现代数学译丛 17

合作博弈理论模型

（原书第二版）

[罗] Rodica Branzei
[德] Dinko Dimitrov　著
[荷] Stef Tijs

刘小冬　刘九强　译

科学出版社

现代数学译丛 17

合作博弈理论模型

（原书第二版）

〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov
〔荷〕Stef Tijs 著

刘小冬 刘九强 译

科 学 出 版 社

北 京

图字：01-2011-3293 号

内 容 简 介

本书研究参与者具有部分合作可能性的合作博弈理论模型，重点是模糊博弈和多选择博弈. 本书共分十二章，主要介绍了这些博弈不同的集值概念和单点解概念，这些解概念的性质，在 crisp 博弈、模糊博弈和多选择博弈的某些类上这些解概念之间的相互关系，以及这些模型在许多经济环境下的应用. 与原书第一版相比较，原书第二版增加了很多新的研究成果.

本书可作为经济、管理及数学相关专业的本科生、研究生的教材或教师的教学参考书，对相关领域的科研工作者也有重要的参考价值.

Translation from the English language edition:
Models in Cooperative Game Theory by Rodica Branzei; Dinko Dimitrov; and Stef Tijs

图书在版编目（CIP）数据

合作博弈理论模型（原书第二版）/（罗）布兰茨(Branzei, R.)等著；刘小冬，刘九强译. —北京：科学出版社，2011
(现代数学译丛；17)
ISBN 978-7-03-031716-2
Ⅰ.①合… Ⅱ.①布… ②刘… ③刘… Ⅲ.①合作博弈-理论模型 Ⅳ.①O225
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 119698 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：包志虹
责任印制：钱玉芬／封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 7 月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—2 000 字数：217 000

定价：46.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

译 者 序

博弈论是一门应用极其广泛的学科, 它既是一个数学分支, 又属于经济学和管理科学范畴, 其应用涉及经济学、管理学、社会学以及计算机科学等众多领域. 在过去的几十年中, 博弈论在国内外发展迅速, 既有对传统非合作博弈的突破, 更有新的理论分支, 诸如合作博弈、模糊合作博弈等的飞速发展. 然而, 虽然国际上已有许多非常出色的博弈论方面的专著, 但国内这方面的专著并不多见, 特别是有关模糊合作博弈的理论书籍还未出现. 由 Rodica Branzei, Dinko Dimitrov 和 Stef Tijs 所著的《合作博弈理论模型》(*Models in Cooperative Game Theory*) 从模型的角度系统深入地介绍了博弈论的基本理论, 尤其是书中有关模糊合作博弈的部分, 可以说是第一次系统、完整地介绍了这方面内容. 因此, 我们将这本书翻译成中文, 希望为国内的博弈论研究人员提供一本好的参考书.

本书的出版得到了西安财经学院出版基金和陕西省重点学科建设基金的资助, 谨此表示感谢!

刘小冬　刘九强
于西安财经学院
2010 年 8 月

第 二 版 序

在过去几年中, 合作博弈理论是一个有很多新成果的繁荣的研究领域. 因此, 在我们准备这本书的第二版时, 力求在不改变本书结构的前提下, 尽可能多地介绍这些新的研究成果. 首先, 这给我们提供了一个提高和扩展传统合作博弈内容的机会, 这里称为 crisp 博弈, 特别地, 具有多选择的 crisp 博弈可以使这本专著的三个部分更均衡. 其次, 借着第二版的机会, 修改和扩充了涉及合作博弈的三种模型的文献. 最后, 我们修改了第一版排版错误和一些不重要的结果, 并且, 通过修改英语格式和标点符号, 达到专著的规范性. 主要修改包括：

(1) 第 3 章增加了第 3.3 节, 关于平均字典序值 (average lexicographic value) 的知识, 它是定义在均衡 crisp 博弈上的一个新的单点解概念.

(2) 第 4 章是新增加的. 这一章从平均主义标准角度对 crisp 博弈的解概念进行了简要回顾, 第 4.2 节介绍了一个基于平均主义考虑的新的集值解概念, 即等分离集合 (equal split-off).

(3) 第 5 章基本上是对第一版第 4 章的扩充, 第 5.4 节是新增的, 它介绍的是具有 crisp 联盟的凸博弈和宗族博弈之间的关系. 另外, 第一版的第 4.2 节和另外两个模型一起放到了第 5.2 节.

(4) 第 7 章增加了第 7.3 节, 是介绍广义核心和稳定集的.

(5) 与第一版相比, 第 8 章在结构上做了小的修改, 但是内容没有变.

(6) 由于要对第 11 章和第 12 章进行增强和扩展, 所以设立了第 10 章, 它是第一版第 9 章的扩展, 同时, 对其中的符号进行了改进.

(7) 第 11 章介绍多选择博弈的解概念, 为了能更好地引进有关类–Shapley 值的新内容, 这一章的结构有所改变. 第 11.4 节是新增的, 它包含了关于 crisp 博弈的等分离集合的多选择版本 (参见第 4.2 节).

(8) 第 12 章来源于第一版的第 11 章, 包含一些关于均衡博弈、凸博弈和宗族博弈这三类多选择博弈的新的概念和结论. 特别地, 第 12.1.2 小节介绍了水平增加单调分配方案 (level-increase monotonic allocation scheme) 的概念, 它是多选择博弈完全均衡存在的必要条件. 第 12.2 节几乎是全新的. 其中, 第 12.2.2 小节是全新的, 介绍的是凸多选择博弈的单调分配方案. 第 12.2.3 小节也是全新的, 介绍和研究了凸 crisp 博弈的受限平等解 (constrained egalitarian solution) 的多选择版本 (参见第 5.2.3 节). 而第 12.2.4 节主要介绍具有多选择联盟的凸博弈的所有前面介绍的解的性质. 第 12.3 节是全新的. 首先, 第 12.3.1 节介绍了多选择宗族博弈和多

选择完全宗族博弈, 提供了多选择完全宗族博弈的特征. 其次, 第 12.3.2 节介绍和研究了多选择完全宗族博弈的一个子类的双单调分配方案 (bi-monotonic allocation scheme), 此节定义的补偿–分享规则 (compensation-sharing rule) 有重要作用.

希望这次的修正和扩充版本能够使读者获得比第一版更多的收益. 由衷地感谢 Katharina Wetzel-Vandai, 他鼓励我们准备 Springer 2005 版的第二版; 由衷地感谢 Luis G. González Morales, 是她将我们的手稿整理成最后的书稿.

Rodica Branzei
Dinko Dimitrov
Stef Tijs
Nijmegen
2008 年 1 月

第一版序

这本书研究具有转移效用合作博弈 (TU–博弈) 的传统模型, 以及参与者具有部分合作可能性的合作博弈模型, 我们称为模糊博弈和多选择博弈. 在一个合作 TU–博弈中, 参与者要么全部与其他参与者合作, 要么这些参考者全部不与其他参与者合作. 然而在模糊博弈中, 参与者允许以无限多的不同参与水平与其他参与者合作, 从不合作到完全合作. 一个多选择博弈描述一个 “中间” 情形, 即每个参与者可以有固定的有限个数的参与水平.

本书的第一部分将主要精力放在合作博弈理论中最成熟的模型, 即具有特征函数形式的合作博弈或具有转移效用的合作博弈 (TU–博弈), 这里称之为具有 crisp 联盟的合作博弈, 或简单地称之为 crisp 博弈. 本部分介绍了基本概念、解概念和合作 crisp 博弈的分类. 这样, 读者可以将这一部分作为研究模糊博弈 (第二部分) 和多选择博弈 (第三部分) 的对应概念的参考工具书.

这本书的工作起源于 2002 年, 当时我们作为研究伙伴参与在 ZiF (比勒费尔德) 的一个叫 “Procedural Approaches to Conflict Resolution” 的项目. 感谢我们的东道主 Matthias Raith 和 Olaf Gaus, 是他们给我们创造了自主制定研究计划的条件; 也要感谢 ZiF 的行政管理官员们, 感谢他们的殷勤和好客. Dinko Dimitrov 的工作得到了蒂尔堡大学 (Tilburg University) 管理的欧洲共同体项目的 Marie Curie 研究基金的慷慨资助, 该项目名称是 “Improving the Human Research Potential and the Socio-Economic Knowledge Base”, 合约编号为 HPMF-CT-2002-02121. 同时要感谢 Luis G. Gonzalez Morales, 是她将我们的手稿整理成这最终的版本.

Rodica Branzei
Dinko Dimitrov
Stef Tijs
Tilburg
2005 年 5 月

目　　录

第二部分 具有模糊联盟的合作博弈

第三部分 多选择博弈

第一部分　具有 crisp 联盟的合作博弈

合作博弈理论主要关心的是联盟 (即参与者集合), 协调他们的行动并且经营他们的收益. 因此, 这里遇到的问题之一是如何在组成联盟的成员之间分配他们的额外收益 (或费用节省 (cost savings)). 这个理论的基础是基于 John von Neumann 和 Oskar Morgenstern 建立的具有特征函数的合作博弈[78], 也就是著名的具有转移效用的博弈 (TU–博弈). 自那以后, 合作 TU–博弈产生了很多解概念, 同时也产生了一些有趣的 TU–博弈的子类. 这一部分介绍一些挑选过的基本记号、解概念和合作 TU–博弈类, 这些概念将在本书的后两部分广泛用到. 介绍 (合作) 博弈更详细的著作如 [86] 和 [110], 其中也涉及非转移支付博弈 (NTU–博弈). 最新的专题讨论文献有 [79], [87], [91], [123].

本书的这一部分主要介绍合作博弈理论的最成熟的模型, 即具有特征函数形式的合作博弈或具有转移效用的合作博弈 (TU-博弈), 这里称这些模型为具有 crisp 联盟的合作博弈, 或简称为 crisp 博弈. 这部分是这样构成的：第 1 章介绍涉及 TU–博弈的合作博弈的基本符号、定义和概念; 第 2 章考虑核心 (core)、优势核心 (dominance core) 和稳定集 (stable set) 等的集值解概念以及不同的核心捕捉器的概念, 并对这些解概念之间的关系进行了广泛地研究. 第 3 章主要涉及两个著名的单点解概念 ——Shapley 值和 τ 值, 也介绍了文献 [111] 新近引入的平均字典序值 (average lexicographic value) 的概念. 我们介绍了这些概念的不同形式, 讨论了它们的一些性质和公理. 在第 4 章中简要地介绍了基于平等主义的解概念 (egalitarianism-based solution concept), 介绍了合作博弈的等分离集合 (equal split-off set). 第 5 章研究了具有 crisp 联盟的合作博弈的三种类型：完全均衡博弈 (totally balanced game)、凸博弈 (convex game) 和宗族博弈 (clan game). 讨论了这些模型的解概念具有的一些特殊性质, 这些解概念在第 3, 4 章中有所介绍. 同时, 给出其他特别的解概念, 例如, 完全均衡博弈的人口单调分配机制 (population monotonic allocation scheme), 凸博弈的受限平等解 (constrained egalitarian solution), 以及宗族博弈的双单调分配机制 (bi-monotonic allocation scheme).

第 1 章　研究基础

令 N 是参与者 (这些参与者考虑不同的合作可能性) 的非空有限集合, 每个子集 $S \subset N$ 看成是一个 crisp 联盟 (crisp coalition). 集合 N 称为大联盟 (grand coalition), 集合 $\varnothing$ 称为空联盟 (empty coalition). 将联盟的集合, 即 N 的所有子集用 2^N 表示. 对每个 $S \in 2^N$, 用 $|S|$ 表示 S 中元素的个数, 用 e^S 表示 S 的特征向量, 其中

$$\begin{cases} \left(e^S\right)^i = 1, & \text{如果 } i \in S, \\ \left(e^S\right)^i = 0, & \text{如果 } i \in N \backslash S. \end{cases}$$

在后面常记 $N = \{1, \cdots, n\}$.

定义 1.1　具有特征函数形式的**合作博弈**是一个序对 $\langle N, v\rangle$, 其中 N 为参与者集合, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ 是满足 $v(\varnothing) = 0$ 的特征函数.

实值函数 $v(S)$ 可以解释为当 S 合作时 S 的成员可以获得的最大收益或可节省的最多费用. 通常认定博弈 $\langle N, v\rangle$ 具有特征函数 v.

具有特征函数形式的合作博弈通常解释为可转移支付博弈 (TU–博弈). 合作博弈可能是非转移支付的 (NTU–博弈), 读者可以参考文献 [87] 和 [110] 中关于 NTU–博弈的介绍.

例 1.2(手套博弈)　假设 $N = \{1, \cdots, n\}$ 可以分成两个不相交的子集 L 和 R. L 中的成员拥有左手手套, R 中的成员拥有右手手套. 单个手套没有任何价值, 一对左右手手套具有一欧元的价值. 这种情况可以建立一个博弈模型 $\langle N, v\rangle$, 其中对每个 $S \in 2^N$ 有 $v(S) := \min\{|L \cap S|, |R \cap S|\}$.

具有参与者集合 N 的合作博弈的特征函数的集合记为 G^N, 若在其上定义通常意义的加法和数乘, 则 G^N 形成一个 $\left(2^{|N|} - 1\right)$ 维的线性空间; 由无异议博弈 (unanimity game) u_T 可以确定此空间的一个基, 其中 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, u_T 定义为

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } S \subset T \text{ ①}, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases} \tag{1.1}$$

容易验证对每个 $v \in G^N$, 有

$$v = \sum_{T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} c_T u_T, \quad \text{其中}, \quad c_T = \sum_{S : S \subset T} (-1)^{|T| - |S|} v(S). \tag{1.2}$$

① 注：原书中为 $T \subset S$, 译者注.

无异议博弈 u_T 可以这样解释：可以获得利润 (或节省费用) 为 1 当且仅当联盟 S 中的成员协同合作.

定义 1.3　博弈 $v \in G^N$ 称为**简单的**[①], 如果对所有的 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 有 $v(S) \in \{0,1\}$, 并且 $v(\varnothing)=0$, $v(N)=1$.

可以看到, 对所有 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 无异议博弈 u_T 是一个特殊的简单博弈.

定义 1.4　在简单博弈 $v \in G^N$ 中, 如果 $v(S)=1$, 则称联盟 S 为**获胜的** (winning).

定义 1.5　在简单博弈 $v \in G^N$ 中, 如果一个联盟 S 满足 $v(S)=1$, 并且对所有 $T \subset S, T \neq S$, 都有 $v(T)=0$, 则称 S 为**最小获胜的** (minimal winning).

定义 1.6　在简单博弈 $v \in G^N$ 中, 如果联盟 $\{i\}$ 是最小获胜的, 同时没有其他最小获胜联盟, 则称参与者 $i \in N$ 为**独裁者** (dictator).

定义 1.7　令 $v \in G^N$, 对每个 $i \in N$ 和每个满足 $i \in S$ 的每个 $S \in 2^N$, 参与者 i 对联盟 S 的**边际贡献** (marginal contribution) 是 $M_i(S,v) := v(S) - v(S \backslash \{i\})$.

令 $\pi(N)$ 是 N 的所有置换 $\sigma : N \rightarrow N$ 的集合, 集合 $P^{\sigma}(i) := \{r \in N | \sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(i)\}$ 含有关于置换 σ 的所有 i 的前继.

定义 1.8　令 $v \in G^N$ 和 $\sigma \in \pi(N)$. 关于 σ 和 v 的**边际贡献向量** $m^{\sigma}(v) \in \mathbb{R}^n$, 定义为对所有 $i \in N$, $m^{\sigma}(v)$ 的第 i 个分量为 $m_i^{\sigma}(v) := v(P^{\sigma}(i) \cup \{i\}) - v(P^{\sigma}(i))$.

下面, 在不至于混淆 v 是博弈的情况下, 常用 m^{σ} 代替 $m^{\sigma}(v)$.

定义 1.9　对于一个博弈 $v \in G^N$ 和一个联盟 $T \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 关于参与者集合 T 的**子博弈** v_T 定义为, 对所有 $S \in 2^T$, $v_T(S) := v(S)$.

这里, v_T 是一个将 v 限制在集合 2^T 上的博弈.

定义 1.10　博弈 $v^* \in G^N$ 称为是 $v \in G^N$ 的**对偶**, 如果对所有的 $S \subseteq N$, 有 $v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S)$.

定义 1.11　博弈 $v \in G^N$ 称为是**单调的**, 如果对所有满足 $S \subset N$ 的 $S, T \in 2^N$, 有 $v(S) \leqslant v(T)$.

定义 1.12　博弈 $v \in G^N$ 称为是**非负的**, 如果对每个 $S \in 2^N$, 有 $v(S) \geqslant 0$.

定义 1.13　博弈 $v \in G^N$ 称为是**可加的**, 如果对所有满足 $S \cap N = \varnothing$ 的 $S, T \in 2^N$, 有 $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$.

可加的博弈 $v \in G^N$ 可由下列向量确定

$$a = (v(\{1\}), \cdots, v(\{n\})) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

因为对所有 $S \in 2^N$, $v(S) = \sum_{i \in S} a_i$. 可加博弈形成了一个 n 维线性空间 G^N. 博弈 $v \in G^N$ 称为是**非本质的** (inessential), 如果它是一个可加博弈. 对于一个非本质的

① 在某些博弈文献中, 一个博弈是简单的, 如果它是单调可加的 (参见定义 1.11).

博弈, 如何分配 $v(N)$ 是不需要讨论的, 因为 $v(N)=\sum\limits_{i\in N}v(\{i\})\Big($并且对所有的$S\subset N$也有$v(S)=\sum\limits_{i\in S}v(\{i\})\Big)$①.

现实中很多的合作博弈都是超可加性博弈.

定义 1.14　博弈 $v\in G^N$ 称为是**超可加的**, 如果对所有满足 $S\cap N=\varnothing$ 的 $S,T\in 2^N$, 有 $v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T)$.

定义 1.15　博弈 $v\in G^N$ 称为是**次可加的** (subadditive), 如果 $-v$ 是超可加的.

当然, 在一个超可加博弈中, 如果 $S_1,\cdots,S_k$ 是两两不相交的联盟, 则有 $v\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{k}S_i\Big)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k}v(S_i)$. 尤其, 对每个 N 的分割 $(S_1,\cdots,S_k)$ 有 $v(N)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{k}v(S_i)$; 特别地, $v(N)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}v(i)$ 成立. 注意：例 1.2 中的博弈满足超可加性. 对于一个满足超可加性的博弈, 合作对参与者来讲是有利的. 具有超可加性博弈 (的特征函数) 的集合在 G^N 中形成一个锥 (cone), 也就是说, 对于所有具有超可加性的博弈 v, w, $\alpha v+\beta w$ 也是具有超可加性的博弈, 其中, α, $\beta\in\mathbb{R}_+$.

定义 1.16　满足性质 $v(N)>\sum\limits_{i=1}^{n}v(i)$ 的博弈 $v\in G^N$ 称为是 ***N*-本质博弈** (N-essential game).

在第一部分中, 均衡博弈概念起着重要作用.

定义 1.17　映射 $\lambda:S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}\to\mathbb{R}_+$ 称为**均衡映射**, 如果 $\sum\limits_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}}\lambda(S)e^S=e^N$.

定义 1.18　联盟集合 B 称为是**均衡的**, 如果存在一个均衡映射 λ 使得 $B=\big\{S\in 2^N|\lambda(S)>0\big\}$.

定义 1.19　博弈 $v\in G^N$ 称为是**均衡的**, 如果对任意的均衡映射 $\lambda:S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}\to\mathbb{R}_+$, 都有

$$\sum_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}}\lambda(S)\,v(S)\leqslant v(N). \tag{1.4}$$

现在考虑两个博弈 $v,w\in G^N$, 并回答 “什么时候我们说博弈 v 和 w ‘本质上 (essentially)’ 是相同的？” 这样一个问题.

定义 1.20　令 $v,w\in G^N$. 博弈 w 和博弈 v 是**策略等价的** (strategically equivalent), 如果存在 $k>0$ 和一个可加博弈 a (参见 (1.3) 式) 使得对所有$S\in$

① 给定一个博弈 $v\in G^N$ 和一个联盟 $\{i,\cdots,k\}\subset N$, 常用 $v(i,\cdots,k)$ 替代 $v(\{i,\cdots,k\})$.

$2^N \setminus \{\varnothing\}$ 都有 $w(S) = kv(S) + \sum\limits_{i \in S} a_i$.

可以认为 w 是由 v 通过下列变换得到的：

- 支付的单位变了, 其中的变换比率为 k;
- 在博弈 w 中, 在参与者分配 $kv(N)$ 之前, 每个参与者或者先分到一份红利 (如果 $a_i > 0$), 或者先交纳一定费用 (如果 $a_i < 0$).

注意, 策略等价是集合 G^N 上的等价关系, 也就是说, 有

- (反身性) 博弈 v 和它自己是策略等价的 (对每个 $i \in N$ 取 $k = 1$ 和 $a_i = 0$);
- (对称性) 如果博弈 w 和博弈 v 是策略等价的, 则博弈 v 和博弈 w 也是策略等价的 $\Big($如果对所有联盟 $S \subset N$, $w(S) = kv(S) + \sum\limits_{i \in S} a_i$, 则 $v(S) \dfrac{1}{k} w(S) - \sum\limits_{i \in S} \dfrac{a_i}{k}$, 其中 $\dfrac{1}{k} > 0\Big)$;
- (传递性) 如果 w 和 v 是策略等价的, u 和 w 是策略等价的, 则 u 和 v 是策略等价的 $\Big(w(S) = kv(S) + a(S)$, $u(S) = lw(S) + b(S)$, 蕴含 $u(S) = lkv(S) + (la(S)\ + b(S))$, 其中 $a(S) := \sum\limits_{i \in S} a_i\Big)$.

对于很多解概念, 正如后面将会看到的, 只需讨论策略等价博弈类中的一个博弈. 常考虑具有 (α, β) 形式的策略等价类博弈, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

定义 1.21 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 博弈 $v \in G^N$ 称为是 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ **形式的博弈**, 如果对所有 $i \in N$, $v(i) = \alpha$, 且 $v(N) = \beta$.

定理 1.22 每个 N-本质博弈 $v \in G^N$ 策略等价于一个具有 $(0, 1)$ 形式的博弈 $w \in G^N$, 且这个博弈是唯一的.

证明 对某个 $k > 0$ 和 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, 寻找一个博弈 w 满足性质：对所有 $S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}$, 有 $w(S) = kv(S) + a(S)$ 成立, 同时对所有 $i \in N$, 有 $w(\{i\}) = 0$ 和 $w(N) = 1$. 那么, 必然有

$$w(i) = 0 = kv(i) + a_i, \tag{1.5}$$

$$w(N) = 1 = kv(N) + \sum_{i \in N} a_i. \tag{1.6}$$

由 (1.5) 式和 (1.6) 式, 得到 $w(N) - \sum\limits_{i \in N} w(i) = 1 = k\left(v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)\right)$. 因此, $k = \dfrac{1}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)}$. 再由 (1.5) 式导出 $a_i = -\dfrac{v(i)}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)}$. 如果对任何 $S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}$, 取 $w(S) = \dfrac{v(S) - \sum\limits_{i \in S} v(i)}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(i)}$, 那么, 得到唯一的 $(0, 1)$ 形式的博弈 w,

它与 v 是策略等价的.

定义 1.23　博弈 $v \in G^N$ 称为是 **0–规范化的** (zero-normalized), 如果对所有 $i \in N$, 都有 $v(i) = 0$.

容易验证, 每个博弈 $v \in G^N$ 都与其 0–规范化的博弈 $w \in G^N$ 是策略等价的, 其中 $w(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$.

定义 1.24　博弈 $v \in G^N$ 称为是 **0–单调性的**, 如果它的 0–规范化博弈是单调的.

可以证明, 与 0–单调性策略等价的博弈也是 0–单调性的.

