, 其中输入 $u(t)$ 为进入煤气炉的煤气流量, 输出 $y(t)$ 为释放出的煤气中的 CO_2 浓度。由于该过程是动态变化的, 影响系统输出的变量的选取方法也可有多种, 是一种典型的非线性系统建模常用的仿真验证例子, 在文献[9]中对这一实例比较了许多研究者的结果。本节中我们采用 $y(t-1)$ 和 $u(t-4)$ 作为模型的输入。图 2.3 给出了采用本节算法在聚类个数为 2 时获得的建模效果, 并在表 2.1 中比较了在不同建模方法下的均方根误差。

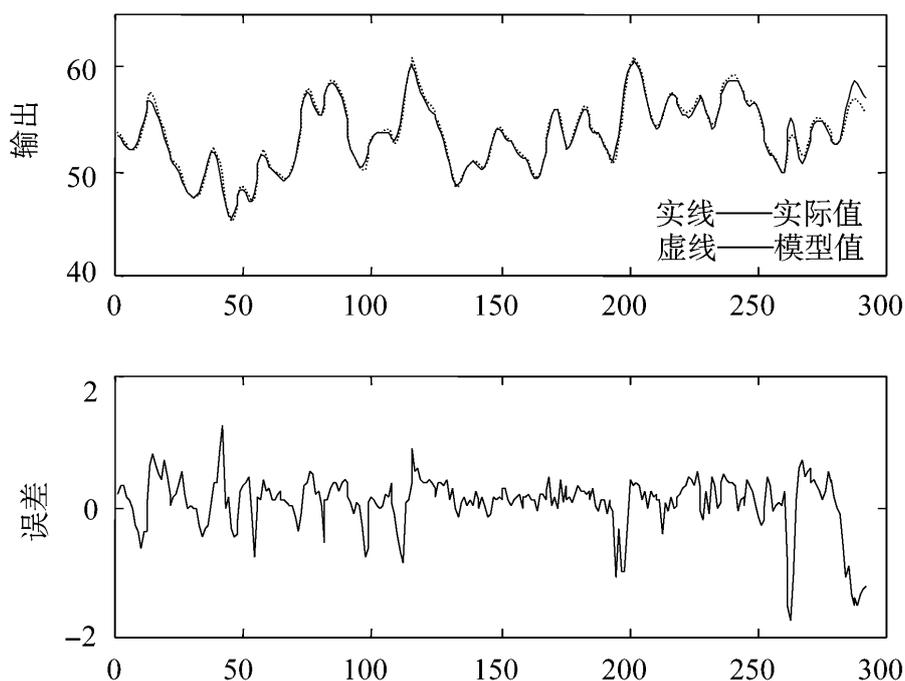


图 2.3 Box-Jenkins 煤气炉建模结果

表 2.1 Box-Jenkins 煤气炉辨识误差比较^[9]

模型	模型输入个数	规则数	均方根误差
Tong'77	2	19	0.684
Pedrycz'84	2	81	0.565
Xu'87	2	25	0.572
Peng'88	2	49	0.548
Sugeno'91	6	2	0.261
Sugeno'93	3	6	0.435
Wang'96	2	5	0.397
EST1/EST2/EST3	2	2	0.400/0.401/0.396
本节方法	2	2	0.426

2.4.2 pH 中和过程

pH 中和过程是具有严重非线性和滞后性的复杂工业过程,其建模与控制也是工业过程控制的难题之一。考虑一弱酸 HAC-强碱 NaOH 中和过程,采用上一时刻碱流量及 pH 作为模型输入,可用下式描述该过程: