

全美经典学习指导系列

# 流 体 动 力 学

〔美〕 W.F.休斯 J.A.布赖顿 著

徐燕侯 过明道 徐立功 陈义良 译

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书涉及流体力学的各个方面,包含超声速流、非牛顿流体等专业知识,是航空学、航天学、土木工程和机械工程学的基础,既适合于大学生、研究生在校学习,又可作为研究人员、相关从业人员的参考指南.本书还含有解方程的一些新知识,是利用计算机实现流体力学的基础.

William F. Hughes, John A. Brighton; Schanm's Outline of Theory and Problems of Fluid Dynamics

ISBN:0-07-031118-8

Copyright © 1999 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill, Companies, Inc.

All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版.未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.

版权所有,翻印必究.

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售.

图字:01-2001-5529 号

图书在版编目(CIP)数据

流体动力学/[美]W.F.休斯,[美]J.A.布赖顿著;徐燕侯等译.—北京:科学出版社,2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7-03-010077-8

I. 流… II. ①休…②布…③徐… III. 流体动力学 IV. O351.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007485 号

责任编辑:鄢德平/责任校对:柏连海

责任印制:安春生/封面设计:槐寿明

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2002年3月第一版 开本:A4(890×1240)

2003年5月第二次印刷 印张:20 1/2

印数:4 001—7 000 字数:587 000

定价:30.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 序 言

一个人要是随便地浏览一下周围环境,看到的東西几乎都是固体.但是,当他想起海洋、大气以及外层空间时,就会清醒地认识到:地球表面和整个宇宙的大部分都处于流体状态.

除去科学家关心的宇宙本质(宇宙主要由气体组成)之外,工程师们所关心的服务于人类的设备,都离不开流体.事实上,无法想像机器、设备和工具是不含有流体的、也不需要用流体力学的原理来设计的.泵、鼓风机、压缩机、喷气发动机、火箭和燃气轮机等就是主要的流体机械.飞机和船舶在流体中运动.大气和气象则受流体动力学规律的控制.所有的机器都需要润滑,而润滑剂就是流体.甚至真空管的工作也是依靠电子流.不管多么复杂或高深的设备,总要用到流体动力学的基本概念.

流体动力学在现代科学工程中具有重要的位置.它是航空航天、机械工程、气象、海洋工程、民用工程和生物工程的基础之一.事实上,它是现今所有科学和工程技术的基础.

本书可以作为大学一年级学生流体力学的独立教材,也可以用作补充教材.本书的特色是广泛地涉及到流体力学各个领域.不管是本科生的课程,还是研究生的课程,都可以将本书作为参考书或补充教材.

本书前几章特别注重于流体运动的基本概念,主要是为初学者写的.前三章是守恒方程的积分形式和微分形式的推导.为了帮助学生深入理解控制体、伯努利方程和流体一般运动中非常重要的概念,本书介绍了众多的例子.在第三章中,对重要方程作了简明扼要的概括和对问题求解技巧进行了一般性的讨论,这些对于初学者是很有用的.

本书各章的安排如下,从第一章至第五章,以及第七章,作为本科生流体力学的初级课程;第六章和第八章已扩展到亚声速和超声速空气动力学,作为本科生流体力学的高级课程.

本书余下的部分涉及当前研究的前沿课题.这些章节的目的是:对于不熟悉这些特殊领域的读者来说,从中可以学到其数学模型的形成、简化等技巧,以及目前的进展等入门知识.如果读者有进一步深入研究的兴趣,则可以追溯各章末尾提供的参考文献.这些参考文献连同本书,可以作为独立研究计划的基础.

在这种教材类型的书中,它覆盖的专题和应用的范围明显地受到限制,不可能包括许多当前关心的领域.例如,书中没有包括流体机械的应用和迅速发展着的计算流体动力学(CFD).但是,就一本导论而言,着重于流体动力学的物理实质和数学描述,无疑是恰当的.深入理解本书介绍的材料,将有助于读者阅读各个专题的最新文献.

本书第三版作了很多修订,增加了一些最新成果,并且使其更具可读性.书中增加了一章全新的内容,即波的运动和稳定性.我们已经大量地运用相位复矢量来描写波的行为,并应用于声波、剪切波和表面波.然后,从波的增长行为自然地导出流动稳定性的概念.

作者感谢 E.W. Gaylord 博士对第十二章给予的有价值的帮助, D.C. Wakefield 和 M. Bathurst 对原稿的打字工作以及 Ruth Davis 对本版的文字处理工作.

W.F. 休斯  
J.A. 布赖顿

# 目 录

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| <b>第一章 绪论</b> .....                  | 1   |
| 1.1 什么是流体 .....                      | 1   |
| 1.2 数学模型 .....                       | 1   |
| 1.3 若干定义 .....                       | 2   |
| 1.4 流动的物理分类和流动的类型 .....              | 5   |
| 1.5 怎样描述流体的运动 .....                  | 7   |
| 1.6 流体力学中的单位 .....                   | 9   |
| <b>第二章 流体静力学</b> .....               | 12  |
| 2.1 压强 .....                         | 12  |
| 2.2 流体静力学的微分方程 .....                 | 13  |
| 2.3 压强的测量方法 .....                    | 14  |
| 2.4 流体对浸没其中物体的作用力 .....              | 15  |
| 2.5 没有剪应力的加速运动流体 .....               | 17  |
| 2.6 表面张力 .....                       | 18  |
| 2.7 小结 .....                         | 19  |
| <b>第三章 流体运动的数学模型</b> .....           | 30  |
| 3.1 引言和方法 .....                      | 30  |
| 3.2 积分方程 .....                       | 30  |
| 3.3 微分方程 .....                       | 40  |
| 3.4 运动学和流体中的应力-应变率关系 .....           | 45  |
| 3.5 纳维-斯托克斯方程 .....                  | 49  |
| 3.6 能量方程 .....                       | 51  |
| 3.7 动量方程、能量方程、热力学方程和伯努利方程之间的关系 ..... | 53  |
| 3.8 小结应用和问题 .....                    | 56  |
| <b>第四章 量纲分析和相似性</b> .....            | 76  |
| 4.1 流体动力学中的相似性 .....                 | 76  |
| 4.2 不可压缩流动的参数 .....                  | 77  |
| 4.3 可压缩流动的参数 .....                   | 78  |
| 4.4 流体中存在自然对流传热时涉及的附加参数 .....        | 79  |
| <b>第五章 边界层流动和管流</b> .....            | 87  |
| 5.1 引言 .....                         | 87  |
| 5.2 外流 边界层 .....                     | 90  |
| 5.3 外流 升力和阻力 .....                   | 100 |
| 5.4 内流 .....                         | 103 |
| 5.5 黏性流动的热效应 .....                   | 108 |
| 5.6 小结 .....                         | 110 |
| <b>第六章 不可压缩势流</b> .....              | 126 |
| 6.1 势流理论 .....                       | 126 |

|             |                           |            |
|-------------|---------------------------|------------|
| 6.2         | 伯努利定理 .....               | 128        |
| 6.3         | 开尔文涡旋定理和涡旋运动 .....        | 128        |
| 6.4         | 速度势和流函数 .....             | 129        |
| 6.5         | 若干简单流动的流型 .....           | 131        |
| 6.6         | 复势 .....                  | 134        |
| 6.7         | 若干简单流动的复势 .....           | 136        |
| 6.8         | 环量和儒可夫斯基定理 .....          | 139        |
| 6.9         | 机翼理论 .....                | 142        |
| <b>第七章</b>  | <b>一维可压缩流动</b> .....      | <b>155</b> |
| 7.1         | 引言 .....                  | 155        |
| 7.2         | 等熵流动 .....                | 157        |
| 7.3         | 正激波 .....                 | 161        |
| 7.4         | 等截面绝热流动(范诺线) .....        | 163        |
| 7.5         | 有加热或冷却的理想等截面流动 .....      | 167        |
| 7.6         | 有摩擦等温流动 .....             | 167        |
| 7.7         | 低马赫数不可压缩流动 .....          | 168        |
| 7.8         | 激波管 .....                 | 169        |
| <b>第八章</b>  | <b>二维可压缩流动气体动力学</b> ..... | <b>180</b> |
| 8.1         | 理想可压缩流动方程组 .....          | 180        |
| 8.2         | 激波-膨胀波理论 .....            | 181        |
| 8.3         | 小扰动理论和线化理论 .....          | 191        |
| 8.4         | 特征线方法 .....               | 193        |
| 8.5         | 超声速飞机 .....               | 199        |
| <b>第九章</b>  | <b>不可压缩湍流流动</b> .....     | <b>208</b> |
| 9.1         | 引言 .....                  | 208        |
| 9.2         | 平均速度的方程 .....             | 208        |
| 9.3         | 统计的描述方法 .....             | 209        |
| 9.4         | 湍流的唯象理论 .....             | 211        |
| 9.5         | 湍流关联 .....                | 212        |
| 9.6         | 各向同性湍流 .....              | 213        |
| 9.7         | 壁面湍流 .....                | 213        |
| 9.8         | 自由湍流 .....                | 217        |
| 9.9         | 最新的发展 .....               | 219        |
| 9.10        | 小结 .....                  | 220        |
| <b>第十章</b>  | <b>高超声速边界层流动</b> .....    | <b>222</b> |
| 10.1        | 引言 .....                  | 222        |
| 10.2        | 边界层方程 .....               | 223        |
| 10.3        | 高超声速层流边界层 .....           | 225        |
| 10.4        | 高超声速湍流边界层 .....           | 228        |
| 10.5        | 空气动力加热 .....              | 230        |
| 10.6        | 小结和讨论 .....               | 231        |
| <b>第十一章</b> | <b>磁流体动力学</b> .....       | <b>233</b> |
| 11.1        | 引言 .....                  | 233        |
| 11.2        | 运动介质的电动力学 .....           | 233        |
| 11.3        | 诱导电动势和端电压 .....           | 236        |

|             |                  |            |
|-------------|------------------|------------|
| 11.4        | 电磁体力             | 236        |
| 11.5        | 磁流体动力学流动的基本概念    | 237        |
| 11.6        | 不可压缩黏性磁流体动力学流动   | 240        |
| 11.7        | 磁流体动力学中的波和激波     | 242        |
| 11.8        | 可压缩流 磁气体动力学管流    | 248        |
| <b>第十二章</b> | <b>非牛顿流体</b>     | <b>255</b> |
| 12.1        | 引言               | 255        |
| 12.2        | 非牛顿流体的特性和分类      | 255        |
| 12.3        | 管内的层流流动          | 259        |
| 12.4        | 管内流动的广义方法        | 262        |
| <b>第十三章</b> | <b>波动和稳定性</b>    | <b>267</b> |
| 13.1        | 引言               | 267        |
| 13.2        | 行波和相位复矢量表达式      | 268        |
| 13.3        | 相速度和群速度          | 270        |
| 13.4        | 色散和衰减            | 271        |
| 13.5        | 驻波               | 272        |
| 13.6        | 声波色散方程的计算        | 273        |
| 13.7        | 从静止壁面反射的声波       | 276        |
| 13.8        | 黏性流体中的剪切波        | 277        |
| 13.9        | 水的表面波            | 279        |
| 13.10       | 关于波动的小结          | 281        |
| 13.11       | 稳定性理论            | 281        |
| 13.12       | 液体射流的稳定性         | 282        |
| 13.13       | 旋转圆筒之间流动的稳定性的稳定性 | 284        |
| 13.14       | 流体之间界面的稳定性       | 287        |
| 13.15       | 小结               | 287        |
| <b>附录</b>   |                  | <b>295</b> |
| A           | 流体的一些性质          | 295        |
| B           | 单位和量纲            | 297        |
| C           | 不同坐标系中的一些基本方程    | 300        |
| D           | 可压缩流动数值表         | 307        |
| E           | 笛卡儿张量            | 311        |
| F           | 矢量恒等式            | 313        |
| G           | 流动测量技术           | 313        |
|             | <b>习题答案</b>      | <b>316</b> |
|             | <b>译后记</b>       | <b>319</b> |

# 第一章 绪 论

## 1.1 什么是流体

研究物体运动的动力学分为两个部分——刚体动力学和变形体(非刚体)动力学.变形体动力学又分为两类——弹性(弹性固体)力学和流体力学.因为现实世界中大部分物体处于流体状态,因此,工程师和科学家就要对流体有所了解.首先要了解什么是流体?流体与弹性固体(例如钢棒)有什么区别?

简单地说,流体没有运动是不能反抗剪力或剪应力作用的,而固体在没有运动的条件下,也能反抗剪力或剪应力的作用.流体通常又分为液体和气体.液体的分子间有凝聚力,所以有一定的体积,但是没有确定的形状.注入任何容器的液体,都将在容器内填满一个与液体自身体积相同的空间,而与容器的形状无关.液体的可压缩性很小,其密度随温度和压强的变化也很小.然而,气体则是由大量运动着的分子组成,分子之间相互碰撞,不断扩散.气体没有确定的体积和形状,气体会充满它所注入的任何容器.对于一定量的气体或者一个气体系统,其压强、温度和体积之间存在一定的关系,即气体的物态方程.

流体力学有着广泛的应用,因此成为整个工程学和应用科学研究的核心和基础之一.管道和沟渠中的流体流动对于土木工程是非常重要的.又如泵、压缩机、热交换器、喷气发动机和火箭发动机等等流体机械的研究,使得流体力学对于机械工程师来说也是很重要的.作为研究空气绕物体流动的空气动力学,则是从事飞机、导弹和火箭设计的航空航天工程师的基本工具.在气象学、水利学和海洋学中,大气和海洋都是流体,因此对流体的研究也是基础.在现代工程中,流体力学与古典学科结合起来形成许多新兴学科,例如流体力学与电磁理论结合成一门磁流体动力学.在新型能量转换装置以及恒星和电离层的研究中,磁流体动力学是至关重要的基础.

由此可见,对于当代的科学家和工程师而言,很好地熟悉流体力学是必不可少的.显然,流体力学及其应用有着非常广阔的前景.在本书中,对于大多数基本概念,我们都用实例加以介绍.一旦掌握了这些基础,读者就可以去阅读更为专门的书籍和研究文献,增进对流体力学特定专题的了解.无论如何,在进行更高级的主题研究之前,先打下牢固的基础是极为重要的,这是一条永恒的原则.

我们将从基础的数学公式到当代的高超声速流动理论和磁流体动力学,通过介绍基本概念,给出流体力学学科的概貌.

## 1.2 数学模型

在刚体力学中,我们通常提出这样的问题:一个质点的空间位置怎样随时间变化?从这个信息出发,所有其他的问题(例如速度和加速度)都可以回答了.设质点的空间位矢为  $\mathbf{r}$ , 则  $\mathbf{r}(t)$  是最重要的函数.速度和加速度就是  $d\mathbf{r}/dt$  和  $d^2\mathbf{r}/dt^2$ .

然而,在流体力学中我们不是处理单独的质点,而是研究连续介质.事实上,我们不必去留意流体中各个质点或一些小滴的轨迹.而是要关心:在空间的某些点上(相对于任何一个固定的坐标系),流体的速度、加速度和热力学参量随时间变化的函数关系是什么?在时间过程中,空间点上的流体不断地为流过来的流体所更新.因此,我们不关心各个单独流体质点的轨迹,也不管某个特定时间是哪个流体质点在这个位置上,我们只关心空间某些点上的历史过程.这种描述流体的方法称为欧拉描述方法,与之相反的则是拉格朗日描述方法,它像刚体动力学中那样,记录各个流体质点的轨迹.这些问题,我们将在第三章中详细地讨论.

刚才我们已经提到过**连续介质**这一术语.针对流体来说,它的确切意义是什么?我们假设流体质点(或分子)之间的距离非常小,更确切地说,流体分子运动的平均自由程非常小.即相对于流体力学问题中的任何物理尺度来说,非常小.在空气动力学中,机翼的厚度就比绕流空气分子的平均自由程大好几个量级.因此我们假定:所有(微积分中的)数学极限过程都是有意义的,同时,任何体积的流体都能够继续分割成更小的体积,而且保持流体连续介质的特性不变.显然,这种分割最终将破坏流体的连续介质特性.但是我们假定,这时体积的尺度已如此之小,已经进入微观世界,超出了我们讨论的范围.

然而,也有例外的情形.在稀薄气体流动中,分子平均自由程就可以和问题中物理尺度的量级相同.于是,流体的连续介质假定不再成立,我们只能采用严格的微观方法,例如自由分子流理论.本书不涉及稀薄气体理论,自始至终只讨论均匀各向同性的连续介质,严格地限制在能够用宏观方法处理的范围内.

流体力学中有五个基本变量:三个速度分量和两个热力学参量.例如压强、温度、密度、焓和熵中的任何两个热力学参量,都足以确定流体的热力学状态,因此也可以确定出所有其他的热力学参量.一旦规定了速度矢量  $\mathbf{V}$  和两个热力学参量随时间和空间变化的函数,我们就可以完全确定出流体的流场.因此,我们需要五个独立的方程.通常是三个运动方程的分量方程、一个连续方程和一个能量方程.为了便于用三个变量(温度、密度和压强)来写出能量方程,往往还引入一个物态方程.在这种情形下,一共有六个变量和六个方程.在湍流中,同样数目的方程中还会出现附加的未知量,这就破坏了问题的完备的理论模式.

在不可压缩的流体中,由于密度是已知的.为了完整地描述流体的运动,只需求出压强和速度,因此不需要能量方程,此时温度与压强和速度没有耦合关系.如果需要温度的信息,就一定要利用能量方程来求解温度.

### 1.3 若干定义

流体的流动可以按许多不同的方法来分类.让我们来考察某些不同型的流动,并把这些流动与我们日常的经验 and 观察联系起来.但是,首先需要定义一些术语,只有这样,我们才有讨论流体各种流动类型的统一语言.然后,我们再来给出更为严格的定义.现在,我们先来给出一些简单并有启发性的定义.

**压强** 流体静力学(流体处于平衡状态)中的压强定义是作用在浸没于流体中物体表面上单位面积上的法向压缩力(正应力).压强可以通过浸没于流体中单位立方体(单位尺度)表面上作用力来测量.我们必须设想该立方体不会干扰流体,所以,流体中一点的实际压强是作用在该立方体表面上的力除以表面面积,而且是当该表面面积趋于无穷小时的极限.在静止的流体中,一点的压强是各向同性的,即立方体各个面上的压强都相同,而且不管该立方体在空间的取向如何,各个面上的压强也都相同.这种各向同性的压强称为**流体的静压**.这也是热力学中所用的压强(气体定律),而且是热力学的特性之一.如果流体中的压强随空间的位置不同而变化,则在任何固定的流体体积上将存在一个净压力,一定要由某个体力来平衡,例如重力.否则,净压力将使流体产生加速度,导致流体流动.

在流体力学的状态下(当流体运动时),流体中不仅存在有压强,而且还有其他的切向力,即切应力.然而,压强仍然是各向同性的,并且用上述同样的方法来定义.但是在测量作用在该面积上的正应力时,必须使该面积和当地的流体一起运动.有时在运动的气体中会发生困难,因为立方体的各个表面的正应力并不完全相同.我们仍旧可以定义一个流体静力学的各向同性的压强.不过由于流体黏性的影响,某些方向上将会出现小的附加力.这些概念将在下两章中再作更为详细讨论.

**黏性、摩擦和理想流动** 所有的流体都有黏性,黏性引起摩擦.在物理问题中,黏性的重要性取决于流体的类型和其物理位形,即流动图像.如果流动中的摩擦是可以忽略的,我们称为理想流动.摩擦可以由黏性或湍流引起.

粗略地讲,黏性是**运动流体对剪切反抗的度量**(注意,流体和固体不一样,流体没有运动是不能反抗剪切变形的).想像两块大尺寸的平行平板作定常的相对运动,见图 1-1.两平板之间的流体具有图示的线性速度剖面(假设沿平面的运动方向上没有压强梯度).流体和平板之间没有相对滑移,即在流体和固体的接触面上,流体的速度一定和固体的速度相同.如果我们讨论一块小的流体元,如图 1-1 所示,作用在顶部的剪应力  $\tau$ (在这种情形下,作用在顶部的剪应力在数值上和作用在底部的剪应力相等)可以写成

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.1)$$

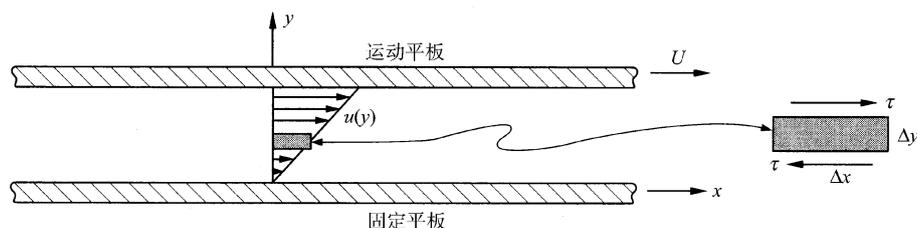


图 1-1 两平行平板之间的黏性流.速度  $u$  沿  $y$  方向呈线性分布,有  $u(0)=0$ ,  $u(l)=U$

其中  $\mu$  是黏性系数,是剪应力和速度梯度之间的比例常数.黏性系数的单位在英国的工程单位制(以后简称英制)中是  $\text{lb}\cdot\text{s}/\text{ft}^2$ ;在国际单位制中是  $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ .同时,黏性系数在测量中常用的单位称为 P(泊),  $1\text{P}=1\text{dyn}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$ .黏性系数与质量密度之比称为**运动黏性系数**,通常记作  $\gamma$ .

液体的黏性系数随温度的增加而减小(我们在寒冬的早晨启动汽车时就会感受到),但是气体的黏性系数都随温度的增加而变大.流体的黏性系数的大小还依赖于压强,但是,这种依赖关系相对于对温度的依赖关系而言,在工程问题中通常是微不足道的.

剪应力和速度梯度之间这样一个简单的关系式称为**牛顿关系式**.通常,遵守牛顿关系式的流体称为**牛顿流体**(在三维空间中,牛顿流体更为一般的表达式将在以后导出).

尽管这个线性的牛顿关系式只是一种近似,但是却很好地适用于一类范围很广的流体.然而,对于某些物质而言,剪应力不只是速度梯度的函数(速度梯度和剪应变率是相同的),通常还可以是应变的函数.这种物质称为**黏-弹性流体**.即使对于剪应力只依赖于速度梯度的简单黏性流体,也可以不是牛顿流体.事实上存在着这样的流体,其剪应力和应变率之间有着相当复杂的非线性关系.如果流体的应力-应变关系还取决于事前的工况,即应变状况,则称为**触变流体**(例如印刷油墨).

另一种流体类型具有塑性行为,其特征是有一个表观的屈服应力,在达到表观的屈服应力之前,流体的性态像固体一样,一旦超过这个表观的屈服应力,则和黏性流体一样.一些油脂和淤泥的性能就是这样.塑性流体的另一个极端情形是:在低应变率时,黏性系数很小,很容易流动,但是随着应变率的增大,变得越来越像固体(例如流沙).这种流体称为**膨胀流体**.图 1-2 中用图线说明了这些流体的特性.

水、空气和气体本质上是牛顿流体,但是在流体力学中,对于黏-弹性流体和非牛顿流体的研究,都是非常重要的,虽然通常不是很熟悉和关注.

黏性使流体中能够产生内摩擦力或剪应力.除此之外,湍流也可以在流体中产生剪应力.我们将在下节阐述.

如果流体没有黏性,并且不是湍流,这时的流体称为理想流体,或者更确切地说,这时的流动称为理想流动.因此,理想流体中没有内摩擦,也就没有内耗散或损失.事实上,真正的理想流体是没有的.但是在一定的情形下,至少在特定的流动区域中,某些流体的流动非常接近于

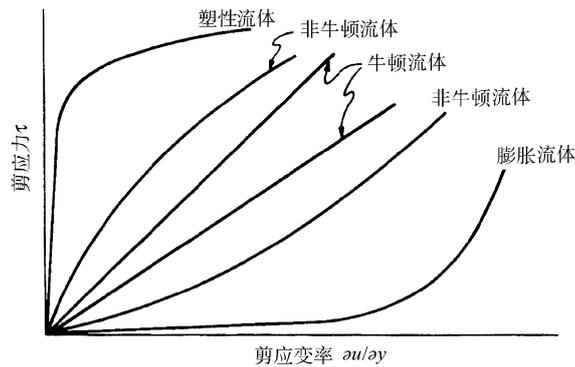


图 1-2 黏性流体和塑性流体的类型

理想流动的条件,在分析处理中可以当作理想流体.例如在空气绕物体的流动(空气动力学)中,除去邻接于机翼或物体表面的薄层(称为边界层)之外,在其余的流动区域中,空气动力学中都处理成理想流动.我们将会了解,将真实流体的流动分成不同的区域,分别可以处理成理想流动区域和黏性或湍流的流动区域,这会带来很大的方便.

**层流和湍流** 层流和纯黏性流两个术语是同义词,是指流体的流动是分层或分片的.湍流则与之相反,在湍流中,速度分量在其平均值上还叠加有随机的湍流脉动(见图 1-3).嵌入层流中的染料和墨水的流动会显示出一条细线,而且总是由相同的流体质点组成.但是在湍流中,染色线会很快地变粗,并且随着流动会和周围的流体混合,我们将会观测到许多细丝和混浊的流团逐渐变粗和弥散.层流的一个生动例子是将浓浓的糖蜜从瓶子里倾倒出来所产生的流动.

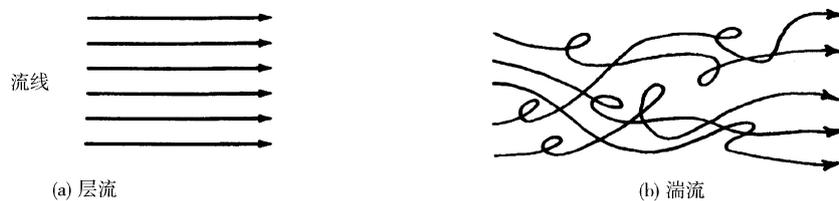


图 1-3 层流和湍流.图中曲线表示流体质点的路径

怎样来确定流动是层流还是湍流呢?对于特定的流体,则由流动的速度和通道的形状或大小来确定.当流动的速度变大时,流动就会经过一个过渡状态,从层流变为湍流.在自然界中,层流和湍流都存在.不过,湍流更为普遍.

观察从香烟和烟囱中升起的烟柱,我们就看到由层流到湍流的过渡的例子.在开始的一段距离上,烟以平缓的层流方式升起.然后是相当突然地,烟柱开始混合,从而转变成湍流,与此同时,烟柱迅速变粗并且扩散.湍流帮助烟柱扩散,同时将烟扩散成更大范围的混沌运动.

黏性效应一直存在于湍流中,但是被占优势的湍流剪应力所掩盖掉了.

**表面张力** 用表面张力这个术语来表达液体表层的表观应力是不确切的.这一表层的特性像一张展开的薄膜,会出现弯曲的液面(如液-气的分界面,导致两边出现压力差.实际上,表面张力是一种和任何流体-流体之间分界面有关的能量,而液-气分界面是最常见的一种类型.由于液体表面像一张薄膜,这就是为什么液体会出现毛细管现象,以及雨滴几乎是球形的原因.

两种流体分界面两边的压力差  $\Delta p$  由表面张力  $T$  (用单位长度上的作用力来度量)来平衡.任何一点分界面的特性,可以用两个曲率半径  $R_1$  和  $R_2$  (在两个垂直于分界面并且相互正交的平面上的曲率半径)来表征,得出  $T(1/R_1 + 1/R_2) = \Delta p$ . 根据众所周知的几何关系,可以

利用曲面方程来给出曲率半径的表达式。

**可压缩流和不可压缩流** 习惯上将流体分成两类——**气体和液体**。气体是可压缩的，其密度很容易随着温度和压强变化。另一方面，液体是极难压缩的。所以，对于大多数问题来说，我们可以认为液体是不可压缩的。只有在研究声波在液体中传播的这类问题时，人们才需要考虑液体的可压缩性。

流体的密度是一个热力学参量，它依赖于流体的热力学状态。习惯上将密度  $\rho$  表示成压强和温度的函数。这个关系式可以从唯象的实验给出，也可以从微观的研究推出。这就是熟知的物态方程。对于理想气体，物态方程可以写成  $p = \rho RT$ ，其中  $R$  是常数。对于真实气体，由于它偏离了理想气体，就要用更为复杂的物态方程。对于液体，密度与温度之间的关系和固体一样，有一个膨胀系数，而密度对压强的依赖关系可以写成

$$dp = \beta d\rho / \rho \quad (1.2)$$

其中  $\beta$  是体积压缩系数。对于水来说， $\beta$  约为  $3 \times 10^5$  psi。所以水的密度的微小改变，都需要有很大的压强。（对于大气中的空气，在绝热压缩时的  $\beta$  约为  $20$  psi。）因此，对于绝大多数的实际应用而言，认为液体是不可压缩的。事实上，空气在某些压强有微小变化的流动中，也可以认为是不可压缩的。（这是亚声速空气动力学的情形，低马赫数流动中的空气假定是不可压缩的。）

**亚声速流和超声速流** 在可压缩流中，速度小于声速的流动（**亚声速流**）和速度大于声速的流动（**超声速流**）之间存在着原则性的区别。（空气在标准条件下，声速约为  $1080$  ft/sec，或  $810$  mi/hr。）亚声速流和超声速之间的一些差别将在以后指出，但是记住这一点是很有用的，即激波只能在超声速中出现。

马赫数  $M$  是一个相对速度的度量，定义为流体的速度与当地声速之比。

$$M = V/a \quad (1.3)$$

其中  $V$  是流体速度，而  $a$  是当地的声速。当  $M < 1$  时，我们称为**亚声速流**；当  $M > 1$  时，我们称为**超声速流**。对于绕物体的流动，当  $M$  约小于  $0.3$  时，流动可以近似地看成是不可压缩的。在一个被绕流物体（例如飞机，导弹）上，当一部分区域上的流体绕流是  $M < 1$  时，而其余部分上的流体绕流是  $M > 1$  的，则在该物体的某些点上的绕流是  $M = 1$ ，这种情形称为跨声速流。在同一物体的同一时间上，为什么绕流中同时会有  $M < 1$  和  $M > 1$  的区域呢？原因在于当地声速和流体速度在物面上都是变化的。一般来说，温度在流体流过物面时是变化的，因此，相应的当地声速也是变化的。

**定常流** 定常流的含义如下：在空间的任何点上，流动中的速度分量和热力学参量都不随时间改变。实际上，如果跟随单个流体质点来观察，则在流动过程中，该质点的热力学参量和速度分量都是可以变化的。但这并不影响大局。在流体力学中，我们经常要问的是：在空间的特定点上发生了什么情况？而并不去关心在任何特定的时间上是什么流体质点出现在这里。在这种意义上，定常流中的定常是指：在空间的任何点上都没有什么情况随时间变化。运动图像的快照上所看到的一定是相同的，分不出是什么时间拍的。要理解的重点是：即使在定常流中，空间中任何一点上的流体质点也可以有加速度。流体质点可以流走，但是空间的任一特殊点上，一个流体质点的特性就是所有流体质点到达该点时的特性。

**流动分类和类型** 我们已经讨论了为流体流动分类的一些基本定义。现在我们可以了解到在实际物理问题中会出现什么样的流动类型，并以此来分类。我们将会看到可以作如下的分类：不可压缩-层流、可压缩-理想-超声速流、可压缩-层流、不可压缩-湍流等等。

#### 1.4 流动的物理分类和流动的类型

有许多将流动分类的方法，例如刚才提到的按流动的结构分类，或者根据流动的情况和形状分类。后者也是可以用来进行分类的，现在举出一些这种的类型。

基本上存在两种流体形状或流动空间区域的类型：外部流动和内部流动。内部流动是指管

道和渠道中的流动,以及类似的限制在一定结构中的流动.外部流动则是流过物体的流动,例如空气动力学中的绕流.下面来更详细地研究这类流动.

**外部流动** 围绕着物体的流动区域可以分成三个区域.远离物体的流动本质上是理想的,因为其中摩擦力并不重要.邻接物体的流动发展出一个剪切层(因为在物体的表面上流体的相对速度必须为零),剪切层中黏性和湍流是必须考虑的.这一内摩擦层称为**边界层**.边界层可以是层流的,也可以是湍流的.物体后面的尾迹(第三个不同的区域)发展出一个通常是高湍流度的低压区(因此由尾迹产生阻力).图 1-4 给出了有尾迹的绕圆柱流动.尾迹是由于边界层从物体表面上分离出来所形成的.事实上,物体后面的理想流动区域(尾迹以外的区域)和尾迹区域的分界处,很清楚是一层剪切层(图 1-4(a)).

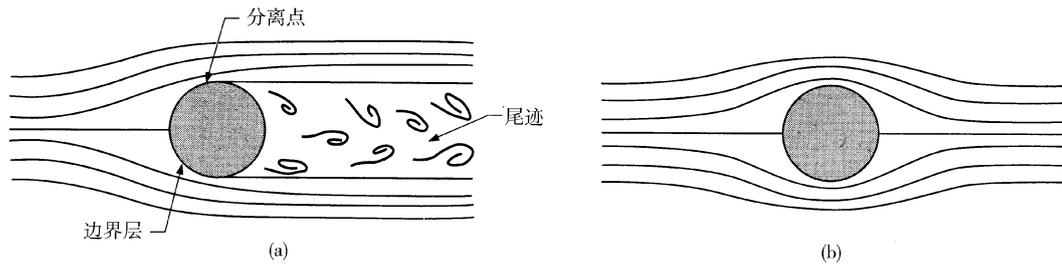


图 1-4 (a) 绕圆柱流动的边界层和分离;(b) 无边层分离的理想流动

由流体黏性所带来的边界层是尾迹形成的原因.如果完全没有黏性,那么在这种绝对的意义下,流体是无摩擦的,流动就不会分离,也就不会有尾迹.如果不存在尾迹,物体前后的流动图像(理想情形)一定是对称的,则物体前面的压强与物体后面的压强相同,那么浸入流体流动中的障碍物上就没有阻力.没有阻力的结论与实验相矛盾.这使我们认识到,所有流体都一定有一些内摩擦.流体力学作为一门科学在发展的早期,总认为黏性可以忽略,因此在数学上将流动当成处处是理想的.于是在理论上预言:浸入流动中的障碍物不受阻力.因为这个结论与实验结果相矛盾,所以称为**达朗贝尔佯谬**.直到 19 世纪的初期,普朗特(德国的流体动力学家)引入边界层概念,才搞清楚并不存在什么佯谬,只要计及黏性,不管多小的黏性系数,都能带来相应的尾迹,并产生阻力.

如果物体是流线型的(图 1-5),即尾缘做成很平缓光滑的轮廓,就不会发生分离,整个边界层紧贴在物体上.流线型可以充分降低阻力,所以绝大多数空气动力学部件(机翼等)都是流线型的.在这种情形下,除去边界层和一层很薄的尾迹之外,环绕物体的流动都是理想的.正如我们将要看到的,在这种情形下的边界层很薄,除去计算摩擦阻力之外,流动图像可以很好地用理想流体的流动图像来描写.在亚声速空气动力学中,升力由(理想的)位势流来确定,而阻力在实质上是由边界层来确定的.

边界层本身可以是层流的,也可以是湍流的,依赖于所包含的参量.在大多数的实际情形

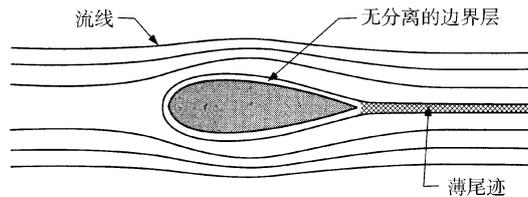


图 1-5 绕流线型物体的流动.尾缘缓慢地变尖,防止了边界层的分离

中,边界层沿着物面从层流转变成湍流.边界层过渡到湍流,通常会延迟分离.但是,在一部分流线型物体中,分离并不明显,最后湍流边界层并入尾迹,如图 1-6 所示.

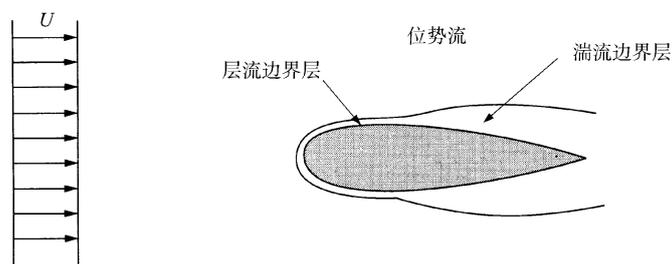


图 1-6 边界层无分离但有转换的亚声速流.边界层增厚

如果流动速度很小,则密度的变化就很小,流动可以认为是不可压缩的.(这个概念将在第七章中证明.)于是流动图像如图 1-5 或图 1-6 所示.

如果流动速度增加到马赫数大于 0.3,则密度的变化就显得重要了.但是,一般的流动图像仍旧如前面的各图所示.不过,当马赫数的数值增加到超过 1 之后,就会出现激波,流动将如图 1-7 所示.