现在讨论合作 TU–博弈的一个基本问题：“如果大联盟形成, 如何分配收益或费用节省 $v(N)$? ”

解决这个问题要依赖于一些合作博弈的解概念, 例如, 核心、稳定集、谈判集、Shapley 值、τ 值和核仁. 一个解概念给出一个回答这个问题的答案, 即当 N 中所有参与者合作时所获得的收益 (费用节省), 如何在个体参与者之间进行分配, 同时这个分配要考虑所有参与者形成不同联盟时可能存在的潜在收益 (费用节省). 因此, 一个解概念分配给一个合作博弈至少一个支付向量 $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$, 其中 x_i 是分配给参与者 $i \in N$ 的支付. 这本书中用到的关于解概念 (集值解和单点解) 的选择、有关它们的公理以及这些解之间的关系, 将在第 2~4 章讨论.

定义 1.25　一个**集值解** (set-valued solution) (或一个多值解 (multisolution)) 是一个多元函数 $F : G^N \rightarrow\rightarrow \mathbb{R}^n$.

定义 1.26　一个**单点解** (one-point solution) (或一个单值规则 (single-valued rule)) 是一个映射 $f : G^N \rightarrow \mathbb{R}^n$.

现在讨论一些单点解概念的性质, 也可以将这些性质推广到集值解概念上.

定义 1.27　令 $f : G^N \rightarrow \mathbb{R}^n$, 则 f 满足

(i) **个体合理性** (individual rationality) 对所有的 $v \in G^N$ 和 $i \in N$, 有 $f_i(v) \geqslant v(i)$.

(ii) **有效性** (efficiency) 对所有的 $v \in G^N$, 有 $\sum_{i=1}^{n} f_i(v) = v(N)$.

(iii) **关于策略等价的相对不变性** (relative invariance with respect to strategic equivalence) 对所有的 $v, w \in G^N$, 所有的可加博弈 $a \in G^N$, 以及所有的 $k > 0$, 都有 $w = k\,v + a$ 蕴含 $f(k\,v + a) = k\,f(v) + a$.

(iv) **虚拟参与者性质** (the dummy player property) 对所有的 $v \in G^N$ 和所有 v 中的虚拟参与者 (dummy players) i, 都有 $f_i(v) = v(i)$, 也就是说, 参与者 $i \in N$ 对所有的 $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$, 都满足 $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)$.

(v) **匿名性质** (the anonymity property) 对所有的 $\sigma \in \pi(N)$, 有 $f(v^\sigma) = \sigma^*(f(v))$. 这里博弈 v^σ 满足, 对所有的 $U \in 2^N$ 都有 $v^\sigma(\sigma(U)) := v(U)$, 或对所有的 $S \in 2^N$ 和 $\sigma^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 有 $v^\sigma(S) := v\left(\sigma^{-1}(S)\right)$, 其中 σ^* 由下式定义：对

所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in N$ 有 $\left(\sigma^*(x)\right)_{\sigma(k)} := x_k$.

(vi) **可加性** (additivity) 对所有的 $v, w \in G^N$ 有 $f(v+w) = f(v) + f(w)$ 成立.

在结束这章之前, 我们回顾一下后面要用到的线性代数的一些定义和结果.

定义 1.28 V 和 W 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, $L: V \to W$ 是一个映射, 则称 L 是从 V 到 W 的**线性变换** (线性映射、线性算子), 如果对所有的 $x, y \in V$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 都有 $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$.

定义 1.29 称集合 W 是向量空间 V 的 (线性) **子空间**, 如果 $W \subset V$, $0 \in W$, 并且 W 关于加法和数乘是封闭的, 也就是说, 对所有的 $x, y \in W$, 有 $x + y \in W$, 对每个 $x \in W$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有 $\alpha x \in W$ 成立.

定义 1.30 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 V 的子集 C 称为是**凸**的, 如果对所有的 $x, y \in C$ 和 $\alpha \in (0,1)$, 都有 $\alpha x + (1-\alpha) y \in C$ 成立.

凸集的几何解释是：集合中的每一对点 x 和 y, 以 x 和 y 为端点的线段也属于这个集合.

定义 1.31 C 是凸集, 点 $x \in C$ 称为 C 的**极点**, 如果不存在满足 $x_1 \neq x$ 和 $x_2 \neq x$ 的 $x_1, x_2 \in C$ 和 $\alpha \in (0,1)$, 使得 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ 成立. 凸集 C 的极点集合记为 $\operatorname{ext}(C)$.

定义 1.32 $\mathbb{R}^n$ 上点集 H 称为**超平面**, 如果它是线性方程 $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$ 的解集合, 其中 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$. 一个超平面将一个 (线性) 空间分成两个 (线性) 半空间. 令 A 是一个 $n \times p$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^p$, 集合 $P = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\right\}$ 称为**多面体集合** (polyhedral set).

下面的定理给出了多面体集合极点的描述.

定理 1.33 A 是一个 $n \times p$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^p$, P 是不等式 $x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}$ 解的多面体集合, 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 令 $\operatorname{tight}(x)$ 是 A 的列 $\left\{Ae^j | x^{\mathrm{T}} A e^j = b_j\right\}$ 的集合, e^j 是 $\mathbb{R}^n$ 中的第 j 个标准基向量, $j \in N$. 则 x 是 P 的极点当且仅当 $\operatorname{tight}(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的完备向量系统.

下一个定理是线性规划理论中著名的对偶定理.

定理 1.34 A 是一个 $n \times p$ 矩阵, $b \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^n$, 那么 $\min\left\{x^{\mathrm{T}} c | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\right\} = \max\left\{b^{\mathrm{T}} y | Ay = c, y \geqslant 0\right\}$, 如果 $\left\{x \in \mathbb{R}^n | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\right\} \neq \varnothing$ 以及 $\{y \in \mathbb{R}^p | Ay = c, y \geqslant 0\} \neq \varnothing$ 同时成立.

定义 1.35 V 是一个向量空间, $A \subset V$, A 的**凸包** (convex hull) $\operatorname{co}(A)$ 定义为集合：

$$\left\{x \in V \middle| \exists p \in \mathbb{N},\ \alpha \in \Delta^p,\ v_1, \cdots, v_p \in A, \text{使得 } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = x\right\},$$

其中 $\Delta^p = \left\{q \in \mathbb{R}_+^p \middle| \sum_{i=1}^{p} q_i = 1\right\}$ 是 $(p-1)$ 维单位单纯形.

第 2 章　核心和相关解概念

这一章考虑支付向量 $x = (x_i)_{i\in N} \in \mathbb{R}^n$, 其中 x_i 是在大联盟可以建立合作的条件下给参与者 $i \in N$ 的支付. 很明显, 大联盟的实际形成是建立在所有参与者对博弈中的建议支付都同意的基础之上的. 这样的建议支付考虑了参与者所有可能的合作以及这些合作对应的支付.

2.1　转归、核心和稳定集

首先, 注意到在博弈 $v \in G^N$ 中, 只有满足 $\sum\limits_{i\in N} x_i \leqslant v(N)$ 的支付向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 是可达到的, 并且这样的支付向量的集合是非空的和凸的. 更精确一些, 它是 $\mathbb{R}^n$ 的半空间. 用 $I^{**}(v)$ 记这样的集合, 即

$$I^{**}(v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i\in N} x_i \leqslant v(N) \right\}.$$

但是, 一个支付向量应该满足有效性才有可能被同意, 即

$$\sum_{i\in N} x_i = v(N).$$

为了扩展有效性条件, $\sum\limits_{i\in N} x_i \geqslant v(N)$ 也应该成立.

假定 $\sum\limits_{i\in N} x_i < v(N)$, 则应有

$$a = v(N) - \sum_{i\in N} x_i > 0.$$

那么参与者仍然可以组成大联盟, 并且可以获得更好的支付向量 $y = (y_1, \cdots, y_n)$, 其中 $y_i = x_i + \dfrac{a}{n}$, $i \in N$.

