

计算流体力学基本原理

吴子牛 编著

科学出版社

2001

内 容 简 介

《计算流体力学基本原理》把计算流体力学作为一门独立的学科进行介绍.它涉及计算流体力学较为规范的内容,包括流体力学的基本原理、流体力学基本方程的计算形式与配套模型、方程的基本理论、构造计算方法的基本原则、计算方法的分析理论和一些实用化计算技术.

本书可供从事计算流体力学的科研、技术人员参考,也可以作为流体力学专业和应用数学专业研究生和本科生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学基本原理/吴子牛编著. -北京:科学出版社,2001

ISBN 7-03-008128-5

I.计… II.吴… III.计算流体力学 IV.035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 61451 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2001 年 2 月第一次印刷 印张:18 1/2

印数:1—2 800 字数:416 000

定价:35.00 元

前 言

计算流体力学(简称 CFD,来源于英文的 Computational Fluid Dynamics)作为一门独立的学科在近三十年成为流体力学与应用数学的热门研究内容.计算流体力学的发展促使人们去重新书写流体力学基本方程和构造物理模型、重新了解基本方程的性质、重新理解传统差分的局限、重新研究一整套研究稳定性、收敛性、唯一性的理论.计算流体力学有属于它的基本理论、基本方法、基本逻辑和它独特的应用范围,因而属于一门独立的学科.计算流体力学的发展不但为流体力学研究提供了一种手段,而且带动了应用数学的发展和促进了计算机的发展.

本书介绍计算流体力学最基本的原理.本书与一般计算流体力学书籍相比,并不深入介绍具体的计算方法,而是试图把计算流体力学作为一门相对独立的学科来论述,内容包括如下几乎具有同等重要性的六个方面:

一、流体力学基本原理.流体力学基本原理自然是计算流体力学的基础.流体力学本身包含了丰富的知识,但这里介绍的基本原理只涉及流体运动学基础、动力学方程和方程的特殊形式.流体力学基本原理将在第一章中介绍,主要强调流体力学基本方程是如何构造的,如何推导它们的一些特殊形式和在不同坐标系中的形式.即使对具有一定流体力学基础的读者也建议不要越过这一章,因为本章内容的取舍考虑了计算流体力学的需要.虽然许多知识尤其是运动学基础是一般读者非常熟悉的,但也包含了一些读者不一定熟悉的内容,如非惯性坐标系下能量方程的推导.本章所强调的分析思维有助于读者阅读本书其他部分的内容.另外,本书绝大多数章目都有边界条件(包括内边界条件)的讨论,了解不同部分给定边界条件的方式能帮助正确理解如何处理边界条件.

二、流体力学基本方程的计算形式和模型化处理.在连续介质力学范畴下,流体力学基本方程为纳维-斯托克斯方程(Navier - Stokes 方程,简称 N-S 方程),在理想流体假设下为欧拉方程(Euler 方程).基本方程有多种形式,但必须写成一些特殊形式(计算形式)才便于用标准的计算方法求解.另外一般流体力学问题包含有由小到大的多种尺度,而一般计算只考虑某种宏观尺度.为了只计算宏观尺度并考虑其他尺度的部分影响,必须进行模型化处理.流体力学基本方程的计算形式和模型化处理将在第二章介绍,主要强调 N - S 方程和欧拉方程的几种计算形式及其由来(包括所有的雅可比矩阵的计算及其对角化处理),和具有典型多尺度效用的湍流和两相流问题的模拟原理、特征多尺度问题的统一计算方法、方程的无量纲化处理.模型化处理是计算流体力学的一部分特殊的而且十分重要的内容,在本书中以适当篇幅介绍,目的是体现计算流体力学基本原理的完整性.

三、基本方程的性质.N - S 方程作为数学上的偏微分方程具有许多特殊性质,数学研究还很不完善,数学上甚至很难证明 N - S 方程是否有解.解的存在性、唯一性与稳定性

是偏微分方程理论中的基本问题,即所谓的适定性问题. $N-S$ 方程很特别,属于一种混合型方程,不同分量方程的性质不一样;对于不同流动条件,方程的性质又不一样,但在理想流假设下 $N-S$ 方程即欧拉方程的基本性质决定了计算流体力学的地位. 欧拉方程的处理是计算流体力学的关键. 欧拉方程在数学上属于双曲守恒方程,包含了丰富的数学内容,如适定性、特征理论、弱解理论、熵条件等. 这些内容的研究构成了计算流体力学方法研究的基础,将在第三章中介绍.

四、构造计算方法的基本原理. $N-S$ 方程属于非线性偏微分方程组,在一般情况下是无法求解析解的,因此必须用计算机求解. 计算机只能进行大量的加减乘除等简单代数运算,计算机的这种运算速度是人的运算速度无法比拟的. 通过用差分或其他办法把非线性偏微分方程转化为只包含简单加减乘除等运算的代数方程组,编成程序后让计算机去按规定顺序重复地不厌其烦地完成这些代数运算,便是构造计算方法的目的所在. 但流体力学方程的计算包含了一系列特殊问题,如果把计算方法中介绍的简单差分直接用于将方程离散,那么所获得的数值方法或格式并不一定能计算流动问题. 流体力学基本方程必须用基于方程基本性质所构造的特殊方法才能求解,而且不同问题的求解对算法又有不同要求. 第四章将介绍构造计算方法的基本原理,包括有限差分方法、非线性守恒系统的计算方法、边界处理的基本原理和时间积分方法.

五、计算方法的分析理论. 随意构造的计算方法不一定能直接使用. 计算方法必须满足一些特性才能使用,这些特性包括稳定性、精度、收敛性、守恒性等. 第五章将介绍这些特性的分析理论. 掌握这些分析理论有助于读者正确使用具体的计算方法,也可以帮助构造新的计算方法. 本章介绍的分析理论包含了一般计算流体力学书籍不存在的内容,如边界处理的稳定性理论、收敛性理论、解的唯一性理论、守恒性理论、分区内边界处理的分析方法等.

六、实用化基础. 虽然本书强调的是计算流体力学基本原理,目的不是让读者了解一些能立即用于解决实际问题的具体方法,但作为结尾介绍一些实用化基础是必要的. 第六章将介绍一些实用化基础,包括网格系统的一些基本概念、将数值方法推广到高维问题的基本方法、高维问题边界处理方法、并行计算的一些概念和实际计算的一些经验. 这些经验是作者的一些个人经验,只供参考.

本书对计算流体力学的一些特殊方法(如拉格朗日方法、有限元方法、谱方法、玻尔兹曼方法、格子气方法等)并不介绍,原因是这些特殊方法太多强调数学味道,或者还没有达到实用的程度.

在计算流体力学方法研究中,主要存在两种思路. 一种是应用数学家针对空气动力学问题发展的可压缩流动计算方法,另一种是物理学家针对传热问题发展的不可压缩流动计算方法. 通过某种特殊处理,两种思路都试图将方法推广到另一种思路所侧重的问题. 本书只介绍第一种思路及第一种思路所涉及的问题.

本书尽量避免过于深奥的内容和手册式的介绍,尤其是本书中计算方法的介绍基本只占篇幅的六分之一. 熟悉湍流模拟的读者一定会觉得,第二章中有关湍流模拟的介绍过于简单. 为了强调整体内容的协调性,我们不得不将许多重要内容放弃或者淡化. 实际上本书中任何一章甚至一小节的内容都可能在专著中介绍. 以有限的篇幅尽量协调和连贯

地介绍计算流体力学部分最核心的内容,正是作者编写本书的目的所在.

由于作者水平有限和时间仓促,书中不可避免地存在一些失误和不足的地方,希望读者批评指正.

