好玩的数学
张景中主编

幻方及其他

——娱乐数学经典名题

（第二版）

吴鹤龄　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书分为两部分，第一部分是百变幻方——娱乐数学第一名题，对古今中外在幻方研究中的发现和成果有极为详细的介绍；第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜、数学金字塔、素数、完美数、自守数、累进可除数，以及“数学黑洞”现象、棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、梵塔、重排九宫等问题。题材广泛、内容有趣，能够启迪思想、开阔视野，培养读者分析和解决问题的能力。

本书适于高中及高中以上文化程度的读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

幻方及其他：娱乐数学经典名题/吴鹤龄编著 .—2 版 .—北京：科学出版社，2004

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 7-03-014282-9

Ⅰ.幻… Ⅱ.吴… Ⅲ.数学-普及读物 Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 088588 号

丛书策划：李 敏

责任编辑：李 敏 孔国平 / 责任校对：陈丽珠

责任印制：钱玉芬 / 整体设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 11 月第 一 版 开本：610×1000 1/16

2004 年 10 月第 二 版 印张：27 1/4

2006 年 4 月第四次印刷 字数：300 000

印数：17 001—21 000

定价：33.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

《好玩的数学》编委会

主　编　张景中

成　员　（按汉语拼音字母排序）

陈仁政　孙荣恒　谈祥柏　王树禾

吴鹤龄　易南轩　郁祖权

总　　序

2002 年 8 月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91 岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4 个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传”，不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一

些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的π，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第2个重要的常数，就是上面等式中左端出现的e，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为2.718281828459…。指数中用到的另一个数i，就是虚数单位，它的平方等于−1。谁能想到，这3个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的π》和《不可思议的e》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数i的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少1024－4＝1020个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a，b，c，d，e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4\ (x+4)/25$$
$$c=16\ (x+4)/125$$
$$d=64\ (x+4)/625$$
$$e=256\ (x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以（$x+4$）应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4)=3125k\ （k \text{ 取自然数}）$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《π 和 e》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi=3.1415926535897\cdots$，可得 $|355/113-\pi|<0.00000026677$，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，一定会有

$$|355/113-q/p|<2\times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p-113q|/113p<2\times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 355/113，所以 $|355p-113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p<2\times 0.00000026677$$

由此推出

$$p>1/(113\times 2\times 0.00000026677)>16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达•芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。从书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

张景中

2004 年 9 月 9 日

第二版修订本说明

趁着本书第四次重印的机会，我们对第二版作了较多的修订和补充。

第一部分的修订和补充主要有以下几处：

(1) 我们的祖先发明了世界上最早的幻方，历来都是依据《河图》、《洛书》的传说，加上《大戴礼记》中关于“二九四，七五三，六一八”这一九宫数字的记载，本书也不例外。我国数学史专家梁宗巨先生在其遗作《世界数学通史》中突破了这一框框。他根据1977年在安徽省阜阳县（现改为“阜阳市”）的两座西汉汝阴侯墓中出土的天文仪器“太乙九宫占盘”上的文字，认定其上有一个3阶幻方，从而不但使中国人发明了幻方成为有实物依据的确凿的史实，还使发明的年代比先前的估计提前了两个半世纪！这是幻方研究中一个十分重要而且意义深远的进展。因此我们加入了有关的内容。

(2) 对杨辉的“百子图”，过去很少有人重视。兰州交通大学的黄均迪先生向笔者指出，它其实蕴含着许多特点，富兰克林的神奇幻方很有可能是受杨辉百子图的启发而设计的。笔者赞赏黄均迪先生的发现和观点，增加的内容基本上是他的分析。

(3) 笔者在讨论杨辉的两个4阶幻方为什么一个被叫做“阳图”，另一个被叫做“阴图”时，提出了同

阶不同幻方有优劣、高低之分的观点，并通过分析认为阴图在匀称性和美观程度方面优于阳图。最近笔者发现了外国学者以美学观点讨论幻方的资料，虽然其角度和方法同笔者并不一样，但结论却十分相似，值得向读者作介绍。

(4) 在第六章中增加了一节“幻环”。对变形幻方，我们已经介绍了幻圆、幻星、幻矩形、魔蜂窝等较多品种，幻圆中有些其实也就是幻环，为什么还要增补它？原因很简单：2008 年北京将举办第 29 届奥林匹克运动会。在作为奥运标志的五环上玩一些数学游戏，显然是大家所欢迎的，也是我们宣传奥运、服务奥运的一种表示。

(5) 在对泛对角线幻方的讨论中，原先只简单地提到“所有单偶数阶幻方不可能是泛对角线幻方”，但没有给出证明。笔者后来了解到，如何证明它曾经困扰了我国几代幻方研究者，许多人为此付出了巨大的心血和精力，直到 21 世纪初才有人破解了这一“难题”，并将论文发表在某著名高校的学报上。实际上，这个问题早在 1919 年就由普朗克解决了，我国学者的证明方法和普朗克的方法是一样的。为了从这件事中吸取教训，今后避免出现类似现象，我们对此加入了必要的介绍。

(6) 在 5.4 节中增加了奇数阶乘幻方的一般构造方法，在 7.4 节中补充介绍了一个魔三角。

第二部分主要有以下修订和补充：

(1) 在第十二章讨论累进可除数问题时，对如何

判断数是否可被 7 整除，原书介绍了里昂斯提出的方法。不久前谈祥柏先生来信指出，这个方法是不可靠的，他给出了一个反例。笔者对自己疏于检验，引用了错误的资料深感内疚。为了免得谬种流传，我们删去了这个方法而代之以谈先生推荐的另一个方法。

(2) 在第二十章中，我们介绍了美国 20 世纪 80 年代发明的一个游戏，要求将 4 个滑块上的 4 个箭头由初始布局的离心状态改变为向心状态。书中给出了一组解法。笔者认为这些解有进一步优化的可能，因此悬赏征求新的解法。经过 2 年的等待，终于出现了 2 位年轻的游戏高手：浙江大学学生沈超峰和安徽黄山学院学生张杰分别以比书上的解少 12 步和 31 步的优秀成绩赢得了奖金。现在我们高兴地把他们的解法介绍给大家。

(3) 在第九章素数奇趣中增加 2 节：素数分布的有趣图案以及高斯素数和艾森斯坦素数。

(4) 在第十三章数的自同构现象中也增加 2 节：六边形自守数和同心六边形自守数以及“蛋糕”自守数。

(5) 在第二十一章中，介绍了外国学者新近提出的利用维恩图生成格雷码的新方法。

此外，在素数研究方面，近年来进展很大，不断有新的、更大的梅森素数、回文素数、孪生素数等被挖掘出来。我们都根据最新资料对相关内容进行了更新，以体现与时俱进的精神。

本书出版以来，受到广大读者的厚爱。笔者不断

收到来自全国各省市（包括宝岛台湾）、各年龄段的许多读者的来信，他们或与笔者交流心得、讨论问题、交换资料，或向笔者提出批评建议，这使笔者至深感荷。本次的许多修订和补充就是根据或参考读者的意见进行的。借着修订本出版的机会，笔者向所有关心、爱护本书的读者表示深深的谢意。

吴鹤龄
2006年年初

第二版说明

本书原名《好玩的数学——娱乐数学经典名题》，由科学出版社于2003年11月推出后，颇受读者欢迎，2004年被国家新闻出版总署列为向全国青少年推荐的100本优秀读物之一。此次科学出版社将本书列入《好玩的数学》丛书重新出版，并将书名改为《幻方及其他——娱乐数学经典名题》。借改版之机，笔者除对原书中少量粗心错误、排印错误作了改正之外，还增补了一些材料。现作几点说明：

(1) 原书前言中，有一段引言："在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。"笔者误把它写成是加拿大生理学家汉斯•赛耶说的，其实是大科学家爱因斯坦说的。这一张冠李戴的错误是由于笔者没有认真核实，因而以讹传讹。笔者当引为深刻的教训，并向读者致歉。

(2) 由于类似原因，笔者根据上海陆家嘴陆深墓中出土的玉挂幻方，断言："至少在16世纪，中国人已经会构造泛对角线幻方了"。其实，这个玉挂幻方同安西王府遗址中出土的铁板幻方相似，用的是古阿拉

伯数字，因此不能作为中国人在泛对角线幻方上的成就的证明。感谢兰州交通大学的黄均迪先生来信指出这一点（原书中的一些粗心错误、排印错误也是他发现的）。

（3）原书前言中说，对杨辉的两幅4阶幻方，“为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，历来没有人探讨过这个问题。”笔者后来发现，曾经三度与李约瑟合作编写《中国科学技术史》，李约瑟去世后出任剑桥李约瑟研究所所长的著名科技史专家何丙郁先生在“从科技史观点谈易数”一文（见《何丙郁中国科技史论集》，辽宁教育出版社，2001）中提到过这个问题，现照录如下：

“衍数图同时是一个魔方阵，纵、横、斜七个数字相加都是一百七十五。图后附有阴图，具有相似的特色，可能是由于右上角的数字从奇数改为偶数，故称阴图，符合易数中阴阳两仪的用义。易数图是由一至六十四，代表六十四卦的数字组成。这是一个魔方阵，纵、横、斜八子相加都得数二百六十。此图亦附有阴图，右上角的数字从奇数改为偶数。”