记 $I^*(v)$ 为合作博弈 $v \in G^N$ 的有效支付向量集合, 即

$$I^*(v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i\in N} x_i = v(N) \right\}.$$

很明显, $I^*(v) \neq \varnothing$. 将这个凸集看做是博弈 $v \in G^N$ 的预转归集合, 它是 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面. 显然, $I^*(v) \subset I^{**}(v)$.

注意到, 如果建议的分配 $x \in I^*(v)$, 至少存在一个参与者 $i \in N$ 的支付 x_i 满足 $x_i < v(i)$, 则大联盟不可能形成. 原因是这样的参与者宁愿选择不参加合作, 因为他自己独立做会获得更多收益.

因此, 在博弈中, 若想实现一个支付向量, 则个体合理性条件

$$x_i \geqslant v(i), \ \text{对所有}\ i \in N$$

应该成立.

定义 2.1 称博弈 $v \in G^N$ 的支付向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 是一个**转归**, 如果它满足有效性和个体合理性, 即

(i) $\sum\limits_{i\in N} x_i = v(N)$;

(ii) 对所有的 $i \in N$, $x_i \geqslant v(i)$ 成立.

记 $I(v)$ 为博弈 $v \in G^N$ 的转归集. 易见, $I(v)$ 为空集当且仅当 $v(N) < \sum\limits_{i\in N} v(i)$. 进一步, 对一个可加博弈 (参见定义 1.13)

$$I(v) = \{(v(1), \cdots, v(n))\}.$$

下一个定理告诉我们, N-本质博弈 (参见定义 1.16) 总有无穷多个转归. 并且 $I(v)$ 是一个具有极点 $f^1(v), \cdots, f^n(v)$ 的单纯形, 其中, 对每个 $i \in N$, $f^i(v) = \left(f_1^i(v), \cdots, f_n^i(v)\right)$, 这里

$$f_j^i(v) = \begin{cases} v(i), & \text{如果}\ i \neq j, \\ v(N) - \sum\limits_{k\in N\setminus\{i\}} v(k), & \text{如果}\ i = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

定理 2.2 $v \in G^N$, 若博弈 v 是 N-本质的, 则

(i) $I(v)$ 是无限集;

(ii) $I(v)$ 是点 $f^1(v), \cdots, f^n(v)$ 的凸包.

证明 (i) 因为 $v \in G^N$ 是一个 N-本质博弈, 所以有 $a = v(N) - \sum\limits_{i\in N} x_i > 0$. 对任何满足 $\sum\limits_{i\in N} b_i = a$ 的非负 n 元组 $b = (b_1, \cdots, b_n)$, 若对每一个 $i \in N$, 设 $x'_i = v(i) + b_i$, 则支付向量 $x' = (x'_1, \cdots, x'_n)$ 是一个转归.

(ii) 这个结论可以直接由定理 1.33 得到, 只要注意到 $I(v) = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x^{\mathrm{T}} A \geqslant b^{\mathrm{T}}\right\}$, 其中 A 是一个列为 $e^1, \cdots, e^n, 1^n, -1^n$ 的 $n \times (n+2)$ 矩阵, 并且

$$b = (v(1), \cdots, v(n), v(N), -v(N)),$$

这里, 对每个 $i \in N$, e^i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的第 i 个标准基, 1^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中所有元素为 1 的向量.

从上面定理可以看出, N–本质博弈的转归集太大, 有必要制定一些标准用来挑选这些最有可能出现的转归. 因此, 可以获得 $I(v)$ 的一些子集作为解概念.

首先要研究的 (集值) 解概念是博弈的核心[52].

定义 2.3　博弈 $v \in G^N$ 的**核心** $C(v)$ 是集合

$$C(v)=\left\{x \in I(v) \,\middle|\, \sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S),\ \text{对所有 } S \in 2^N \backslash \{\varnothing\} \text{ 成立}\right\}.$$

如果 $x \in C(v)$, 当 x 作为 N 中收益的建议支付时, 则没有联盟 S 有分裂的动机, 因为分配给 S 的总量 $\sum\limits_{i\in S} x_i$ 不小于 $v(S)$, 而 $v(S)$ 是 S 的参与者形成子联盟可以获得的量. 如果 $C(v) \neq \varnothing$, 则核心 $C(v)$ 中的元素可以很容易借助于线性不等式的一个有限系统获得. 核心是一个多面体 (polytope).

在文献 [16] 和 [103] 中可以找到关于非空核心博弈的描述, 这些内容将在定理 2.4 中叙述.

定理 2.4　令博弈 $v \in G^N$, 则下列两个断言是等价的：

(i) $C(v) \neq \varnothing$;

(ii) 博弈 v 是均衡的 (参见定义 1.19).

证明　首先注意到 $C(v) \neq \varnothing$ 当且仅当

$$v(N)=\min\left\{\sum_{i\in N} x_i \,\middle|\, \sum_{i\in S} x_i \geqslant v(S), \text{对所有 } S \in 2^N \backslash \{\varnothing\} \text{ 成立}\right\}. \tag{2.2}$$

由定理 1.34 知, (2.2) 式成立当且仅当

$$v(N)=\max\left\{\sum_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}} \lambda(S)\, v(S) \,\middle|\, \sum_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}} \lambda(S)\, e^S = e^N,\ \lambda \geqslant 0\right\}. \tag{2.3}$$

(取矩阵 A 的列为特征向量 e^S). 现在, (2.3) 式成立当且仅当 (1.4) 式成立, 因此, (i) 和 (ii) 是等价的.

现在, 重新用几何术语来描述 Bondareva-Shapley 的结果[26]. 令 $I(v)=\Delta(N,v)$ 的子单纯形为 $\Delta(S,v)=\operatorname{conv}\left\{f^i(v)\,|\,i\in S\right\}$, 重心 $\dfrac{1}{|S|}\sum\limits_{i\in S} f^i(v)$ 用 $b(S,v)$ 表示. 则得到下面的关于非空核心博弈的性质.

定理 2.5　博弈 $v \in G^N$ 的核心非空当且仅当在 $\mu_S \geqslant 0$ 和 $\sum\limits_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}} \mu_S = 1$ 时, $\sum\limits_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}} \mu_S b(S,v)=b(N,v)$ 蕴含 $\sum\limits_{S\in 2^N\backslash\{\varnothing\}} \mu_S \dfrac{v(S)}{|S|} \leqslant \dfrac{v(N)}{|NN|}$.

证明　对 $\lambda=(\lambda_S)_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$, 令 $\mu=(\mu_S)_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}$, 其中 $\mu_S=n^{-1}|S|\lambda_S$, 则 $\lambda_S\geqslant 0$ 及 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\lambda_S e^S=e^N$ 成立当且仅当

$$\sum_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S\frac{e^S}{|S|}=\frac{e^N}{|N|},\quad \mu_S\geqslant 0,\quad \sum_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S=1.$$

这蕴含着

(i) $\lambda_S\geqslant 0$ 及 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\lambda_S e^S=e^N$成立当且仅当 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S\, b(S,vS,v)=b(N,v)$ 成立, 因为对每个 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, $b(S,v)=(v(\{1\}),v(\{2\}),\cdots,v(\{n\}))+\alpha|S|^{-1}e^S$, 其中, $\alpha=v(N)-\sum\limits_{i\in N}v(\{i\})$.

(ii) $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\lambda_S v(S)\leqslant v(N)$ 成立当且仅当 $\sum\limits_{S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}}\mu_S\frac{v(S)}{|S|}\leqslant\frac{v(N)}{|N|}$.

这个定理说明, 一个博弈 $v\in G^N$ 核心非空, 当且仅当对于每一个将转归集的重心表示为子单纯形重心凸组合的方法, N 的人均值 $v(N)/|N|$ 至少与子联盟 S 的人均值 $(v(S)/|S|)$ 对应的凸组合一样大.

注释 2.6　核心是关于策略等价性的相对不变式 (参见定义 1.27 (iii))：如果 $w\in G^N$ 与 $v\in G^N$ 策略等价, 即 $w=kv+a$, 则

$$C(w)=k\,C(v)+a\ \left(:=\left\{x\in\mathbb{R}^n|x=ky+a,\ 对某些\ y\in C(v)成立\right\}\right).$$

对于核心的公理化描述, 建议读者参考文献 [67], [85] 和 [87].