作 者

2000年3月于清华园

本书主要符号

t 时间

\mathbf{x} 空间坐标

x, y, z 或 x_1, x_2, x_3 空间坐标的三个分量

\mathbf{V} 速度矢量

u, v, w 或 V_1, V_2, V_3 或 V_x, V_y, V_z 速度的三个分量

\mathbf{S} 应变率张量

\mathbf{P} 应力张量

ρ 密度

p 压力

T 温度

e 内能

E 总能

H 总焓

S 熵

a 音速

Ω 有限体积

Σ 有限体积的边界

\mathbf{V}_Σ 有限体积边界的移动速度

$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 表面单位法向矢量

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 笛卡儿坐标系的三个基矢量

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 柱坐标系的三个基矢量

$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x, \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y, \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right]$ 梯度算子

k, h, σ 时间步长, 空间步长, 时间步长与空间步长的比

\mathbf{R} 实数集

\mathbf{C} 复数集

\mathbf{R}^+ 正实数集

\mathbf{R}^- 负实数集

\mathcal{C}^p 具有直至 p 阶连续偏导数的紧支集

ι 虚数单位 ($\iota = \sqrt{-1}$)

目 录

第一章 流体力学基本原理	1
1.1 流体运动学基础	1
1.1.1 描述流体运动的基本方法	1
1.1.2 流场结构的几何描述	2
1.1.3 质点加速度、质点导数	3
1.1.4 流体微团运动分析	5
1.1.5 散度与旋度、速度位与流函数	8
1.1.6 旋涡运动学	11
1.2 流体动力学基本方程	13
1.2.1 应力张量的本构方程	13
1.2.2 流体动力学的积分型方程	21
1.2.3 流体动力学的微分型方程	26
1.2.4 微分方程的封闭性讨论	30
1.3 N-S 方程的特殊形式	35
1.3.1 动量方程的其他形式与应用	35
1.3.2 能量方程的其他形式——内能方程、温度方程、焓方程与熵方程	42
1.3.3 非惯性坐标系中的方程	44
1.3.4 直角坐标系和柱坐标系中微分方程的分量形式	48
参考文献	50
第二章 流体力学方程的计算形式与封闭模型	52
2.1 欧拉方程与 N-S 方程的计算形式	52
2.1.1 物理坐标系下的 N-S 方程	52
2.1.2 计算坐标系下的方程	55
2.1.3 N-S 方程的展开形式	57
2.1.4 方程的基本变量形式与对角化	62
2.2 多尺度问题方程的封闭与模型化处理	67
2.2.1 多尺度问题的特征	67
2.2.2 结构多尺度问题;湍流模拟	69
2.2.3 相位多尺度问题;多相流运动模拟	77
2.2.4 特征多尺度问题;高低速问题统一处理	83
2.2.5 影响多尺度问题;无量纲化处理	87

参考文献	89
第三章 流体力学方程的基本理论	91
3.1 非线性守恒系统与欧拉方程	91
3.2 双曲性与适定性	96
3.2.1 双曲性	96
3.2.2 适定性	97
3.3 特征线与黎曼不变量	100
3.3.1 特征矢量与矩阵的对角化	100
3.3.2 特征线与古典黎曼不变量	101
3.3.3 Lax 黎曼不变量,简单波	103
3.4 弱解与黎曼问题	104
3.4.1 伯格斯的弱解	104
3.4.2 一般系统弱解的定义	107
3.4.3 黎曼问题	108
3.5 熵条件	112
3.6 边界条件	114
3.6.1 构造边界条件的基本原则	114
3.6.2 欧拉方程的边界条件	117
3.7 高维问题	118
附录 A 几个基本定义	120
附录 B 总结性习题及其解答	121
B.1 问题	121
B.2 解题要领	122
B.3 解答	123
参考文献	126
第四章 构造计算方法的基本原理	128
4.1 基本概念	128
4.2 有限差分法	130
4.2.1 有限差分的定义	130
4.2.2 差分构造的一般方法	131
4.2.3 运输方程的简单差分格式	136
4.2.4 高阶微分的差分	137
4.3 非线性守恒系统的数值方法	139
4.3.1 守恒格式及几种表现形式	139
4.3.2 中心格式	141
4.3.3 迎风格式	144
4.3.4 高分辨率格式基本思想	149
4.4 边界条件	155

4.4.1 外边界处理	155
4.4.2 分区内边界条件	158
4.5 时间积分	163
4.5.1 时空独立处理法	163
4.5.2 泰勒展开法	167
4.5.3 混合方法	168
4.5.4 源项处理	171
附录 简单数值试验问题.....	173
参考文献.....	175
第五章 计算方法的分析理论.....	177
5.1 计算方法的基本特性:相容性、稳定性与收敛性	177
5.1.1 基本概念	177
5.1.2 相容性	178
5.1.3 稳定性	178
5.1.4 收敛性	179
5.1.5 等价性定理	180
5.2 稳定性理论	180
5.2.1 柯西问题的稳定性理论	180
5.2.2 混合初边值问题的稳定性理论	185
5.3 误差分析	191
5.3.1 傅里叶分析	191
5.3.2 当地误差与整体误差	193
5.4 守恒理论	197
5.4.1 守恒格式	197
5.4.2 守恒处理的重要性.....	198
5.4.3 守恒格式的其他形式	199
5.4.4 守恒格式的特性	200
5.5 定常解	203
5.5.1 收敛到定常解的速度	203
5.5.2 定常解的唯一性	206
5.6 分区计算的理论分析	206
5.6.1 分析方法	207
5.6.2 覆盖分区两类处理的稳定性分析	208
5.6.3 趣味理论分析一:覆盖分区计算守恒问题	211
5.6.4 趣味理论分析二:覆盖分区计算稳定性、收敛性与解的唯一性	213
参考文献.....	216
第六章 实用化基础.....	218
6.1 网格系统	218

6.1.1	物理坐标系中的网格	218
6.1.2	分区结构网格	220
6.2	高维问题计算方法	222
6.2.1	有限差分定义	223
6.2.2	有限差分法	223
6.2.3	有限体积法	227
6.2.4	高维问题时间积分	232
6.2.5	N-S方程的几种具体格式	235
6.2.6	条件化预处理方程的离散	242
6.3	高维问题初始条件与边界处理	243
6.3.1	初始条件与边界条件	243
6.3.2	远场边界条件	244
6.3.3	固体壁面边界条件	247
6.3.4	其他边界条件	249
6.3.5	条件化预处理特征边界条件	250
6.3.6	边界条件的隐式化处理	251
6.3.7	分区计算的耦合条件	252
6.4	并行计算	256
6.4.1	并行计算机结构	256
6.4.2	并行计算机编程	257
6.4.3	并行性能参数	258
6.4.4	分区并行处理	260
6.5	实际计算的某些经验	264
6.5.1	定常问题收敛剖析	265
6.5.2	计算不稳定的表现形式、诊断与解决方法	266
6.5.3	结果可靠的必然因素与偶然因素,物理涡与数值涡	267
	附录 计算流体力学的作用与地位	268
	参考文献	270
	索引	272
	编后语	280

第一章 流体力学基本原理

流体力学基本原理是计算流体力学的基础.这里简要介绍连续介质力学假设下流体力学最基本的原理,包括流体运动学基础、流体动力学基础和基本方程的一些特殊形式.内容的取舍和安排部分地考虑了计算流体力学的需要.

1.1 流体运动学基础

1.1.1 描述流体运动的基本方法

在连续介质力学假设前提下,流体力学描述流体微团集合的运动状态.流体微团属于充满流体介质的空间中的微观上足够大(远远大于分子运动平均自由程)而宏观上足够小(远远小于所感兴趣的流体运动空间尺度)的一团流体.在宏观上把流体微团看成一个质点.有了流体微团这一定性认识后,在实用中不必再去关心微团有多大.

描述流体运动的方法有两种:欧拉方法(E),拉格朗日方法(L).有时也会看到所谓的欧拉-拉格朗日混合方法.这些方法主要描述流体微团集合的运动状态,即流动参数 ϕ 的变化.流动参数包括运动特征量(如流体微团的速度 \mathbf{V})和热力学状态特征量即物性参数(如流体微团的压力 p ,密度 ρ ,温度 T).流动参数的变化是针对时间 t 甚至空间(坐标为 \mathbf{x})的变化.相应地,流动参数称为未知数或因变量,而时间甚至空间坐标称为自变量(空间坐标是否为自变量取决于是否采用欧拉描述法).