何先生文中的魔方阵就是幻方。由此可见，何先生已经注意到杨辉幻方有阴、阳两图，并发表了自己的看法。但从行文看，何先生对此问题并未给予充分重视，也未作深入讨论；根据右上角数字之奇、偶而定阳、阴图之说也经不起推敲，因为除杨辉的4、5、7、8阶幻方的阴阳图符合何先生指出的规律外，杨辉6阶幻方的阴、阳两图右上角都是偶数。但无论如何，

笔者原先“历来没有人探讨过这个问题”的论断显然是偏颇的，因此改版中作了相应修正。

笔者不是学数学、搞数学的，对数学研究的进展情况缺乏全面了解。因此在原书取材方面，对我国当今学者在幻方研究上的建树毫无反映。原书出版后，中国幻方研究者协会的许多会员给笔者寄来了他们的论著，其中有高难度的多重幻方、素数幻方，等等，使笔者大开眼界。改版中，我们把 12 阶三次幻方和 2 个巧妙的素数幻方介绍给大家。更多精彩的幻方，笔者推荐以下几部作品：

高治源，九宫图探秘，2004。

张道鑫，素数幻方，2003。

李抗强，趣味数学幻方，2002。

林正禄，开拓智力的奇方—幻方，2001。

以上几部专著都由香港天马图书有限公司正式出版发行，国家图书馆有收藏，幻方爱好者可以阅读。

吴鹤龄

2004 年秋初于北京

前　言

本书名曰《好玩的数学——娱乐数学经典名题》。也许不少读者在看到这个书名后会提出质疑：作为科学的数学怎么是供玩儿的，而且“好玩”呢？“娱乐数学”又从何说起，过去从来也没有听说过啊！对这些问题，我们长话短说，作一个简要的回答。

“好玩的数学”这个命名源于陈省身教授为2002年在北京举行的第24届国际数学家大会期间举办的“少年数学论坛”的题词“数学好玩”。陈省身教授是著名的华裔数学家，他因在整体微分几何学方面的出色成就而荣获“国际数学界的诺贝尔奖”的大奖——沃尔夫奖（1984年），是世界一流的大数学家。他说“数学好玩”，自然是不会有错的。笔者体会，之所以说“数学好玩”，恐怕主要有两个原因：一是数学中有许许多多奇特而有趣的现象，二是数学中有许许多多未解之谜。正是这些奇特而有趣的现象和未解之谜吸引着广大的人群，使他们成为数学的爱好者和探索者，其中一些人有所发现，有所发明，有所创造，成了专家、学者，推动了科学的发展和人类社会的进步。20世纪最伟大的科学家之一、诺贝尔奖获得者爱因斯坦曾经深刻地指出：“在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。

一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。”数学家斯坦因(Sherman K. Stein)在《数字的力量——揭示日常生活中数学的乐趣和威力》(吉林人民出版社，2000)中也写道：“按照一条老的拉丁格言，‘需要为发明之母’，但是，‘好奇为发明之母’同样也是对的。”他举了一个例子：19世纪初法拉第探索电与磁，就不是因为需要，而是出于对宇宙本质的好奇心。当有人问法拉第，你研究这些有什么用时，他反问道：“一个新生婴儿有什么用？”有这样一种说法：一些重大的科学发现和发明创造是“玩”出来的。这听起来似乎令人难以置信，却是事实。因此，说“数学好玩”，不是对数学的贬低，也不是否认数学的高度抽象性和极大困难性，而只是突出其引人入胜的另一面，旨在激发人们的兴趣，热爱它，研究它，到神秘的数学王国中去遨游、去探索。

既然“数学好玩”，数学中好玩的那些内容被称之为“娱乐数学”也就顺理成章了。娱乐数学在英文中叫做 Recreational Mathematics，或者叫 Entertainment in Mathematics。据哥伦比亚大学专门从事数学教育研究的威廉·夏夫博士（William Leonard Schaaf）考证，娱乐数学已有2000多年的历史，在阿基米德时代就已经有了，到11世纪已有娱乐数学的专著出版。他在20世纪50年代编了一本《娱乐数学文献指南》

(Recreational Mathematics: A Guide to the Literatures, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1958)，收录的娱乐数学重要文献有5000多种，后来他又编了一套《娱乐数学书目》(A Bibliography of Recreational Mathematics)，由美国数学会出版，有3卷之多。著名的科普杂志《科学美国人》(Scientific American)在20世纪下半叶由著名的娱乐数学专家马丁•加德纳（Martin Gardner）办了一个“数学游戏”(Mathematical Games)专栏，大受读者欢迎，持续了近30年。到80年代中期，一则因加德纳退休，二则因个人电脑的兴起，这个专栏被改为“计算机娱乐”(Computer Recreation)专栏，但不久就又改为“数学娱乐”(Mathematical Recreation)专栏。现在,《科学美国人》每期都有这个栏目，是这个杂志最受读者欢迎的“保留栏目”。