对于合作博弈, 作为解概念的其他转归的子集有优势核心 (D–核心) 和稳定集[78]. 它们是基于下列在 $\mathbb{R}^n$ 上向量的支配关系来定义的.

定义 2.7　令 $v\in G^N$, $x,y\in I(v)$, $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$. 称**在联盟 $\boldsymbol{S}$ 上 $\boldsymbol{x}$ 支配 $\boldsymbol{y}$**, 记做 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$, 如果

(i) 对所有 $i\in S$, 都有 $x_i>y_i$,

(ii) $\sum\limits_{i\in S}x_i\leqslant v(S)$.

注意, 如果 (i) 成立, 则对 S 中的所有成员而言收益 x 比收益 y 好; 条件 (ii) 保证支付 x 在 S 上是可以实现的.

定义 2.8　$v\in G^N$, $x,y\in I(v)$. 称 x **支配** y, 记做 $x\,\mathrm{dom}\,y$, 如果存在 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 使得 $x\,\mathrm{dom}_S\,y$.

命题 2.9　令 $v\in G^N$, $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$, 则关系 dom_S 和 dom 是非自反的. 另外, dom_S 是可传递的和非对称的.

证明　dom_S 和 dom 是非自反的是基于以下事实, 即对于 $x\in I(v)$, 不存在 $S\in 2^N\setminus\{\varnothing\}$ 使得对所有 $i\in S$, 都有 $x_i>x_i$.

为了证明 dom_S 是可传递的, 取 $x, y, z \in I(v)$ 使得 $x \,\mathrm{dom}_S\, y$ 以及 $y \,\mathrm{dom}_S\, z$, 则对所有 $i \in S$, 都有 $x_i > z_i$, 因此, $x \,\mathrm{dom}_S\, z$.

为了证明 dom_S 是非对称的, 假设 $x \,\mathrm{dom}_S\, y$, 则对所有 $i \in S$, 都有 $x_i > y_i$, 也就是说, 不存在 $i \in S$ 满足 $y_i > x_i$, 因此, $y \,\mathrm{dom}_S\, x$ 不成立.

对于 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 用 $D(S)$ 表示由 S 支配的转归的集合. 注意, S 中的参与者可以成功抵制 $D(S)$ 中的任何转归.

定义 2.10　博弈 $v \in G^N$ 的**优势核心** (dominance core) (D–核心) $\mathrm{DC}(v)$ 包含 $I(v)$ 中的所有不受支配的元素, 也就是说,

$$\mathrm{DC}(v) = I(v) \backslash \bigcup_{S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}} D(S).$$

易知 $\mathrm{DC}(v)$ 也是一个凸集, 且它是一个多面体和相对于策略等价的相对不变式. 关于比较 D–核心和合作博弈的核心的一些定理, 可参考文献 [67].

对于 $v \in G^N$ 和 $A \subset I(v)$, 记 $\mathrm{dom}(A)$ 是由被 A 中某些元素支配的所有转归的集合, 有 $\mathrm{DC}(v) = I(v) \backslash \mathrm{dom}(I(v))$.

定义 2.11　对于 $v \in G^N$, $I(v)$ 的子集 K 称为**稳定集**, 如果下列条件成立：

(i) (内部稳定性 (internal stability))　$K \cap \mathrm{dom}(K) = \varnothing$,

(ii) (外部稳定性 (external stability))　$I(v) \backslash K \subset \mathrm{dom}(K)$.

这个概念是由 von Neumann 和 Morgenstern[78] 引进的, 用于解释一个稳定集对应一个 “行为标准”, 这个被逐渐接受的行为标准是自我强制的 (self-enforcing).

定义 2.11 中的两个条件也可以如下解释：

- 对于外部稳定性, 一个不在稳定集 K 中的转归似乎不可能被接受：总有一个联盟喜欢 K 中的可达到的转归, 隐含存在一个选择 K 中转归的趋势;
- 对于内部稳定性, 所有在 K 中的转归关于联盟的支配关系是 “相等的”, 也就是说, K 中不存在一个转归支配另一个转归的情况.

注意, 对于一个 $v \in G^N$, 集合 K 是稳定集当且仅当 K 和 $\mathrm{dom}(K)$ 形成 $I(v)$ 的一个分割. 原则上, 一个博弈可以有很多稳定集, 也可能没有稳定集.

定理 2.12　令 $v \in G^N$, K 是 v 的稳定集, 则

(i) $C(v) \subset \mathrm{DC}(v) \subset K$;

(ii) 如果 v 满足超可加性, 则 $\mathrm{DC}(v) = C(v)$;

(iii) 如果 $\mathrm{DC}(v)$ 是一个稳定集, 则再没有其他稳定集.

证明　(i) 为了证明 $C(v) \subset \mathrm{DC}(v)$, 首先假定存在 $x \in C(v)$ 但 $x \notin DC(v)$. 则存在一个 $y \in I(v)$ 和一个联盟 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 使得 $y \,\mathrm{dom}_S\, x$. 则 $v(S) \geqslant \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i$, 这蕴含着 $x \notin C(v)$.

为证 $\mathrm{DC}(v) \subset K$, 只需证 $I(v) \backslash K \subset I(v) \backslash \mathrm{DC}(v)$. 令 $x \in I(v) \backslash K$. 由 K 的外部稳定性, 存在一个 $y \in K$ 满足 $y \operatorname{dom} x$. $\mathrm{DC}(v)$ 中的元素是不被支配的, 因此 $x \notin \mathrm{DC}(v)$, 也就是说 $x \in I(v) \backslash \mathrm{DC}(v)$.

(ii) 将这个断言的证明分成两部分.

(ii.1) 证明对一个 $x \in I(v)$, 其中 $\sum\limits_{i\in S} x_i < v(S)$ 对某些 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$ 成立, 则存在 $y \in I(v)$ 使得 $y \operatorname{dom}_S x$. 按如下方式定义 y:

$$y_i := \begin{cases} x_i + \dfrac{v(S) - \sum\limits_{i\in S} x_i}{|S|}, & \text{如果 } i \in S, \\ v(i) + \dfrac{v(N) - v(S) - \sum\limits_{i\in N\backslash S} v(i)}{|N\backslash S|}, & \text{如果 } i \notin S. \end{cases}$$

则 $y \in I(v)$, 其中为了证明对 $i \in N\backslash S$ 有 $y_i \geqslant v(i)$, 用到了博弈的超可加性. 进一步, $y \operatorname{dom}_S x$.

(ii.2) 为了证明 $\mathrm{DC}(v) = C(v)$, 由于有 (i), 只需证明 $\mathrm{DC}(v) \subset C(v)$. 假定 $x \in \mathrm{DC}(v)$. 则不存在 $y \in I(v)$ 使得 $y \operatorname{dom} x$. 由 (ii.1) 有, 对所有 $S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}$, 有 $\sum\limits_{i\in S} x_i \geqslant v(S)$ 成立, 因此 $x \in C(v)$.

(iii) 假定 $\mathrm{DC}(v)$ 是一个稳定集, 令 K 也是一个稳定集. 由 (i) 有 $\mathrm{DC}(v) \subset K$. 为了证明 $K = \mathrm{DC}(v)$, 必须证明 $K\backslash \mathrm{DC}(v) = \varnothing$. 用反证法, 假定存在 $x \in K\backslash \mathrm{DC}(v)$. 由 $\mathrm{DC}(v)$ 的外部稳定性, 存在 $y \in \mathrm{DC}(v)\,(\subset K)$ 使得 $y \operatorname{dom} x$. 这与 K 的内部稳定性矛盾, 因此 $K\backslash \mathrm{DC}(v) = \varnothing$.

除了在定理 2.12 中已经建立的核心、优势核心和稳定集之间的关系外, 下个定理将不加证明地陈述在书中其余部分用到的另外一些结论.