欧拉方法 在任意指定时刻,描述流动参数的空间分布.以时空坐标 (\mathbf{x}, t) 为自变量,将流动参数(主要有速度、密度、压力和温度以及它们的组合)表示为时空坐标的函数(流动参数分布;也称参数场,如速度场和温度场)

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) = \phi_E(\mathbf{x}, t).$$

拉格朗日方法 从某时刻开始跟踪每一流体质点,记录对应质点流动参数的变化.以初始时刻坐标 \mathbf{A} 和时间 t 为自变量,将流动参数(主要有质点位移 \mathbf{x} 、密度、压力和温度等)表示为

$$\phi = \phi(\mathbf{A}, t) = \phi_L(\mathbf{A}, t).$$

质点位移函数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ (质点轨迹)也是因变量,它与初始坐标 \mathbf{A} 成一一对应关系,即:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A}, \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \end{cases}$$

两种方法可以按下面方式进行转换:

$$\begin{aligned} \text{L-E 变换} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t) &\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \\ \phi &= \phi_L(\mathbf{A}, t) = \phi_L[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] = \phi_E(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{V} &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{A}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_L(\mathbf{A}, t) = \mathbf{V}_L[\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t). \\ \text{E-L 变换} \quad \mathbf{V} &= \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right]_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(\mathbf{A}, 0) = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{A}, t), \\ \phi &= \phi_E(\mathbf{x}, t) = \phi_E[\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t] = \phi_L(\mathbf{A}, t). \end{aligned}$$

欧拉描述法中的流动参数如果与时间无关,即 $\phi = \phi(\mathbf{x})$,那么相应的流动称为定常流动,否则称为非定常流动.一般很难存在严格意义上的定常流动.但如果流动参数随时间的变化与所关心的平均值相比小得可以忽略不计,而且这种变化引起的宏观效应可以忽略不计,则一般可以按定常流动处理.实际的定常流动或计算出的定常流动往往是由非定常流动经过一段时间的变化过渡来的.如果采用拉格朗日法,则区别定常与非定常流动不那么直观^①.

如果流动参数只与坐标的一个(如 x)、两个(如 x, y)、或三个分量有关,则相应的流动称为一维、二维或三维流动.以后会看到,二维流动中还有所谓的平面二维流动和轴对称二维流动.这种分类属于物理分类,还有工程或数学上的人为分类(主要是为了处理方便),读者阅读某些流体力学书籍时会遇到零维流动、准一维流动等概念.还有一种特殊方法,将时间、几何空间、参数空间(包括速度、温度、密度,等等)看成统一的自变量即统一空间来研究流体质点在统一空间某点出现的概率.统一空间(也称为状态空间)的维数可能超过十维.这种描述方法称为 PDF 方法.

1.1.2 流场结构的几何描述

流线为固定时刻空间曲线(速度场矢量线),曲线上任意点的切向矢量与当地的速度矢量重合,属于欧拉场描述法.取 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_E$ (速度为欧拉场速度),确定参数形式的流线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ 的方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \mathbf{V} &= 0 \quad (\text{基本定义}), \\ \frac{dx_1}{V_1} &= \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3} = ds \quad (\text{等价形式 1}), \\ \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \mathbf{V} \quad (\text{等价形式 2}). \end{aligned}$$

流线具有如下性质:

^① 可以证明,对于拉格朗日法,定常流动条件可以表示为:

$$\frac{\partial \phi_L}{\partial t} - \frac{\partial \phi_L}{\partial \mathbf{A}} \left[\frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial \mathbf{A}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{x}_L}{\partial t} = 0.$$

1) 除奇点 ($\mathbf{V}=0, \mathbf{V}=\infty$) 外, 同一时刻流场中的不同流线不相交 (因空间每点只有一个速度方向, 所以除奇点 (速度为 0 点, 速度为 ∞) 外, 流线不会以有限角相交, 但可以相切);

2) 对于非定常流动, 不同时刻通过同一点的流线可以不重合;

3) 对于定常流动和直线流动, 不同时刻通过同一点的流线重合.

流面为某时刻过给定曲线 (非流线) 上每点做流线组成的面, 从而在流面上 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, 这里 \mathbf{n} 为曲面的单位法向矢量.

流管为某时刻过给定闭曲线 (非流线) 上每点做流线组成的管状面, 从而在流管壁上 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$. 根据物质不生不灭原理, 流管不能在流体中间中断, 否则流体在中断处不见了. 流管是由流线组成的, 因流管不能中断, 所以流线也不能在流体中断. 流管和流线或形成闭环、或终止于边界、或终止于奇点.

将反映主要流动特征的流线画出得流线谱 (画出所有过奇点的流线, 画出与过奇点流线渐近的流线, 画出边界线). 流线谱用于显示流动规律, 已经存在可以画流线谱的标准软件.

迹线为给定流体质点的运动轨迹, 方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_L(\mathbf{A}, t) \quad (\text{拉格朗日法}),$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right]_A = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t) \quad (\text{欧拉法}).$$

流线和迹线的区别在于:

1) 流线是由同一时刻、不同质点连起来的速度矢量场即为瞬间速度场状态; 迹线是同一质点在不同时刻的位移曲线 (即指定质点的运动过程). 因此对于非定常流场流线迹线一般不重合, 除非所有质点的流动都沿一个方向.

2) 对于定常流场, 通过同一点的流线不随时间变化, 且任意时刻通过同一空间点的迹线与流线重合. 这是因为, 两条线的切线都与当地速度方向一致, 对于定常问题流线不随时间变化. 因任意点只有一个速度方向, 所以经过同一点的迹线与流线不可能在某点分开, 否则在分开点出现两个速度方向. 也可以从定常流动时确定它们的方程的等价性看出:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(s=0) = \mathbf{A} \quad \text{流线},$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right]_A = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{A} \quad \text{迹线}.$$

1.1.3 质点加速度、质点导数

考虑时刻 t 处于坐标 \mathbf{x} 的流体质点. 对应欧拉描述法该流体质点速度为 $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. 在时刻 $t + \delta t$, 该流体质点运动到 $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{V} \delta t$. 在时刻 $t + \delta t$ 处于坐标 $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ 的流体质点的速度为 $\mathbf{V}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) = \mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{V} \delta t, t + \delta t)$. 所以, 质点加速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{V}\delta t, t + \delta t) - \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \right] \\ &= \mathbf{V}_t + V_j \mathbf{V}_{x_j}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

即

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

这里 \mathbf{V}_t 为当地加速度, 由流场的非定常效应产生; $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = V_s \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}$ 为迁移加速度, 沿流场速度方向 ($s = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$), 由速度场的空间非均匀性产生.

对于拉格朗日方法, 质点加速度按下式计算:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \right]_A (\mathbf{x} = \mathbf{x}_L(\mathbf{A}, t)).$$

利用上式和 $\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right]_A = \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t)$ 将质点位移导数转换为欧拉描述法中的速度, 即

$$\mathbf{a} = \left[\frac{\partial \mathbf{V}_E(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right]_A = \left[\frac{\partial \mathbf{V}_E(\mathbf{x}(\mathbf{A}, t), t)}{\partial t} \right]_A,$$

则同样可以得到方程(1.1).

质点携带的物理量随时间的变化率称为质点导数(有时称物质导数或随体导数). 这一定义的特殊性在于, 我们按拉格朗日方法来定义变化率, 但又要使用欧拉方法中的变量. 质点导数与前面加速度的定义(1.1)完全类似. 加速度属于速度的质点导数. 按质点加速度同样的定义方式, 得某物理量 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 的质点导数的数学定义

$$\begin{aligned} \frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, \delta \mathbf{x} \rightarrow 0, \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t} = \mathbf{V}} \left[\frac{\phi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \right] \\ &= \phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi \end{aligned}$$

因此, 质点导数 $\frac{D\phi(\mathbf{x}, t)}{Dt}$ 等于局部导数 $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 与对流导数 $\mathbf{V} \cdot \nabla \phi$ 的和. 习惯上, 我们说局部导数是由流动的非定常变化引起的效应, 对流导数是通过对流(即流动)把周围流动参数的不同值给带过来引起的效应. 或者说, 流体质点所携带的物理量随时间的变化, 如果以欧拉方法来衡量, 来源于流动参数本身的非定常性和空间分布的非均匀性. 因此流动参数不变可以有多种解释.