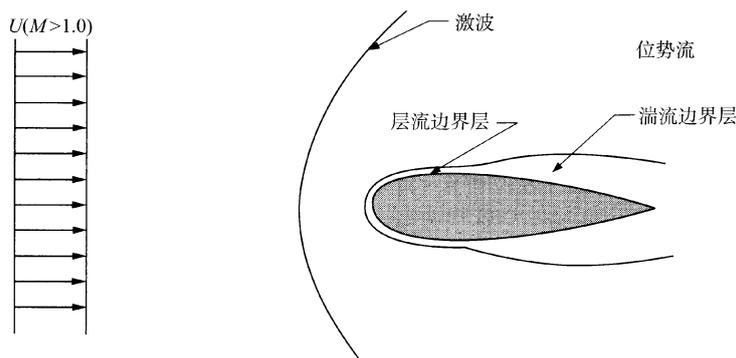


图 1-7 超声速绕流

如果马赫数的数值增加到超过 6,则离解和电离就会发生了.

**内部流动** 在管道、渠道和喷管内,以及在流体机械中,流体的流动受到壁面的限制,这种流动就是通常所指的**内部流动**.对于气体而言,内部流动在通道内的主要部分可以近似地认为是理想流.虽然如此,但是在管壁上发展出边界层(通常是湍流的).在既是黏性又是湍流的流动中,边界层厚度随着流动向下游增加,最后扩展到渠道或管道的整个横截面上.

现在,我们应该来作出专题的划分.如图 1-8 所示,从左到右,一般的是从最简单的到最复杂的.这些专题的划分完全是任意的,代表了由不同的特殊的数学方法表征的流动类型.

还有另一种流动的分类方法,也许更容易理解一些,这是按流动发生的物理背景来划分的.我们已经尽量将每章的结果应用于各种实际问题,因此本书主要是按应用来划分的.通常在标准的教科书中混合分类.我们能够按照下述专题分章,例如涡轮机、明渠流动、空气动力学、以及波动和声学(提到一些).我们在全书的正文以及习题的解答中,自始至终地穿插着讨论了许多上述问题的应用.

### 1.5 怎样描述流体的运动

为了描述流体的流动,我们通常要提出这样的问题:什么是流体的性质?其中哪些是热力

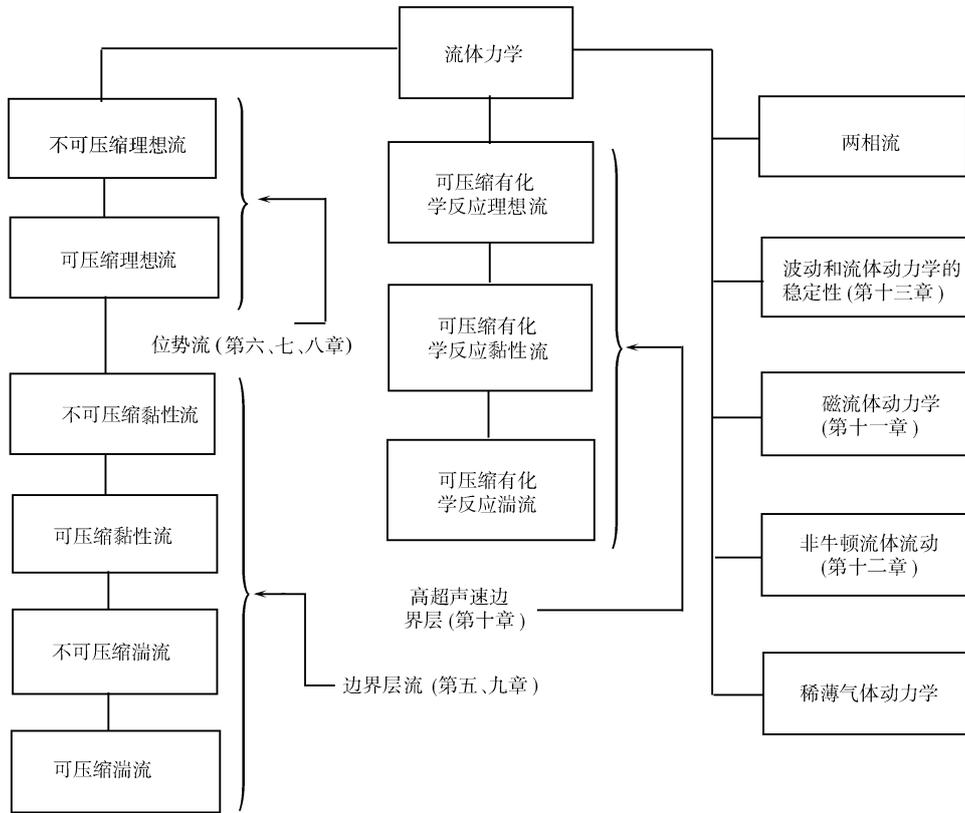


图 1-8 流体力学的专题分类

学的性质？哪些是力学的性质？以及空间特定位置上特定时间的速度矢量和加速度矢量是什么？一般地说，我们不去观察单个的流体质点。我们首先建立一个坐标系，以确定空间中点的位置，就像地图上的经纬度一样。于是，我们就可以描述一个空间点上随着时间的变化所发生的事情。不同的流体质点不间断地通过该点，如果通过该点时，所有的流体都作着同样的运动，并且有着同样的性质，则我们说该点流动是定常的。（流体质点可以有速度和加速度，但是对于定常流动而言，这些量都不随时间变化。）

因此，在流体力学中，我们通常用空间坐标来表示“场的位置”或空间的位矢  $\mathbf{r}$ 。这种坐标对时间的导数是没有意义的，例如  $dx/dt$ 。于是，流体力学的主要问题是求出作为位矢  $\mathbf{r}$  和时间  $t$  的函数的速度矢量（以及其他特性量）。这种坐标系称为欧拉坐标系，是以 18 世纪著名的数学家 L. 欧拉的名字命名的。

欧拉坐标系和刚体力学中所用的拉格朗日坐标系相反（有时拉格朗日坐标系也在流体力学中用于特殊的问题）。在拉格朗日坐标系中，质点的位矢可以表示成  $\mathbf{r}(t)$ 。坐标确定出流体质点的空间位置，并且是时间的函数。这时速度就是  $d\mathbf{r}/dt$ ，加速度就是  $d^2\mathbf{r}/dt^2$ 。

显然，在欧拉坐标系中， $\mathbf{r}$  对时间  $t$  的导数是没有意义的，必须用特殊的方法来表述速度和加速度，我们将在第三章中讨论这种方法。不过，必须记住，速度和加速度都是矢量，不管怎样表述它们，速度和加速度矢量本身在欧拉表述和拉格朗日表述中都是一样的。

有时初学者会感到疑惑：在“定常流”中，流体怎么会有加速度。我们必须记住，定常流是指空间的固定点上（随时间）发生什么情况。如果我们跟着一个加速的流体质点一起运动，即使在定常流中，也会观察到速度随时间的变化。总之，在定常流中，当流体质点经过流场中任意给定的位置时（即空间中任意给定的点时），每一个流体质点都表现出有相同的行为，具有相同的性质。

## 1.6 流体力学中的单位

本书中将给出流体力学的定律,并将其表达成数学方程的形式.这些方程不依赖于所用的单位制.目前,全世界有两种广泛应用的单位制:英国工程制(English engineering system)和国际单位制(Le Système International d'Unités).世界上大多数国家已经用国际单位制来代替英制.但是在工程实际中,英制仍在广泛地应用,也许还将持续一个相当长的时期.因此,有必要精通这两种单位制.在附录中,我们将给出单位制更为完整的讨论.这里只作简要的介绍.

在任何一个特定的单位制中,一般都有两种方法,可以用来得出流体力学中的一套协调的单位.一种是采用  $M$ 、 $L$ 、 $T$  和  $\theta$ (质量、长度、时间和温度)作为基本量纲,另一种则以  $F$ 、 $L$ 、 $T$  和  $\theta$ (力、长度、时间和温度)作为基本量纲.一旦选定基本量纲之后,根据定义和定律,所有其他物理量的量纲都可以用基本量纲表示出来.(如果要研究电的现象,还需要再任意选定一个电学的量纲,例如电荷).

在  $M$ 、 $L$ 、 $T$ 、 $\theta$  和  $F$ 、 $L$ 、 $T$ 、 $\theta$  两者之间的选择是任意的,但是两者一定是关联的,根据牛顿第二运动定律,即力=质量 $\times$ 加速度( $F=ma$ ),可以相互转换.例如,我们选定 lbf(磅力)为力的单位,则单位质量的物质在 1lbf 力的作用下,其加速度为  $1\text{ft}/\text{sec}^2$ .这个单位质量称为 1slug.在国际单位制中,力的单位是 N(牛顿),相应的质量单位是 kg(千克).1N 的力使 1kg 的物体产生的加速度是  $1\text{m}/\text{s}^2$ .

在重力作用下,1slug 质量物体的加速度为  $g\text{ft}/\text{sec}^2$ (这里  $g$  是由重力所产生的加速度).因此,作用在 1slug 质量上的重力为 32.174lbf(在地球的标准海平面上).1slug 质量的物体在地球表面的“重量”为 32.174lbf.1kg 质量的物体在地球表面上受到  $g\text{N}$  的力的作用,其中  $g$  在地球的标准海平面上为  $9.807\text{m}/\text{s}^2$ .