定理 2.13　令 $v \in G^N$, 则

(i) 如果 $\mathrm{DC}(v) \neq \varnothing$, 并且对每个 $S \subset N$ 有 $v(N) \geqslant v(S) - \sum\limits_{i\in N\backslash S} v(i)$, 则 $C(v) = \mathrm{DC}(v)$;

(ii) 如果 $C(v) \neq \mathrm{DC}(v)$, 则 $C(v) = \varnothing$.

对于这些关系的详细证明, 读者可参阅文献 [42], [90], [105] 和 [110].

另外一个类似核心的解概念是在文献 [98] 中引进的涉及公正规范的等分核心 (equal division core).

定义 2.14　博弈 $v \in G^N$ 的**等分核心** $\mathrm{EDC}(v)$ 定义为集合:

$$\left\{ x \in I(v) \,\middle|\, \nexists S \in 2^N \backslash \{\varnothing\}, \text{使得对所有 } i \in S \text{ 都有 } \frac{v(S)}{|S|} > x_i \right\}.$$

换句话说, 博弈的等分核心是由大联盟的有效支付向量组成的, 这个支付向量不能被任何子联盟的等分分配改进. 很明显, 合作博弈的核心包含在该博弈的等分核心中. 读者可以在文献 [13] 中找到这个解概念在两个合作博弈类上的公理化描述.

2.2　核心覆盖、合理集合和 Weber 集

这一节介绍三种与核心相关的集合, 称为核心覆盖[116]、合理集合[51,69,72], 以及 Weber 集[124]. 所有这些集合都包含对应博弈的核心作为其子集合, 因此都可以看成是核心捕捉器.

在核心覆盖的定义中, 用到了博弈 $v \in G^N$ 的上向量 $M(N,v)$ 和下向量 $m(v)$ 的概念.

对于每个 $i \in N$, 上向量 $M(N,v)$ 的第 i 个坐标 $M_i(N,v)$ 是参与者 i 对大联盟的边际贡献 (参见定义 1.7); 也称其为在大联盟中第 i 个参与者的理想收益, 因为可以这样理解, 如果第 i 个参与者总想获得更多个人收益, 则 N 中的其他参与者把第 i 个参与者驱逐出联盟是有利的.

定义 2.15　令 $S \in 2^N \setminus \{\varnothing\}, i \in S$. 联盟 S 中参与者 i 的**剩余** $R(S,i)$ 是这样一个量, 它是联盟 S 的收益除去联盟中其他参与者的理想收益后的剩余, 即

$$R(S,i) := v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N,v).$$

对于每个 $i \in N$, 下向量 $m(v)$ 的第 i 个坐标 $m_i(v)$ 由下式定义：

$$m_i(v) : = \max_{S:\ i \in S} R(S,i).$$

也可以将 $m_i(v)$ 看成是参与者 i 的最小恰当支付 (minimum right payoff), 因为参与者 i 有理由在大联盟 N 中要求获得至少 $m_i(v)$ 的收益, 因为他可以鼓动形成联盟 S 并获得收益 $m_i(v) = R(S,i)$, 同时联盟 S 中的其他参与者很高兴获得他们的理想支付.

定义 2.16　博弈 $v \in G^N$ 的**核心覆盖** (core cover) $\mathrm{CC}(v)$ 包含所有值介于 $m(v)$ 和 $M(N,v)$ 之间的分配 (在 $\mathbb{R}^n$ 中通常意义下的偏序), 也就是说,

$$\mathrm{CC}(v) := \{x \in I(v) \,|\, m(v) \leqslant x \leqslant M(N,v)\}.$$

由下面的定理知, $\mathrm{CC}(v)$ 是一个核心捕捉器. 同时可知, 下 (上) 向量是核心的下 (上) 界.

定理 2.17 令 $v \in G^N$, $x \in C(v)$. 那么 $m(v) \leqslant x \leqslant M(N,v)$, 也就是说, 对所有的 $i \in N$, 都有 $m_i(v) \leqslant x_i \leqslant M_i(N,v)$.

证明 (i) 对每个 $i \in N$,

$$x_i = x(N) - x(N\backslash\{i\}) = v(N) - x(N\backslash\{i\}) \leqslant v(N) - v(N\backslash\{i\}) = M_i(N,v).$$

(ii) 考虑到 (i), 对每个 $S \subset N$ 以及每个 $i \in S$, 有

$$x_i = x(S) - x(S\backslash\{i\}) \geqslant v(S) - \sum_{j \in S\backslash\{i\}} M_j(N,v) = R(S,i).$$

因此, 对每个 $i \in S$, $x_i \geqslant \max_{S:i\in S} R(S,i) = m_i(v)$.

博弈 $v \in G^N$ 的另一个核心捕捉器介绍如下[72].

定义 2.18 博弈 $v \in G^N$ 的**合理集合** $R(v)$ 定义为集合:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| v(i) \leqslant x_i \leqslant \max_{S:i\in S}(v(S)) - v(S\backslash\{i\})\right\}.$$

很明显, $C(v) \subset \mathrm{CC}(v) \subset R(v)$. 有关合理集合的一些公理和性质可参见文献 [51].

下面介绍博弈 $v \in G^N$ 的最后一个核心捕捉器 ——Weber 集[124]. 在其定义中, 边际贡献向量 (参见定义 1.8) 将起作用.

定义 2.19 博弈 $v \in G^N$ 的 **Weber 集** $W(v)$ 是对应于 $n!$ 个排列 $\sigma \in \pi(N)$ 的 $n!$ 个边际向量 $m^\sigma(v)$ 的凸包.

这里, $m^\sigma(v)$ 是这样的向量, 对每个 $k \in N$,

$$\begin{aligned}
m^\sigma_{\sigma(1)}(v) &:= v(\sigma(1)), \\
m^\sigma_{\sigma(2)}(v) &:= v(\sigma(1),\sigma(2)) - v(\sigma(1)), \\
&\cdots\cdots \\
m^\sigma_{\sigma(k)}(v) &:= v(\sigma(1),\cdots,\sigma(k)) - v(\sigma(1),\cdots,\sigma(k-1)).
\end{aligned}$$

支付向量 m^σ 可以按下列方式产生：令参与者们按照 $\sigma(1),\cdots,\sigma(n)$ 的顺序一个接着一个进入同一个房间, 并且给每个参与者一个由他自己进入房间时所产生的边际贡献.

Weber 集是一个核心捕捉器, 有下面的定理.

定理 2.20 令 $v \in G^N$, 那么 $C(v) \subset W(v)$.

证明 如果 $|N| = 1$, 那么 $I(v) = C(v) = W(v) = \{(v(1))\}$.

对于 $|N| = 2$, 考虑两种情况：$I(v) = \varnothing$ 和 $I(v) \neq \varnothing$.

如果 $I(v)=\varnothing$, 则 $C(v)\subset I(v)=\varnothing\subset W(v)$;

如果 $I(v)\neq\varnothing$, 则令

$$x'=(v(1),v(1,2)-v(1))$$

以及

$$x''=(v(2),v(1,2)-v(2)),$$

并且注意到

$$\begin{aligned}C(v)=I(v)&=\operatorname{co}\{x',x''\}\\&=\operatorname{co}\{m^{\sigma}(v)\,|\sigma:\{1,2\}\to\{1,2\}\}=W(v).\end{aligned}$$

通过对参与者数量使用归纳法来继续证明. 因此, 假定 $|N|=n>2$, 并且假定对参与者小于 n 的所有博弈, 博弈核心是 Weber 集的子集.

由于 $C(v)$ 和 $W(v)$ 都是凸集, 只需要证明, $x\in\operatorname{ext}(C(v))$ 蕴含 $x\in W(v)$. 取 $x\in\operatorname{ext}(C(v))$, 则由定理 1.33, 存在 $T\in 2^N\backslash\{\varnothing,N\}$, 使得 $x(T)=v(T)$. 考虑如下定义的具有 $|T|$ 个人的博弈 u 和具有 $(n-|T|)$ 个人的博弈 w,

对每个 $S\in 2^T$, $u(S)=v(S)$;

对每个 $S\in 2^{N\backslash T}$, $w(S)=v(T\bigcup S)-v(T)$.