例如, 不可压缩流体指的是密度的质点导数处处为零即质点的密度不随时间变化. 但密度的质点导数为零并不意味密度不随时间变化或者密度不随空间坐标变化. 例如, 考虑密度沿垂直方向(z)均匀变化的不可压缩液体, 即密度分布为 $\rho = \rho(z)$. 现在让这种液体以恒速度 w 上升. 现在考虑固定空间点 z 密度的变化, 在任意时刻 t , 固定空间点流体质点显然来自初始时刻处于 $z_0 = z - wt$ 的流体质点. 因此, 在时刻 t , 位于空间点 z 的流体质点的密度为 $\rho(z - wt)$. 虽然任意流体质点是不可压缩的即 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho'(z - wt)(-w + w) = 0$, 但在任意点密度是随时间变化的, 而且空间分布也不均匀.

1.1.4 流体微团运动分析

用泰勒展开,并保留低阶项,得距离为 $\delta \mathbf{x}$ 的相邻两流体质点的速度差所满足的关系式

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{V} &= \nabla \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t) \cdot \delta \mathbf{x} \\ &= \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{x}. \end{aligned}$$

这里, $\nabla \mathbf{V}$ 为速度梯度张量($\nabla \mathbf{V}^t$ 为 $\nabla \mathbf{V}$ 的转置),它可以分解为如下的对称张量和反对称张量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t) = (s_{ij}), \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t) = (a_{ij}).$$

进一步有

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right], \\ s_{ij} &= s'_{ij} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij}, \\ s'_{ij} &= s_{ij} - \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij}, \\ a_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right], \end{aligned}$$

因此

$$\delta V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta x_j + s'_{ij} \delta x_j + a_{ij} \delta x_j. \quad (1.2)$$

可以证明, $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \delta x_j$ 表示各向同性的体积膨胀率即线变形率; $s'_{ij} \delta x_j$ 表示体积不变的纯变形率即角变形率; $a_{ij} \delta x_j$ 表示旋转运动(准刚体运动).因此,一点邻域内的相对运动可以分解为各向同性的体积膨胀运动(拉伸运动)、体积不变的纯变形运动和旋转运动(准刚体运动).称 \mathbf{S} 应变率张量(包含线变形与角变形), \mathbf{A} 为旋转张量.

针对二维问题,用几何方法对上面的速度分解进行进一步说明.

考虑矩形流体微团,顶点按逆时针顺序分别为 A, B, C, D, 矩形的边长为 $\delta x, \delta y$, 设 A 点的速度分量为 u, v . 于是忽略高阶项后各点的速度分量为(图 1.1)

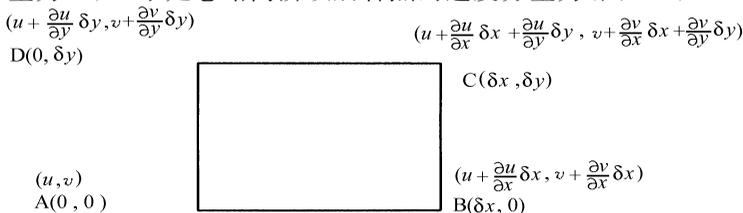


图 1.1 初始时刻的矩形及角点速度值

$$\begin{aligned}
 \text{A: } & u, & v; \\
 \text{B: } & u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, & v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \\
 \text{C: } & u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, & v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y; \\
 \text{D: } & u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, & v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y.
 \end{aligned}$$

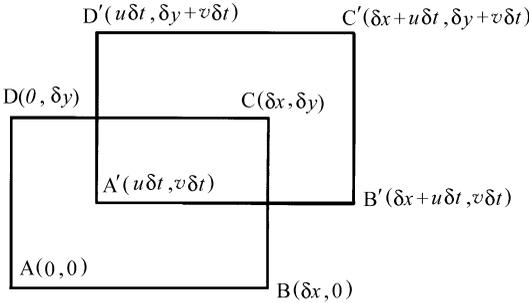


图 1.2 矩形的平动

平动既不改变矩形的大小,也不改变矩形的形状.

拉伸运动或线变形(图 1.3)

$$\begin{aligned}
 \text{A: } & 0, & 0; \\
 \text{B: } & \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, & 0; \\
 \text{C: } & \frac{\partial u}{\partial x} \delta x, & \frac{\partial v}{\partial y} \delta y; \\
 \text{D: } & 0, & \frac{\partial v}{\partial y} \delta y.
 \end{aligned}$$

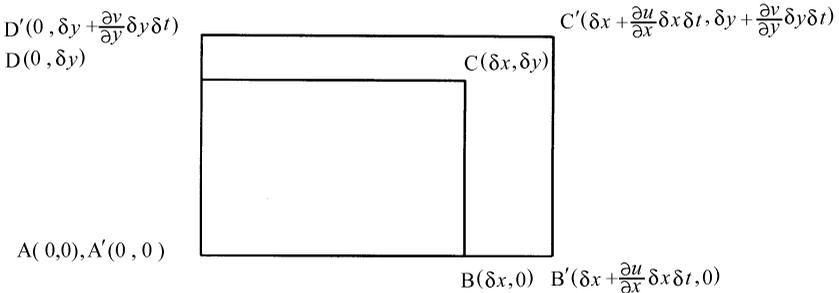


图 1.3 矩形的拉伸运动

拉伸运动虽不改变矩形的形状,但改变矩形的大小.在初始时刻矩形的面积为 $S = \delta x \delta y$.在时刻 δt ,矩形的面积为 $S + \delta S = \left[\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta t \right] \left[\delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y \delta t \right]$.

于是,面积的变化率为 $\frac{\delta S}{S \delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$.

因上述速度的各部分之间只是一种线性叠加,所以可以进行分解.最简单、最符合逻辑的分解如下:

平动(图 1.2)

$$\begin{aligned}
 \text{A: } & u, v; \\
 \text{B: } & u, v; \\
 \text{C: } & u, v; \\
 \text{D: } & u, v.
 \end{aligned}$$

旋转运动(图 1.4)

$$\begin{aligned} A: & 0, \quad 0; \\ B: & 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \\ C: & \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \delta x; \\ D: & \frac{\partial u}{\partial y} \delta y, \quad 0. \end{aligned}$$

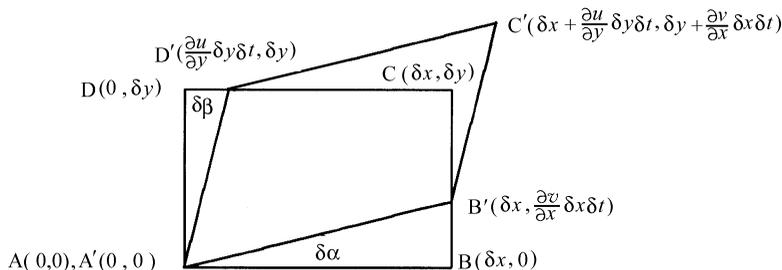


图 1.4 矩形的旋转运动

在 δt 时刻, AB 轴(逆时针为正)转动的角度为

$$\delta \alpha \approx \tan \delta \alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t.$$

所以, AB 轴的转动角速度为 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

在 δt 时刻, AD 轴(逆时针为正)转动的角度为

$$\delta \beta \approx \tan \delta \beta = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y} \delta y \delta t}{\delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \delta t.$$

所以, AD 轴的转动角速度为 $\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

一般情况下, AB 与 AD 轴的转动角速度不一样,即存在角变形.此时,把它们的平均值定义为流体微团的转动角速度 ϵ_z ;把它们之差除以 2 定义成角变形率 γ_z .即

$$\epsilon_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad \gamma_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

与二维问题类似,对于一般的三维问题,速度可以按如下方式进行几何分解:

A) 体积变化率

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

B) 绕 x, y, z 轴的转动角速度

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad \epsilon_y = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \epsilon_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

C) 绕 x, y, z 轴的角变形率

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right], \gamma_y = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \gamma_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

事实上, 可以将方程(1.2)写成下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}.$$

这里

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = Q_{\text{sym}} + Q_{\text{anti}},$$

其中

$$Q_{\text{sym}} = \frac{1}{2} (Q + Q') = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 0 & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{anti}} = \frac{1}{2} (Q - Q') = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_z & \epsilon_y \\ \epsilon_z & 0 & -\epsilon_x \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 0 \end{bmatrix}.$$

这里 Q' 为 Q 的转置矩阵. 显然, Q_{sym} 为对称矩阵, Q_{anti} 为反对称矩阵. 于是, 流体微团的线变形对应矩阵 Q 对称部分的对角线元素, 流体微团的角变形对应矩阵 Q 对称部分的非对角线元素, 流体微团的旋转运动对应矩阵 Q 反对称部分. 于是证明了 Cauchy - Helmholtz 速度分解定理: 流体微团上任意点的运动 = 参考点的移动 + 体积膨胀运动 + 角变形运动 + 旋转运动.

1.1.5 散度与旋度、速度位与流函数

速度的散度定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

考虑流体微团 Ω , 其边界为 Σ . 在运动过程中, 以速度 \mathbf{V} 运动的边界元 $d\Sigma$ 在单位时间扫过的体积为 $\mathbf{V} \cdot d\Sigma$, 因此 Ω 的体积变化为

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\Sigma.$$

由高斯定理得

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} d\sigma \rightarrow \Omega \nabla \cdot \mathbf{V},$$

所以,

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \Big|_{\Omega \rightarrow 0} = \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

因此,散度为标定流体微团在运动过程中的体积变化率.显然,不可压缩流体也可以等价地定义为速度的散度处处为零.

旋度定义为

$$\begin{aligned} \omega &= \nabla \times \mathbf{V} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \mathbf{e}_y + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \mathbf{e}_z \\ &= 2\epsilon_x \mathbf{e}_x + 2\epsilon_y \mathbf{e}_y + 2\epsilon_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

如果旋度处处为0,流动称为无旋运动;如果不是处处为0,则称为有旋运动.

在无旋运动假设下,有

$$\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] \mathbf{e}_y + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \mathbf{e}_z = 0,$$

即速度满足如下柯西-黎曼关系式

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

根据全微分存在定理,存在 ϕ ,使得 $d\phi = u dx + v dy + w dz$.称 ϕ 为速度位(位函数、

势函数).由 $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$ 得

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

对于二维问题, $\phi = \text{const}$ 定义的曲线称为等位线;对于三维问题, $\phi = \text{const}$ 定义的曲面称为等位面.显然, $\nabla \cdot \phi$ 与速度平行,所以等位面必与流线正交.

考虑二维不可压缩流体.对于不可压缩流体,速度散度为零,即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

如果流体无旋,即存在位函数 ϕ ,使得: $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$.代入(1.3)得位函数所满足的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

除了用位函数描述流动外,还可以用所谓的流函数描述二维不可压缩流动^①.为了引进流函数概念,先考察穿越直线段(在垂直于二维平面的方向取单位长度)

① 下面有关流函数的定义不能推广到三维流动和可压缩流动.

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$$

的流量

$$d\psi = udy - vdx.$$

记

$$d\psi = Adx + Bdy, \quad A = -v, \quad B = u.$$

下面看 $d\psi$ 是否为全微分, 即是否有下面的柯西-黎曼条件

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

上式等价于

$$\frac{\partial(-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

这便是旋度为零的条件, 等价于不可压缩流动的定义.

因此, 在不可压假设下, 表达式

$$d\psi = udy - vdx,$$

确实定义了一全微分, 即存在函数 ψ , 满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u.$$

如果取 ψ 为常数, 即 $d\psi=0$, 则有

$$udy - vdx = 0 \Rightarrow \frac{u}{dx} = \frac{v}{dy},$$

即 ψ 为常数的线为流线.

因此, 称由

$$\psi = \int udy - vdx, \quad u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

定义的 ψ 为流函数.

将 $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ 代入旋度为零的条件

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

得无旋流场中 ψ 所满足的方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

因此, 流函数也满足拉普拉斯方程. 另外由

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = (u, v) \cdot (-v, u) = 0,$$

所以流线和等位线是正交的.

采用流函数的好处在于, 一旦获得流函数, 那么由流函数等于常数就直接确定了流线. 给定速度场后, 可以用成熟的商业软件画流线. 但千万要注意, 某些画流线的软件基于

流函数概念. 而流函数是针对二维不可压缩流动定义的. 这类基于流函数的软件不能随意用来画三维流动某个横截面或者二维可压缩流动的流线. 读者在使用商业软件时必须先确认软件的适应范围.

1.1.6 旋涡运动学

在分析流体微团的变形时, 已经知道速度梯度张量 $\nabla \mathbf{V}$ 可以分解为表示纯变形的部分 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^t)$ (对称张量) 和表示旋转运动的部分 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^t)$ (反对称张量). 由于二阶反对称张量只有三个独立分量, 所以必然与某矢量形成一一对应关系. 根据速度分解定理中反对称矩阵 Q^i 的表达式, \mathbf{A} 必与旋度 ω 成一一对应关系. 可以验证:

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_i, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \omega \cdot \epsilon.$$

这里 $\epsilon = \{\epsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)\}$ 为置换张量.

因此可以用旋度来唯一表示流体微团的旋转运动. 为了明确 ω 的物理意义, 考虑刚体在空间的一般运动. 由理论力学知道, 对于速度为 \mathbf{V}_0 的任意基准点, 矢径为 \mathbf{x} 处质点的速度为

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}.$$

这里 $\boldsymbol{\Omega}$ 为刚体的瞬时角速度矢量(最多是时间的函数). 对上式取旋度运算得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{x} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{x} \\ &= 3 \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I} = 2 \boldsymbol{\Omega}, \end{aligned}$$

因此,

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}.$$

即 $\boldsymbol{\omega}$ 等价于刚体运动中的角速度向量的两倍. 因此可以称流体微团的旋转运动为准刚体运动.

过流场中任一点有一条曲线, 该曲线上任一点与旋度矢量方向相切, 这种线称为涡线. 描述涡线的方程为

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (1.4)$$

由定义可知, 涡线上任一点的流体微团绕涡线的切线方向旋转.

在旋涡场取一非涡线的曲线 C , 过该曲线的任意点做涡线, 这些涡线组成的曲面称为涡面.

在旋涡场取一非涡线的封闭曲线 C , 过该曲线的任意点做涡线, 这些涡线组成的管状曲面称为涡管. 称该涡管由闭曲线 C 张成的涡管.

如果涡管截面积无限小, 则称该涡管为涡管元; 如果一涡管的外面流场的旋度均 0, 则该涡管称为孤立涡管.

流场中如果至少存在一部分区域使得 $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, 则流体运动称为有旋运动; 如果在整个

区域中有 $\omega = 0$, 则称流体运动为无旋运动.

根据所考察的流体团的几何尺度的不同, 有旋运动存在两种不同的力学意义.

如果考虑宏观上无限小, 微观上无限大的流体微团, 则 ω 完整地表示了旋转运动, 因此 ω 也称为涡量 (vorticity), 它是表示流体微团旋转状态的量. 因 $\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$, 所以涡量场是管式场. 特别注意的是, $\omega \neq 0$ 并不表示流体质点在做宏观上的旋转运动. 例如, 对于剪切流动 $u = y, v = w = 0$, 有 $\omega = \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{e}_3 \neq 0$, 即旋度不为 0. 但流体质点是在做水平直线运动. 反过来, 如果流体质点做整体旋转运动, 并不表示一定有 $\omega \neq 0$.