与牛顿定律无关的,还有其他的方法将质量和力联系起来.1lb(磅质量)的质量定义为在标准海平面上受到地球 1lbf 的力吸引的物体的质量.类似的,在国际单位制中,1kg(千克质量)的质量可以定义为在标准海平面上受到地球 1kgf(千克力)吸引力的物体的质量.为了满足牛顿第二定律以及量纲的一致性,必须引入一个变换系  $g_c$ (有单位的),使  $F=ma/g_c$ (其中  $F$  用 lbf,  $m$  用 lb,或者  $F$  用 kgf,  $m$  用 kg),其中  $g_c$  在数值上等于地球标准海平面上的重力加速度  $g$ .因此

$$\text{英国工程制中: } g_c = 32.174 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2},$$

$$\text{国际单位制中: } g_c = 9.807 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}.$$

在本书中,我们用了英国工程制和国际单位制,可以总结成下述附表.必须注意,如果在我们所用的单位制中,质量单位用 lb,力的单位用 lbf,则在所有的动力学方程中,都必须加上一个变换系数  $g_c$ .开始时,这种单位系统经常引起混乱,不过定义了质量单位 slug 和 kg 之后,我们不再需要引入  $g_c$ , $g_c$  不再出现了.贯穿本书的单位制中, $g$  始终理解成是当地的重力加速度.从 lb 到 slug 的变换是很简单的,1slug=32.174lb,所以  $g_c$  的数值就是变换系数.

| 量纲 | 英国工程制   | 国际单位制  |
|----|---------|--------|
| 力  | lb(磅)   | N(牛顿)  |
| 质量 | slug(斯) | kg(千克) |
| 时间 | sec(秒)  | s(秒)   |

续表

| 量纲   | 英国工程制                   | 国际单位制                      |
|------|-------------------------|----------------------------|
| 长度   | ft(英尺)                  | m(米)                       |
| 压强   | lb·ft <sup>-2</sup>     | N·m <sup>-2</sup> = Pa(帕)  |
| 速度   | ft·sec <sup>-1</sup>    | m·s <sup>-1</sup>          |
| 加速度  | ft·sec <sup>-2</sup>    | m·s <sup>-2</sup>          |
| 黏性系数 | lb·sec·ft <sup>-2</sup> | N·s·m <sup>-2</sup> = Pa·s |
| 绝对温度 | °F(华氏度)                 | K(开尔文)                     |
| 密度   | slug·ft <sup>-3</sup>   | kg·m <sup>-3</sup>         |
| 比重   | lb·ft <sup>-3</sup>     | N·m <sup>-3</sup>          |

## 例 题

下面叙述了一些简单的实验,这些实验说明某些流体流动的特性:

- 1.1 将少量糖浆或糖蜜倒入盘中,再在糖浆上倒一些牛奶,并试着将它们混合起来.此时发生什么情况?

**解** 我们会看到,黏性如此之大,以致搅拌引起的混合是层流的,而且混合相当缓慢.湍流混合要远快于层流混合,为什么?在稠的糖浆中也有分子扩散,但是相对于混合效应来说,是微不足道的.

- 1.2 观察从香烟升起的烟柱.请注意,烟柱是如何从层流状态开始,然后突然地变成湍流的.

**解** 随着烟柱的升起,流动变得不稳定了,最后发展成湍流.

- 1.3 打开自来水龙头,将其调整到水流呈一非常细的层流细流.在水龙头下面几英寸的地方将出现什么情况?

**解** 流动再一次变得不稳定而成为湍流.

- 1.4 在上例中再增加流量,将会发生什么情况?

**解** 自来水管中的水流将变成湍流,所以水流离开水龙头时就是湍流的.

- 1.5 在有风的日子观察低空的云系,特别是大雨时的云系.云系的流动是湍流的吗?它与水龙头出来的流动有着不同的尺度吗?

- 1.6 设有点燃的香烟或由管道所产生的上升烟柱.取一铅笔并保持水平地放在烟流中.观察一段时间,烟流绕过铅笔,并从铅笔的两侧发生边界层分离.通过向管道或香烟吹气,能产生出浓烟柱,则效果最好.

- 1.7 在前面的实验中,烟为什么会升起?

## 补 充 习 题

- 1.8 1slug 质量的物体在地球表面上有多重?

答案:32.2lbf.

- 1.9 1lb 质量的物体在地球表面上有多重?

答案:1lbf.

- 1.10 月球的重力加速度约为地球上重力加速度的 1/6.问 1lb 质量的物体在月球表面上有多重?

答案:1/6lbf.

- 1.11 重量经常以 kgf 为单位.问 1kg 质量的物体在地球表面上有多重?

答案:1kgf.

- 1.12 N 是专门的重量单位.一物体重 1N,则用 kgf 来计量,其重量是多少?

答案:0.102kgf.

- 1.13 设一悬浮在空气中的球形肥皂泡.你能说出肥皂泡内的气压大致是多少吗? 如果给你肥皂泡的直径  $D$  和肥皂泡薄膜的有效表面张力  $T$ ,则其内部的气压是多少?

答案:高出大气压力的部分  $\Delta p = 4T/D$ .

- 1.14 空气平台是一个很大的工作平面,用于将重物支撑在一空气的薄层上,使得重物在移动中受到的摩擦阻力很小.空气从工作平台表面上密布的小孔吹出.设一块  $1\text{m}^2$  重的平板放在空气平台上,气垫厚  $1\text{mm}$ ,为使重平板沿工作平台以速度  $1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  运动,若黏性系数  $\mu = 2.18 \times 10^{-5} \text{N}\cdot\text{S}\cdot\text{m}^{-2}$ ,则需要多大的推力?

答案:  $2.18 \times 10^{-2} \text{N}$ .

- 1.15 若用机油来代替上题中的空气,其黏性系数  $\mu = 0.10 \text{N}\cdot\text{S}\cdot\text{m}^{-2}$ .试对比空气和机油的摩擦特性.将答案的单位转换成 lbf,再进行比较.

## 第二章 流体静力学

### 2.1 压强

在开始流体力学的实际研究之前,有必要先讨论一下流体静力学.这是因为流体静力学可以将一些常识直接应用到真正的工程问题中去,而且不需要涉及复杂的概念.在流体静力学中压强的概念特别重要.例如确定水对水坝的作用力,水对水中物体的作用力,一般都离不开压强.还有海洋深度勘测,远距离物体探测并营救困于深水的人们都是近年来的热点.

压强定义为应力,或单位面积上的表面力,

$$p \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.1)$$

在真实流体中,当我们假设面积元趋于零时,将出现流体连续性不再成立这个问题.因此,连续性假设与导数和微分的数学定义存在矛盾.这个矛盾也出现在流体力学微分方程的导出过程中.但是,我们可以这样来解决,假定在所有的感兴趣的宏观尺度上,流体是连续介质.

让我们来考察一个盛有静止液体的容器.设想从中取一小块液体体积,由于它没有加速度,因此受到的合力为零.为了说明问题,我们特别选择如图 2-1 所示的一个体积元.

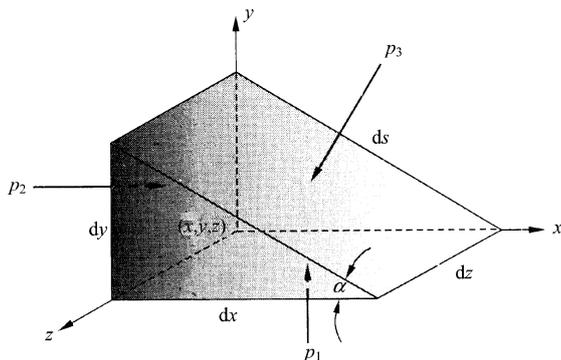


图 2-1 作用在流体体积元上压力的平衡

因为流体中没有相对运动,于是流体中的剪应力应该处处为零.惟一作用在体积元上的表面力沿表面的法向(压强).同时,惟一的体积力来自地球的重力场,沿着  $y$  的负向.因此,我们得出  $x$  方向的合力为

$$p_2 dy dz - p_3 dz ds \sin \alpha = 0$$

其中  $ds \sin \alpha = dy$ , 因此,  $p_2 = p_3$ . 在  $y$  方向上<sup>①</sup>:

$$p_1 dx dz - p_3 dz ds \cos \alpha - \frac{1}{2} \rho g dx dy dz = 0$$

其中  $\rho$  为流体的质量密度,且有  $ds \cos \alpha = dx$ , 给出

<sup>①</sup> 在本书中,英制以 slug[斯(勒格)]为质量单位,国际单位制中以 kg 为质量单位.因此密度  $\rho$  的单位是 slug/ft<sup>3</sup> 或 kg/m<sup>3</sup>,重度  $\gamma$  的单位是 lbf/ft<sup>3</sup> 或者 N/m<sup>3</sup>.  $\gamma$  定义为  $\gamma = \rho g$ . 由于本书中只将 lb 用于力的单位,在一般情况下,不再加下标 f, 记作 lbf. 关于单位与量纲的讨论见附录 B.

$$p^1 - p^3 - \frac{1}{2} \rho g dy = 0$$

因为上式第三项远小于前面两项,所以

$$p^1 = p^2 = p^3$$

由于体积元的摆放位置与方向是可任意选取的,因此,我们已经证明如下结论:静止流体中任意一点上的压力在所有方向都是相等的,即压强是各向同性的。

在英国工程单位制中,压强单位是  $\text{lbf}/\text{ft}^2$  或者  $\text{lbf}/\text{in}^2$ ,后者记作 psi ( $1\text{psi} = 1\text{lbf}/\text{in}^2$ )。在国际单位制中,压强的单位定义为  $\text{N}/\text{m}^2$  或者 Pascal(帕斯卡),记作 Pa(帕)。  $1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$ 。因为  $1\text{Pa}$  压强非常小,因此,常用的压力单位是  $\text{kPa}$  和  $\text{MPa}$ 。为了对国际单位制中的压强大小有一个感性认识,1个大气压强 ( $14.7\text{psi}$ ) 约为  $101\,000\text{Pa}$ ,即  $101\text{kPa}$  或  $0.101\text{MPa}$ 。