在我国，也已出版了不少“趣味数学”、“数学游戏”这类专著和读物，娱乐数学的一些世界名著也被译成中文介绍给我国读者。但是由于种种原因，数学的这块园地在我国始终没有和“娱乐”这个词直接挂起钩来，因此，在我国读者中就没有“娱乐数学”这个概念。就笔者所见，只有亨特（J.A.H.Hunter）的名著《Mathematical Diversions》的中译本被冠以《数学娱乐问题》的书名出版，大概见过此书的读者不多。笔者认为，现在该是娱乐数学“闪亮登场”的时候了。如同劳动和受教育是每个公民的权利一样，休息和娱乐也是公民的基本权利，而娱乐的形式是多种多样的。

通过“玩数学”达到娱乐的目的，同时又提高了科学素养，增长了知识，真是两全其美，何乐而不为，有什么理由不大力提倡呢？

本书分两部分。第一部分介绍百变幻方——娱乐数学第一名题。幻方是几千年前中国人首先发现的，后来传到世界各地，引起广泛兴趣。幻方是简单得人人可以理解的数学现象，但是它又蕴含着许多至今无人能够回答的问题，包括利用强大的计算机目前仍然解决不了的问题，因而自然成了娱乐数学中最受人关注的一个课题。本书对古今中外在幻方研究中的成果和发现有详尽的介绍，仅幻方构造法就列举了10多种，既包括传统的连续摆数法、阶梯法、对角线法、镶边法等，又有近代数学家最近才开发出来的LUX法、相乘法等，对于绝大多数读者来说都是耳目一新的。美国建国前后的大政治家、大发明家本杰明•富兰克林推出了许多神奇的幻方、幻圆，其中的8轮幻圆（他自己称之为“magic circle of circles”）中，又含有4组偏心的同心圆。百多年来的中外文献中，对这4组偏心的同心圆在8轮幻圆中到底起什么作用，都没有明确的说明。笔者经过反复查证，终于在200多年前出版的一部科学辞典中找到了答案，首次给读者提供了准确的解释。南宋的杨辉是世界上系统研究幻方的第一人。他给出的4阶至8阶幻方各有阴、阳两图。同为4阶幻方，为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，几乎没有人认真探讨过这个问题。笔者注意到这个问题，并进行了初步的探讨，认为幻

方是有优劣、高低之分的，并提出了判别的依据，由此给出了对杨辉 4 阶幻方阴、阳两图的一种可能解释。笔者不敢断言自己的观点和方法一定是正确的，只希望这一讨论能成为引玉之砖，把对有关问题的研究引向深入。

本书第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜（也就是算式复原，诸如冷战时期出现的 USA＋USSR＝PEACE）、数学金字塔、素数、NIM 游戏，还有数论中的完美数、自守数、累进可除数、用尽 1～9表示任意整数，以及所谓“数学黑洞”和棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、约瑟夫斯问题（也就是幸存者问题）、重排九宫、梵塔等，内容十分广泛，问题十分有趣。笔者在充分发掘娱乐数学的历史遗产的同时，又十分重视当今的科技进步，用最新材料充实了经典名题的内涵。例如，素数是一个十分古老的课题，本书有两章是涉及素数的，其中不乏经典的问题，如梅森素数。本书在介绍梅森素数部分，笔触从 16 世纪的大数学家梅森一直伸展到本世纪初的网民志愿者组织 GIMPS（全球因特网梅森素数大寻找），全景式地向读者展现了历代数学家和数学爱好者在挖掘最大素数方面的历程，全面介绍了从手工计算到计算机计算，从巨型机计算到网络计算至今所获得的全部 42 个梅森素数，比较充分地反映了在计算机技术尤其是网络技术飞速发展、网络应用日益普及的情况下，有关娱乐数学研究所呈现出的日新月异的景象。

本书是在笔者近 10 年来所写作的数学小品的基础

上，经过重新整理、修订和增补而成的。这些数学小品有些在《知识就是力量》等刊物上公开发表过；有些虽然没有发表过，但在笔者任教的北京理工大学科协所组织的科普讲座上向大学生们演讲过。笔者不是数学工作者，笔者从事的专业是计算机，涉足娱乐数学这一领域一是出于个人爱好，二是出于专业教学的需要，因为笔者发现，用娱乐数学中的有趣问题作程序设计的例题与习题，可以大大激发学生的学习热情与积极性。但由于不是本行，书中难免有错误、疏漏或“说外行话”之处，恳请专家和读者批评、指正。此外，本书引用了大量中外文的书刊和网上资料，多数注明了出处，但因为本书毕竟不是学术专著而是科普作品，因此笔者没有刻意追求逐一注明材料来源，这是需要说明的。

吴鹤龄
2003年初春于北京

目　录