例如, 在柱坐标系 (r, θ, z) 中考虑速度场 $V_r = 0, V_\theta = \frac{1}{r}, V_z = 0$. 此时对所有 $r \neq 0$,

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V} = \left[\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \right] \mathbf{e}_z = 0,$$

而该速度场明显表示流体质点在做围绕原点的整体旋转运动. 因此涡量反映的是局部运动, 而非整体运动.

如果考虑有限大小的几何尺度的流体团, 涡是一种具有强烈旋转倾向的有限质量流体的集合, 往往是一种有组织的流体结构, 此时这种结构称为有限大小的涡 (vortex), 简称涡. 它可以理解为涡量高度集中的区域, 如涡管、涡丝. 上面考虑的第二个例子就是这样一种涡, 涡量集中在原点. 自然界中的龙卷风、船只航行时或摇动桨叶时水面出现的涡旋、烟圈、浴盆放水时空气柱体周围的旋转流动等都是这种涡的例子.

对于某些流动, 存在各种尺度的涡, 它们相互叠加在一起并进行相互作用, 使得流场从某种观察角度看表现出强烈的无序性. 例如, 烟囱冒出的烟在靠近烟囱口是直的, 离开一段距离后便出现摇摆, 最终散乱开, 观察者看来运动表现出极其不规则.

涡的研究具有重要工程意义. 例如汽车在行驶时, 尾部会拖出涡来 (路面尘土较厚时很明显), 这种涡增加汽车所受的空气阻力, 造成不必要的能耗, 因此需要控制涡的出现. 飞机也有类似情况. 有时涡运动又能产生正面作用, 最常见的例子就是洗衣机, 利用旋转运动使脏物快速与水混合以达到洗净衣服之目的.

取空间任意截面, 截面积为 A . 定义 $I = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} dA$ 为通过 A 的涡通量. 若 A 为涡管上的截面, 则涡通量也称涡管强度.

设 C 为封闭曲线, 线积分 $\Gamma_C = \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ 称为速度环量. 这里, $d\mathbf{s}$ 为封闭曲线的弧元素矢量.

设空间中任意有界曲面 A , 曲面足够光滑. 曲面的边界线为 C . 由曲面有界的假设, 边界线 C 必为封闭曲线. 称曲面 A 为由曲线 C 张成的曲面, 显然任意封闭曲线 C 可以张成无数个曲面. 如果曲面 A 是单连通的, 那么 C 为一条封闭曲线; 如果 A 是双连通的, 那么 C 为两条封闭曲线. 因此这里考虑的封闭曲线可以是几条独立的封闭曲线的集合. 对任意矢量 \mathbf{R} 成立下面的斯托克斯定理.

$$\int_C \mathbf{R} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} dA.$$

速度环量定理 沿封闭曲线 C 的速度环量等于张在该曲面上任意涡管的涡通量 (直接由斯托克斯定理得到), 因此, 速度环量与涡通量之间是紧密联系的, 二者都可用来衡量

旋涡强度. 由于速度环量只用到线积分和速度本身(无微分), 所以在一般情况下用速度环量研究旋涡运动更方便.

旋涡运动学性质 1 (涡通量守恒定理) 在任意时刻, 涡管中任意截面的涡通量与该截面的位置无关.

证明思路是这样的: 在涡管上取任意两个横截面 A 和 B, 横截面 A 和 B 的边界曲线为 C_1 和 C_2 . 考虑两截面 A 和 B 所界定的涡管壁 S (其边界由闭曲线 C_1 和 C_2 组成), 在该管壁上使用斯托克斯定理. 由于在涡管上旋度与管壁外法线垂直, 所以 $\int_S \omega \cdot n dS = 0$. 于是有 $\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0$, 而 $\int_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ 与 $\int_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ 恰好等于两个截面上的涡通量, 所以任意两个截面上的涡通量相等.

旋涡运动学性质 2 涡线与涡管不能在流体中产生或消失, 只能在流体边界(含自由边界、无限远)上中断或形成闭合环.

涡管只可能在两种情形下产生或消失: 一是涡管的截面积在流体中趋于 0, 此时涡管强度必趋于无限大, 这是不可能的; 另一种情形是涡管或涡线在流体内部突然中断. 设中断面为 S, 在中断面邻域取两个面 A 与 B, 大小与 S 相等, 一个在涡管内, 一个在涡管外. 按性质 1 类似的方法, 可知通过 A 的涡通量与通过 B 的涡通量必然相等, 也就是说涡管终止于 S 处不可能.

1.2 流体动力学基本方程

1.2.1 应力张量的本构方程

1.2.1.1 应力张量与应变率张量

本构关系研究的是流体微团表面力(面积力)与流体微团的变形运动之间的关系, 即

(表面)应力 \mathbf{P} 与应变率 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) = (s_{ij})$ 之间的关系.

考虑一直角四面体流体微团(图 1.5), 四面体的三个面 $\delta A_1, \delta A_2, \delta A_3$ 分别与直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 的三个坐标面重合, 从而它们的外法线方向分别为 $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3$. 第四个面 δA_n 外法线方向为 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. 各面上的面积力强度(单位面积上的力)分别为 $\mathbf{P}_{-\mathbf{e}_1}, \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_2}, \mathbf{P}_{-\mathbf{e}_3}, \mathbf{P}_{-\mathbf{n}}$. 根据作用力与反作用力定律, 有

$$\mathbf{P}_{-\mathbf{e}_1} = -\mathbf{P}_{\mathbf{e}_1},$$

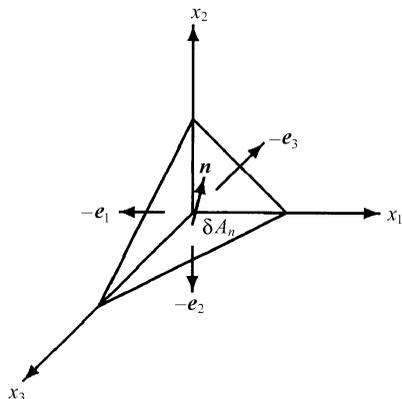


图 1.5 直角四面体流体微团的应力分析

$$\mathbf{P}_{-e_2} = -\mathbf{P}_{e_2},$$

$$\mathbf{P}_{-e_3} = -\mathbf{P}_{e_3},$$

$$\mathbf{P}_{-n} = -\mathbf{P}_n.$$

设流体微团体积为 $\delta\Omega$, 微团加速度为 α , 流体密度为 ρ , 则根据牛顿定律, 有

$$\rho\delta\Omega\alpha = \rho\delta\Omega\mathbf{f} + \mathbf{P}_n\delta A_n + \mathbf{P}_{-e_i}\delta A_i.$$

这里 $\rho\delta\Omega\mathbf{f}$ 为流体微团所受的体积力. 利用明显关系式

$$n_i = \frac{\delta A_i}{\delta A_n}, \lim_{\delta A_n \rightarrow 0} \frac{\delta\Omega}{\delta A_n} = 0,$$

牛顿定律可以简化为

$$\mathbf{P}_n = -\mathbf{P}_{-e_i}n_i = \mathbf{P}_i n_i.$$

将力矢量做分解

$$\mathbf{P}_{e_i} = P_{ij}\mathbf{e}_j,$$

得力平衡关系式

$$\mathbf{P}_n = P_{ij}n_i\mathbf{e}_j.$$

因此, 由

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}_n,$$

可以定义张量 \mathbf{P} , 称为应力张量, 其分量为 P_{ij} . 有了应力张量, 那么方向为 \mathbf{n} 的任意面上的力可以按 $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 确定. 因此一般情况下面积力与面积的方向有关. 很容易证明, 应力张量是对称张量, 因而只有六个独立分量. 对于某些特殊流体, 有一些特殊力在起作用, 从而应力张量不对称. 这里不考虑这种情况. 对称性可以通过构造角动量守恒方程证明, 也可以用反证法. 例如考虑正立方体微元, 各边分别与某坐标轴平行. 假定 $\mathbf{P}_{12} \neq \mathbf{P}_{21}$, 则绕 z 轴的力矩平衡得不到满足.