压强与大气压强的差值称为表压。在许多问题中,重要的只是压强差,所以表压用起来很方便。因为经常也要用到绝对压强,例如在作为理想气体定律的物态方程中,就是这样。所以在应用中,一定要小心加以区分。在英国工程单位制中,压强单位是  $\text{lbf}/\text{ft}^2$ ,在表示绝对压强时记作 psia,在表示表压时记作 psig。

## 2.2 流体静力学的微分方程

我们定义流体的平衡状态为:流体的每个质点或者都处于静止状态,或者相互间都没有相对运动。上述两个条件的重大区别在于:前者整个流体系统都不可能存在加速度,后者则整个流体系统都可以有加速度。我们来讨论这两种情况。

这里有两种需要考虑的力:(1) 体积力——从远处物体作用在流体质点上的力(例如重力,磁场力等);(2) 表面力——由于与其他流体质点或者固壁直接接触而产生的作用力[由压强和切向力(剪应力)而产生的作用力]。

我们来考察盛有静止流体的容器。现在,我们从容器中选取一个很小的流体体积,具有立方体的形状,如图 2-2 所示。我们假设重力指向  $z$  的负方向。

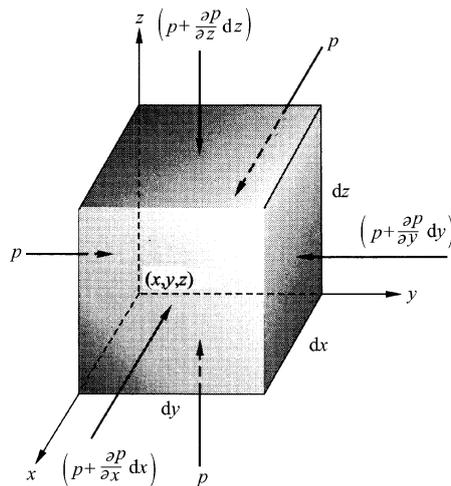


图 2-2

我们可以假设每一个表面上的压强都是均匀的,因此可以证明:任何非均匀性带来的只是二阶微量,不会影响最后的结果。不同坐标轴方向的合力为

$$x \text{ 方向} \quad p dy dz - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right] dy dz = 0$$

$$\begin{aligned} y \text{ 方向} \quad & p dx dz - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right] dx dz = 0 \\ z \text{ 方向} \quad & p dx dy - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] dx dy - \rho g dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

简化后得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.2)$$

根据方程组(2.2), 我们有

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (2.3)$$

这是一个非常重要的流体静力学方程. 如果流体的密度是常数, 方程(2.3)可以在任何两点之间积分出

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

得

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \quad (2.4)$$

对于静力学平衡的流体, 方程(2.4)描述了其压强随高度变化的关系. 在容器中选择一轴线垂直于地球表面的正圆柱流体, 通过研究作用在这一流体柱上的力的平衡条件, 也可以独立而简单地导出方程(2.3).

方程(2.4)只在不可压缩流体中成立. 现在简要地研究一下可压缩流体的压强变化问题. 从理想气体开始, 根据方程(2.3), 我们有

$$dp = -\frac{p}{RT} dz$$

其中  $R$  是气体常数,  $T$  是绝对温度. 对于等温大气, 我们可以从上述方程积分出

$$\ln \frac{p}{p_1} = -\frac{g}{RT}(z - z_1)$$

或者

$$p = p_1 e^{-\frac{g}{RT}(z - z_1)} \quad (2.5)$$

其中  $p_1$  是某个已知高度  $z_1$  上的压强. 我们可以取  $z_1 = 0$ , 则  $p_1$  对应于地球表面的大气压, 于是我们看到, 等温大气层的压强随着高度的增加按指数规律下降. 实际上, 地球表面大气层的温度通常是随高度增加而下降的. 然而在特殊条件下, 地球表面上一个小的距离内, 温度可能是随高度而上升的. 正好与压强相反.

### 2.3 压强的测量方法

压强计是一种利用流体柱位移来确定压强差的装置. 利用方程(2.4)将压强差和流体柱的高度联系起来. 我们可以将方程(2.4)写成

$$p_2 - p_1 = \gamma h = \rho g h \quad (2.6)$$

其中

$$h = -(z_2 - z_1) \quad (2.7)$$

测量压强差的 U 型管压强计如图 2-3 所示. 压强  $p_A$  与  $p_B$  之间的差可用如下方法确定: 设给定点  $a$  的压力为

$$p_a = h_1 \gamma_{\text{水}} + (h_3 - h_1) \gamma_{\text{空气}} + p_A$$

或

$$p_a = h_2 \gamma_{\text{水}} + (h_3 - h_2) \gamma_{\text{空气}} + p_B \quad (2.8)$$

相减得

$$p_A - p_B = (h_2 - h_1) (\gamma_{\text{水}} - \gamma_{\text{空气}}) \quad (2.9)$$

由于空气的比重远远小于水, 所以压强差近似于液体的高度差乘上水的重度:

$$p_A - p_B = (h_2 - h_1) \gamma_{\text{水}} \quad (2.10)$$

根据实际应用, 压强计可以有不同形状、不同取向和采用不同的流体. 例如, 为了改进垂直压强计的精度, 可以采用倾斜压强计, 如图 2-4 所示, 或者采用双流体压强计, 如图 2-5 所示, 可以同样提高精度. 这两个例子中将压强差与流体柱的偏移联系起来的方法本质上与 U 型管原理相同.

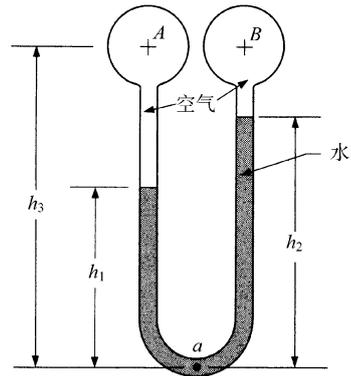


图 2-3 U 形管压强计

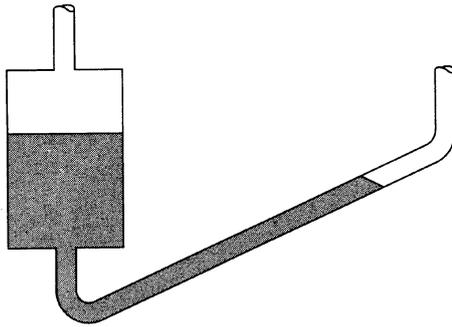


图 2-4 倾斜压强计

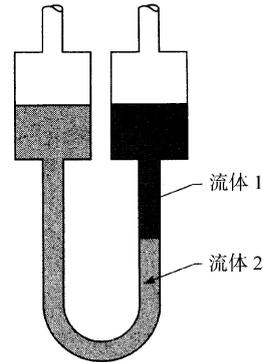


图 2-5 双流体压强计

#### 2.4 流体对浸没其中物体的作用力

流体作用在物体上表面力的合力, 可以通过整个表面上各面元表面力的矢量和来确定,

$$\mathbf{F} = \int_A d\mathbf{F} \quad (2.11)$$

其中

$$d\mathbf{F} = p d\mathbf{A}$$

且

$$p = p_0 + \gamma h \quad (2.12)$$

这里  $p_0$  是自由面上的压强,  $h$  是在自由面下的深度.

这些就是用来确定作用在浸没物体表面力的全部方程. 于是, 在特定的应用中, 就需要将深度  $h$  和面积元  $d\mathbf{A}$  用同样的积分变量表示出来. 同时, 在对方程进行积分之前, 一定要将其

写成标量形式.我们来研究某些特殊情形.

**水平的平面** 设一水平平面位于液体下深度  $h$  处,如图 2-6 所示.作用在物体表面一侧的力为

$$F = \int_A dF = \int_A (p_0 + \gamma h) dA = (p_0 + \gamma h) A \quad (2.13)$$

**倾斜的平面** 其次,设浸没在流体中的倾斜平面,如图 2-7 所示.在此,我们有作用在平板上的力(垂直于平板)为

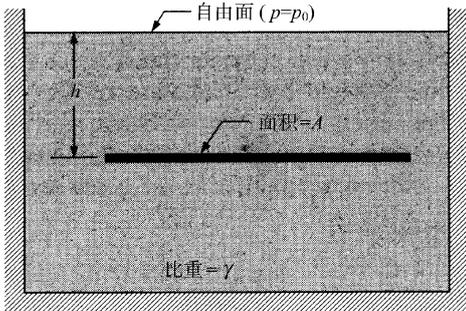


图 2-6 浸没的水平平板

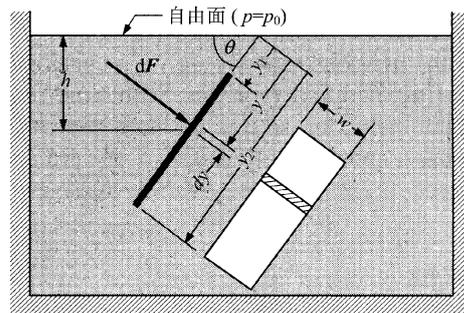


图 2-7 浸没的倾斜平板

$$\begin{aligned} F &= \int_A dF = \int_A (p_0 + \gamma h) dA = p_0 A + \gamma \int_{y_1}^{y_2} w y \sin \theta dy \\ &= p_0 A + \frac{1}{2} \gamma w \sin \theta (y_2^2 - y_1^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中  $w$  为倾斜平板的宽度。