显然, $x^T\in C(u)$. 因为对所有 $S\in 2^{N\backslash T}$,

$$x^{N\backslash T}(S)=x(S)=x(T\bigcup S)-x(T)\geqslant v(T\bigcup S)-x(T)=v(T\bigcup S)-v(T)=w(S)$$

以及

$$\sum_{i\in N\backslash T}x_i^{N\backslash T}=x(N)-x(T)=v(N)-v(T)=w(N\backslash T),$$

因此, $x^{N\backslash T}\in C(w)$.

由于 $|T|<n$, $|N\backslash T|<n$, 归纳假设蕴含了 $x^T\in W(u)$ 以及 $x^{N\backslash T}\in W(w)$.

因此 $x=x^T\times x^{N\backslash T}\in W(u)\times W(w)\subset W(v)$. 最后的包含关系可以从下面获得. $W(u)\times W(w)$ 的极点具有形式 (m^{ρ},m^{τ}), 其中 $\rho:\{1,\cdots,|T|\}\to T$, $\tau:\{1,\cdots,|N\backslash T|\}\to N\backslash T$ 是双射的, 并且 $m^{\rho}\in\mathbb{R}^{|T|}$, $m^{\tau}\in\mathbb{R}^{|N\backslash T|}$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}&m^{\rho}_{\rho(1)}:=u(\rho(1))=v(\rho(1)),\\&m^{\rho}_{\rho(2)}:=u(\rho(1),\rho(2))-u(\rho(1))=v(\rho(1),\rho(2))-v(\rho(1)),\\&\qquad\cdots\cdots\\&m^{\rho}_{\rho(|T|)}:=u(T)-u(T\backslash\{\rho(|T|)\})=v(T)-v(T\backslash\{\rho(|T|)\}),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m^{\tau}_{\tau(1)} &:= w(\tau(1)) = v(T \bigcup \{\tau(1)\}) - v(T), \\
m^{\tau}_{\tau(2)} &:= w(\tau(1), \tau(2)) - w(\tau(1)) = v(T \bigcup \{\tau(1), \tau(2)\}) - v(T \bigcup \{\tau(1)\}), \\
&\cdots\cdots \\
m^{\tau}_{\tau(|N\backslash T|)} &:= w(N\backslash T) - w((N\backslash T) \setminus \{\tau(|N\backslash T|)\}) \\
&= v(N) - v(N \setminus \{\tau(|N\backslash T|)\}).
\end{aligned}
$$

因此, $(m^{\rho}, m^{\tau}) \in \mathbb{R}^N$ 对应于 $W(v)$ 的边际向量 m^{σ}, 其中 $\sigma : N \to N$ 由下式定义:

$$
\sigma(i) := \begin{cases} \rho(i), & \text{如果 } 1 \leqslant i \leqslant |T|, \\ \tau(i - |T|), & \text{如果 } |T| + 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}
$$

因此 $\mathrm{ext}(W(u) \times W(w)) \subset W(v)$. 由于 $W(v)$ 是凸的, $W(u) \times W(w) \subset W(v)$. 所以 $x \in \mathrm{ext}(C(v))$ 蕴含 $x \in W(v)$.

关于定理 2.20 的其他证明, 读者可以参考文献 [38].

第 3 章　Shapley 值、τ 值和平均字典序值

Shapley 值、τ 值和平均字典序值是最近在文献 [111] 中引入的合作博弈的三个有趣的单点解概念. 本章讨论这三种解的不同形式、一些性质并且给出 Shapley 值的公理化描述.

3.1　Shapley 值

对每个博弈 $v \in G^N$, Shapley 值[102] 对应一个 $\mathbb{R}^n$ 中的支付向量. 关于 Shapley 值更多有趣的讨论可以参见文献 [93].

Shapley 值的第一个形式用的是合作 TU–博弈的边际向量 (参见定义 1.8).

定义 3.1　对一个博弈 $v \in G^N$, **Shapley 值**是博弈的边际向量的平均值, 记作 $\Phi(v)$, 即

$$\Phi(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^{\sigma}(v) \tag{3.1}$$

由 (3.1) 式可以看到, Shapley 值可以用概率来解释. 假定从含有 $\pi(N)$ 的元素的容器中抽一个排列 σ (具有等可能性 $1/n!$). 让参与者按照排列 σ 一个接一个进入同一个房间, 并且给每个参与者一个由他自己产生的边际贡献. 按照这个随机过程, 对每个 $i \in N$, $\Phi(v)$ 的第 i 个坐标 $\Phi_i(v)$ 就是第 i 个参与者的期望支付.

由定义 1.8 可将 (3.1) 式重写为

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} (v(P^{\sigma}(i) \bigcup \{i\}) - v(P^{\sigma}(i))). \tag{3.2}$$

例 3.2　令 $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1, 2) = -2$, 如果 $S \neq \{1, 2\}$ 则 $v(S) = 0$. 那么 Shapley 值是向量 $(0, -2, 2), (0, 0, 0), (-2, 0, 2), (0, 0, 0), (0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, 0)$ 的平均值, 即

$$\Phi(v) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

注释 3.3　注意到在例 3.2 的博弈中, $\Phi_1(v) = -\dfrac{1}{3} < 0 = v(1)$, 由此说明 Shapley 值不需要满足个体合理性 (参见定义 1.27 (i)).

(3.2) 式中求和符号里面项的形式是 $v(S\bigcup\{i\})-v(S)$, 其中 S 是不包含 i 的 N 的子集. 注意到 $P^{\sigma}(i)=S$ 恰有 $|S|!(n-1-|S|)!$ 个排序. 第一个因子 $|S|!$ 对应于 S 的排序数, 第二个因子 $(n-1-|S|)!$ 对应于 $N\backslash(S\bigcup\{i\})$ 的排序数. 由此, 可以重写 (3.2) 式为

$$\Phi_i(v)=\sum_{S:i\notin S}\frac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!}(v(S\bigcup\ \{i\})-v(S)). \tag{3.3}$$

注意, $\dfrac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!}=\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}n-1\\|S|\end{pmatrix}^{-1}$. 这给出了 Shapley 值的第二种概率解释. 按如下方式生成一个 $i\notin S$ 的子集 S: 首先生成一个随机数, 大小在 $0,\cdots,n-1$ 之间, 其中每个数有 $\dfrac{1}{n}$ 的可能性被选中. 如果 s 被选中, 则从由所有 $N\backslash\{i\}$ 的子集族中选一个大小为 s 的子集, 则每个集合有同样的概率 $\begin{pmatrix}n-1\\|S|\end{pmatrix}^{-1}$ 被选中. 如果集合 S 被选中, 则需要给第 i 个参与者 $v(S\bigcup\{i\})-v(S)$ 的支付. 因此, 通过观察 (3.3) 式, 易知在这个随机过程中, 第 i 个参与者在博弈 $v\in G^N$ 中的期望支付就是 Shapley 值.

例 3.4 (i) 给定博弈 $v\in G^{\{1,2\}}$, 对 $i\in\{1,2\}$, 有

$$\Phi_i(v)=v(i)+\frac{v(1,2)-v(1)-v(2)}{2}.$$

(ii) 对于一个可加博弈 $v\in G^N$, Shapley 值等于 $(v(1),\cdots,v(n))$.

(iii) 对于 $S\subset N$, 令 u_S 是无异议博弈 (参见 (1.1) 式), 则 $\Phi(u_S)=\dfrac{1}{|S|}e^S$.

正如在定义 1.27 中描述的那样, Shapley 值满足一些性质. 详尽地, 有下面的命题.

命题 3.5 Shapley 值满足可加性、匿名性 (anonymity)、虚拟参与者性 (the dummy player property) 和有效性.

证明 (可加性) 可加性直接来源于事实: 对于所有的 $u,v\in G^N$, 有 $m^{\sigma}(u+v)=m^{\sigma}(u)+m^{\sigma}(v)$.

(匿名性) 这部分证明分为两部分.

(a) 首先证明

对所有的 $v\in G^N$ 和 $\rho,\sigma\in\pi(N)$, 有 $\rho^*(m^{\sigma}(v))=m^{\rho\sigma}(v^{\rho})$.