1.2.1.2 简单实验观察

以气体为例, 实验观察到, 一般气体中是存在压力的, 它与密度和温度成正比关系, 压力即是一种应力(表面力), 与所考虑的表面垂直而且大小与方向无关. 也可以从分子运动论来阐述压力的存在(即气体分子相互碰撞的宏观表现). 如果上下两层气体作相对滑动, 即存在剪切变形时, 则因微观上的分子运动, 使得运动快的那层(设上层)气体部分分子跑到慢的那层(下层)气体里, 把更高的动能带入下层, 再经进一步分子碰撞使得下层气体运动加快. 同理下层也使上层运动变慢. 这种相互抵抗一直持续到出现某种平衡为止, 宏观上表现为某种剪切力, 阻止两层气体的无限变形. 显然这种抵抗力与变形率大小有关, 变形率越大, 抵抗力就越大, 这样才能阻止变形. 因此剪切应力与剪切变形率之间存在一定的关系, 流体的这种性质称为黏性. 液体中也因分子之间的吸附作用存在上述类似性质.

牛顿在 1687 年通过实验建立了切向应力和剪切变形率之间的关系, 他用相互平行的分别处于 $y=0$ 和 $y=h$ 的两块长(可以近似认为无限长)平板之间的流动做实验, 下平板

固定不动,上平板以速度 U 向右运动(图 1.6).实验发现,速度分布规律为

$$u(y) = U \frac{y}{h}.$$

实验表明,必须在上平板与运动相同的方向上施加一个切向力 F ,以抵消流体作用在上平板上的黏性力.单位面积的切向力满足如下关系式

$$\tau = \mu \frac{U}{h}.$$

由于 $\frac{U}{h} = \frac{du}{dy}$,所以上式可以写成

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

这里 τ 为切应力, $\frac{du}{dy}$ 为剪切变形率, μ 只是与流体物理特性有关的常数,称为动力学黏性系数,简称黏性系数,单位为 $\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$.有时也用运动黏性系数 $\nu = \mu/\rho$,单位为 m^2/s .

在常温下,空气的黏性系数为 $\mu = 1.85 \times 10^{-5} \text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$,水的黏性系数为 $\mu = 10^{-4} \text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$.黏性系数与压力基本无关,但与温度的关系十分密切.

对于气体,黏性系数随温度增加而增加,这是因为气体黏性作用是由于分子运动(分子扩散)引起的,温度增加,分子运动加快,黏性作用就越大.

对于液体,黏性系数随温度增加而减小,这是因为液体黏性主要是由于分子之间的吸附力引起的,温度增加,吸附力减弱,黏性作用就越小.

气体的黏性系数与温度的关系可以从分子运动论导出.对于空气,存在如下的 Sutherland 公式

$$\mu(T) = \text{const} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{T + C}, C \approx 110.4\text{K}.$$

上述公式对于 $T < 2000\text{K}$ 是基本成立的.

1.2.1.3 构造本构方程的基本原则

上面的牛顿公式是从简单剪切流动获得的,它表明黏性应力与应变率之间的关系,称为本构关系.对于更复杂的流动,有更一般的本构关系,需要从理性力学或其他方法导出.根据理性力学原理,本构方程应该符合下述基本原则.

1) 可表性原则.应力和应变率张量都是张量,所以本构方程也应该是张量方程.又知应力张量是对称张量,而应变率张量 \mathbf{S} 也可以分解成对称 s_{ij} 与反对称 a_{ij} 两部分,因此应力张量只应该是 s_{ij} 的函数.

2) 客观性原则.本构方程反映的是流体的物理特性,因此必须与坐标系无关,即不同观察者得到的本构方程必须相同.

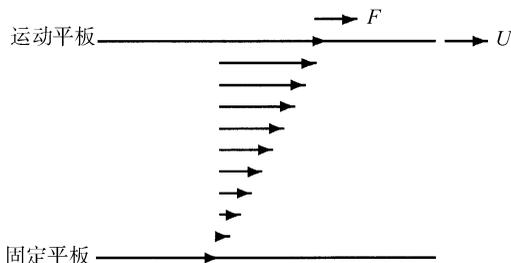


图 1.6 牛顿实验装置

记 $\mathbf{x}' = x'_i \mathbf{e}'_i$, $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$. 考虑直角坐标系, 当 \mathbf{e}'_i 相对 \mathbf{e}_i 作转动时, 坐标基之间有关系式

$$\mathbf{e}_i = \alpha_{ji} \mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j.$$

由于 $\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \alpha_{li} \mathbf{e}_l \cdot \alpha_{mj} \mathbf{e}_m = \alpha_{li} \alpha_{mj} \delta_{lm} = \alpha_{li} \alpha_{lj}$, 所以 $\alpha_{li} \alpha_{lj} = \delta_{ij}$. 同理 $\alpha_{im} \alpha_{jm} = \delta_{ij}$.

从解析几何知道, 两坐标系中的位置向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' 有如下变换关系式

$$x_i = \alpha_{ji} x'_j, x'_i = \alpha_{ij} x_j.$$

考虑两个作相对运动的坐标系 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}' , 且满足关系式

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}. \quad (1.5)$$

这里 \mathbf{x}_0 表示平动, \mathbf{Q} 表示 \mathbf{x}' 相对 \mathbf{x} 的转动. 称 $\mathbf{Q} = \mathbf{e}'_i Q_{ij} \mathbf{e}_j$ 为坐标架的转动张量. 有 $Q_{ij} = \alpha_{ij}$, $Q_{li} Q_{lj} = \delta_{ij}$, $Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$. 特别强调的是, 这里的坐标系 \mathbf{x}' 属于一般的非惯性坐标系.

A) 称标量 ϕ 满足客观性原则, 如果在变换(1.5)下成立:

$$\phi(\mathbf{x}', t) = \phi(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

B) 称矢量 \mathbf{A} 满足客观性原则, 如果在变换(1.5)下成立:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), A'_i(\mathbf{x}', t) = Q_{ij} A_j(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

C) 称张量 \mathbf{P} 满足客观性原则, 如果在变换(1.5)下成立:

$$\mathbf{P}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{Q}', P'_{ij}(\mathbf{x}', t) = Q_{il} P_{lm}(\mathbf{x}, t) Q_{jm}. \quad (1.8)$$

关系式(1.6)至(1.8)对于静止坐标变换是本来成立的, 反映了标量、矢量和张量在静止坐标变换下的不变性, 属于标量、矢量和张量的基本定义. 客观性原则进一步要求, 所考虑的标量、矢量和张量的这些不变性对运动坐标变换也是成立的, 也就是说, 构造本构关系所使用的标量、矢量和张量在运动坐标变换(1.5)下, 也要满足不变性条件(客观性原则)(1.6)至(1.8).

另外根据本构关系必须是张量关系式, 所以也应该满足不变性条件(1.8).

假设剪切应力张量 τ_{ij} 满足关系式

$$\tau_{ij} = f_{ij}(\phi, A_l, P_{mn}, \dots),$$

这里 f_{ij} 为二阶张量, ϕ 为标量, A_l 为矢量, P_{mn} 为二阶张量. 在运动参照系中, 本构关系具有形式

$$\tau'_{ij} = f'_{ij}(\phi', A'_l, P'_{mn}, \dots).$$

根据客观性要求, ϕ 必须满足(1.6), A_l 必须满足(1.7), P_{mn} , f_{ij} 和 τ_{ij} 必须满足(1.8).

流体的物性参数如黏性系数属于标量, 满足客观性要求(1.6).

流体的速度矢量 V_i 却不满足(1.7), 因此不能单独在本构关系式中出现. 原来

$$V'_i = \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dx_{0i}(t)}{dt} + Q_{ij}(t) \frac{dx_j}{dt} + \frac{dQ_{ij}}{dt} x_j = V_{0i}(t) + Q_{ij} V_j + \frac{dQ_{ij}}{dt} x_j,$$

因 V_{0i} 和 $\frac{dQ_{ij}}{dt} x_j$ 对于运动坐标系不恒为零, 所以关系式(1.7)不满足.

已经知道, 应变率张量 s_{ij} 满足可表性原则, 即 $s'_{ij} = Q_{ik} s_{kl} Q_{jl}$, 因此它满足客观性原则, 可以出现在本构关系中. 事实上, 由

$$V'_i = V_{0i}(t) + Q_{ik} V_k + \frac{dQ_{ik}}{dt} x_k,$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i'}{\partial x_j} &= Q_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + \frac{d Q_{ik}}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \\ &= Q_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_j} + \frac{d Q_{ik}}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \\ &= Q_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_l} Q_{jl} + \frac{d Q_{ik}}{dt} Q_{jk}, \\ \frac{\partial V_j'}{\partial x_i} &= Q_{ik} \frac{\partial V_l}{\partial x_x} Q_{jl} + \frac{d Q_{jk}}{dt} Q_{ik}, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} s'_{ij} &= Q_{ik} s_{kl} Q_{jl} + \frac{d Q_{ik}}{dt} Q_{jk} + \frac{d Q_{jk}}{dt} Q_{ik} = Q_{ik} s_{kl} Q_{jl} + \frac{d Q_{ik} Q_{jk}}{dt} \\ &= Q_{ik} s_{kl} Q_{jl} + \frac{d \delta_{ij}}{dt} = Q_{ik} s_{kl} Q_{jl}. \end{aligned}$$

如果令 f_{ij} 为标量函数, 则显然

$$\tau_{ij} = f(\mu, s_{ij})$$

满足客观性原则.

1.2.1.4 牛顿型流体的本构关系

有了可表性原则和客观性原则, 便可大大减小构造本构关系的盲目性. 但这些原则还不能用以给出本构关系的具体表达式, 还必须补充实验与假设条件. 最常见的流体是牛顿型流体, 它是一种相对简单的非记忆性流体.

1. 基本假设的分解与本构关系的导出

牛顿型流体的定义可以分解为如下几个基本假设:

1) 运动流体的应力张量在运动停止后应趋于静止流体的应力张量 $-p\delta_{ij}$ (p 为热力学压强). 为此将应力张量 P_{ij} 分解为 $-p\delta_{ij}$ 和 τ_{ij} 两部分, 即

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

这里 τ_{ij} 为偏应力张量, 运动停止时 $\tau_{ij} = 0$. 偏应力张量也为对称张量.

2) 偏应力张量 τ_{ij} 的各分量是局部速度梯度张量 $\frac{\partial V_k}{\partial x_l}$ 的线性齐次函数

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial V_k}{\partial x_l}.$$

这里 c_{ijkl} 表示流体黏性, 是常数. 例如, 当 $\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \neq 0$, 而其他 $\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = 0$ 时, $c_{1212} = \mu$ (黏性系数). 由于 $\frac{\partial V_k}{\partial x_l} = s_{kl} + a_{kl}$, 其中应变率张量 s_{kl} 为对称张量, 而旋转运动张量 a_{kl} 为反对称张量. 由于 τ_{ij} 是对称张量, 所以必有 $c_{ijkl} a_{kl} = 0$, 从而

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} s_{kl}.$$

3) 流体是各向同性的, 即流体的性质不依赖于方向和坐标系的转换. 因此 c_{ijkl} 必然是四阶各向同性张量, 其每一分量在旋转坐标变换下不变, 即

$$c'_{ijkl} = c_{ijkl}.$$

各向同性张量的特点是, 将 c_{ijkl} 的各下标值作递增值相同的循环置换 (如对 c_{1234} , 作 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$, 得 c_{2341}), 得另一分量, 此分量值与原分量值相同, 如 $c_{2341} = c_{1234}$, $c_{4123} = c_{3412}$. 由此不难证明, 四阶各向同性张量可以表示为

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk},$$

其中 λ, α, β 均为标量. 因此, 四阶各向同性张量只有三个独立分量.

将下标 i, j 对调得

$$c_{jikl} = \lambda \delta_{ji} \delta_{kl} + \alpha \delta_{jk} \delta_{il} + \beta \delta_{jl} \delta_{ik},$$

因此有

$$c_{jikl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha \delta_{il} \delta_{jk}.$$

由于 τ_{ij}, s_{ij} 都是对称张量, 所以 c_{ijkl} 必然关于 i, j 对称, 即 $c_{ijkl} = c_{jikl}$. 于是

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2} (c_{ijkl} + c_{jikl}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

这里 $\mu = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$.

于是 $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} s_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) s_{kl}$, 即

$$\tau_{ij} = \lambda s_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu s_{ij}.$$

因此牛顿流体应力张量的表达式为

$$P_{ij} = (-p + \lambda s_{kk}) \delta_{ij} + 2 \mu s_{ij}. \quad (1.9)$$

如果记

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3} \mu,$$

上式也可以写成

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu \left[s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right] + \mu' s_{kk} \delta_{ij}. \quad (1.10)$$

这就是广义牛顿定律, 也称为牛顿流体的本构方程.

2. 系数 μ, μ' 的物理意义

考虑简单剪切运动 $u = u(y), v = w = 0$. 此时本构方程退化为

$$P_{12} = \mu \frac{du}{dy},$$

因此 μ 为前面提到的黏性系数.

考虑以点 M 为中心以 $r \rightarrow 0$ 为半径的无限小球面 S 上法应力 $\mathbf{P}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 的平均值 (对所有方向进行平均)

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S P_{ij} n_i n_j dS \\
&\stackrel{r \rightarrow 0}{=} \frac{P_{ij}}{4\pi r^2} \int_S n_i n_j dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^2} \oint_S \frac{x_i}{r} n_j dS = \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S x_i n_j dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S x_j \delta_{ij} n_j dS = \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S x_k \delta_{ik} n_k \delta_{kj} dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \oint_S (\delta_{ik} \delta_{kj} x_k) n_k dS \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \int_V \frac{\partial(\delta_{ik} \delta_{kj} x_k)}{\partial x_k} dV \\
&= \frac{P_{ij}}{4\pi r^3} \int_V \delta_{ik} \delta_{jk} dV \\
&= \frac{1}{3} P_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33}),
\end{aligned}$$

这里, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 为球的体积. 因此 M 点处所有方向上的法应力平均值等于 x_1, x_2, x_3 三个方向上的法应力平均值, 是一个不随坐标变化的量. 进一步将广义牛顿定律代入上式得

$$\bar{P} = -p + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

如果 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 则由上式得 $\bar{P} = -p$, 即不可压缩流体一点的法应力平均值等于其热力学压强.

如果 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 那么上式表明, 流体微团在运动过程中发生体积变化引起平均正应力值发生 $\mu' \nabla \cdot \mathbf{V}$ 的变化, 因此也称 μ' 膨胀黏性系数或第二黏性系数. 它反映了气体因膨胀或收缩发生体积变化时, 从一个状态过渡到另一个状态所对应的不可逆(非平衡)过程引起的内耗. 失去平衡后再恢复到新的平衡所需要的时间(弛豫时间)如果比宏观运动状态改变所需时间短许多, 则可以忽略第二黏性系数. 事实上, 除高温和高频声波等极端情况外, 对于一般气体分子运动可取第二黏性系数为 0. 早期斯托克斯假设 $\mu' = 0$, 因此习惯上称 $\mu' = 0$ 为斯托克斯假设. 在斯托克斯假设下, 本构方程中的压力就是平均正应力, 它与热力学中的压力具有不同含义, 不能证明它们相等. 但实际计算表明, 在斯托克斯假设下, 可以认为本构关系中的压力等于热力学压力.

在斯托克斯假设下, 广义牛顿定律可以写成

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left[s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right]. \quad (1.11)$$

3. 本构关系在不同坐标系中的表达式

为了求得应力张量在各坐标系中的分量形式, 将本构关系写成矢量形式

$$\mathbf{P} = -p \mathbf{I} + 2\mu \left[\mathbf{S} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I} \right] + \mu' \nabla \cdot \mathbf{V} \mathbf{I},$$

这里 \mathbf{I} 为单位张量, 然后将矢量形式针对所考虑的坐标系进行分量分解. 先求 $\nabla \cdot \mathbf{V}$, 再取