**曲面** 设曲面如图 2-8 所示;力的分量为

$$F_x = \int_A (p_0 + \gamma h) dA_x \quad (2.15)$$

$$F_y = \int_A (p_0 + \gamma h) dA_y \quad (2.16)$$

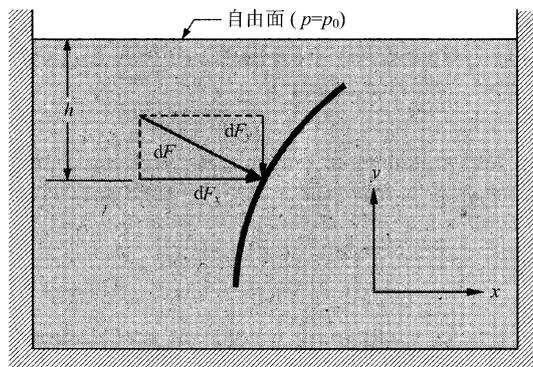


图 2-8 浸没的弯曲板

就确定浸没物体的受力来说,对这些方程进行积分并不总是最方便的方法.例如,我们可以观察到:任何浸没物体表面上作用力的垂直分量始终等于直接位于表面上方的流体的重量加上自由面压力,而水平分量由这个平面在垂直方向上的投影决定.

**浮力** 阿基米德原理说明:一个浸没在流体中物体受到的浮力等于它排开流体的重量.因此,这个力(浮力)一定等于浸没物体的体积乘上流体的重度.

我们认为这是很重要的,浮力也可以通过压强和面积的乘积的铅直分量对于整个浸没物体的表面求积来计算

$$F_B = \int_A p dA_y \quad (2.17)$$

正如我们已经指出的,由此导出

$$F_B = \gamma \times V \quad (2.18)$$

其中  $V$  为浸没物体体积.

### 2.5 没有剪应力的加速运动流体

在前面几节中,我们已经研究了处于静止状态的流体.现在来研究等加速度(加速度不随时间变化)运动的流体,而且每个质点与其直接相邻的质点之间没有相对运动,流体的运动如刚体一样.例如:考虑一个具有等加速度向上和向右运动的液体容器,如图 2-9 所示.利用节 2.2 中相同的方法,很容易证明:对于容器中一个无穷小的体积元,牛顿第二运动定律给出

$$\partial p / \partial x = -\rho a_x, \quad \partial p / \partial y = -(\rho a_y + \gamma)$$

积分得

$$p = -[\rho a_x x + (\rho a_y + \gamma) y] + C \quad (2.19a)$$

自由面的形状由  $p = p_0$  决定,自由面是一个平面.等压面都是平行面,它们相对于水平面的倾角为

$$\theta = \arctan a_x / (a_y + g) \quad (2.19b)$$

其中  $\theta$  的含义见图 2-9.

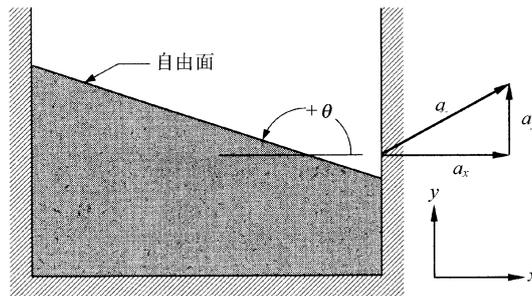


图 2-9 加速运动的流体容器.重力沿负  $y$  方向,所以  $a_x$  和  $a_y$  分别与地球表面平行和垂直.若  $a_x$  和  $a_y$  都是正的,则液面的斜率是负的,如图所示

流体的质点作等加速度运动的另一个例子为:流体作为一个整体作匀速转动,各部分之间没有相对运动.设  $\omega$  为角速度,是一个恒定值,  $\rho$  为流体的密度.选取以  $z$  和  $r$  为坐标的柱坐标系,如图 2-10 所示,极角为  $\phi$ .在半径  $r$  处,流体质点的向心加速度为  $-\omega^2 r$ ,沿着径向.对于  $z$  方向,根据牛顿第二运动定律,有

$$-\rho g r d r d \phi d z + p r d r d \phi - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial z} d z \right] r d r d \phi = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

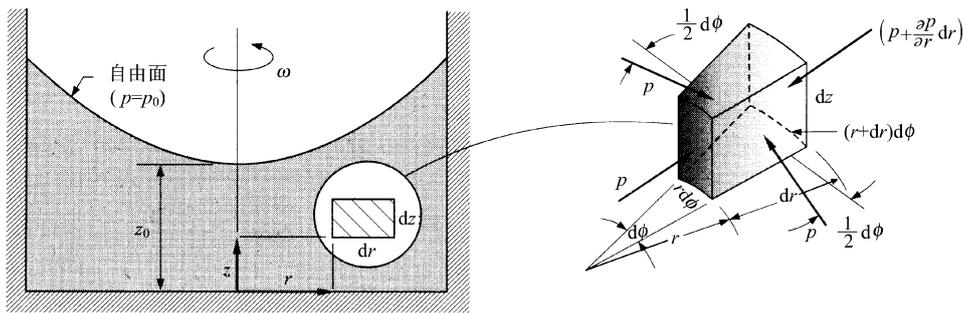


图 2-10 旋转的流体容器.重力沿负  $z$  方向

沿  $r$  方向,假设  $\sin\left[\frac{1}{2}d\phi\right] \approx \frac{1}{2}d\phi$ ,

$$p dz r d\phi - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right] dz (r + dr) d\phi + 2 p dz dr \left[ \frac{1}{2} d\phi \right] = - \rho dz r d\phi dr \omega^2 r$$

略去高阶小量,得

$$\partial p / \partial r = \rho \omega^2 r \tag{2.20}$$

记  $p = p(r, z)$ , 则

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

用  $\frac{\partial p}{\partial r}$  和  $\frac{\partial p}{\partial z}$  的表达式代入,得

$$dp = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz$$

积分得

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C \tag{2.21}$$

在  $r=0$  和  $z=z_0$  处,我们有  $p=p_0$ . 于是方程(2.21)变成

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \rho g (z_0 - z) \tag{2.22}$$

在自由面上有  $p=p_0$ , 得

$$z = z_0 + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 / g \tag{2.23}$$

这是旋转抛物面.

注意,当  $z$  不变时,  $p$  随  $r^2$  增大而增加. 离心泵与离心分离机就是利用这个原理. 快速转动的容器中的流体,会在旋转中心到外缘之间产生一个巨大的压强差.

### 2.6 表面张力

如果两种不可混合的流体之间的分界面是曲面(有曲率),则曲面两边存在一个压强差. 这是因为分界面本身的作用像一层薄膜,薄膜的强度由表面张力来表征. 表面张力的单位是 lbf/ft 或 N/m,是两种接触的流体共同决定的特性. 我们最常遇到的是液体-气体的分界面,但是,相关概念适用于任何两类流体. 各种流体组合的表面张力可查有关的参考资料.

如果研究的分界面是曲面,则分界面两边的压强差为

$$\Delta p = T \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \tag{2.24}$$

其中  $R_1$  与  $R_2$  是分界面上任何相互正交的两条曲线在交点处的曲率半径. 在这个交点上, 任何两条相互正交的曲线的曲率半径倒数之和  $(1/R_1 + 1/R_2)$  都是相同的. 一旦  $R_1$  和  $R_2$  已知,  $\Delta p$  就是该交点上的压强差. 例如: 在分界面是球面的情况下, 因为曲率半径处处为  $R$ , 因此, 分界面上各点的压强差为  $T(1/R_1 + 1/R_2) = 2T/R$ .

空气中悬浮的肥皂泡就是球形分界面的例子, 其中泡内的压强大于外界的大气压. 肥皂泡膜表面张力与该压强差平衡. 自由下落的水滴近似于球形, 因为是表面张力将水滴凝聚成一个整体(尽管空气的阻力引起一些形变).

## 2.7 小结

在本章中, 我们已经涉及到的作用在流体上的力有: (1) 处于静平衡的(流体是静止的); (2) 处于动平衡的(流体质点作等加速度的). 在这两种情况下, 流体质点之间都没有相对运动, 导致剪应力处处为零. 因此作用在流体上的力只有(1)压强(垂直于表面的应力)和重力(均匀的体积力).

已经证明: 静平衡流体中任何点的压强都是各向同性的. 因此压强是时间和空间坐标的标量函数.

对于静平衡流体, 已证明其压强随高度变化为

$$dp/dz = -\gamma = -\rho g$$

如果流体是不可压缩的, 则

$$p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$

这个公式非常有用, 是各类压强计读数得出压强的依据.

作用在浸没物体表面上的合力, 可以从压强和面积元的乘积对整个表面的积分求得. 合力分量的计算公式为

$$F_x = \int_A p dA_x, \quad F_y = \int_A p dA_y$$

其中  $p = p_0 + \gamma h$ . 因此, 在利用上述公式解决具体问题时, 要做的工作是将面积元和表面深度  $h$  用某个方便的积分变量表示出来.

浮力可以用下面两个方法计算: (1) 通过将压强与面积元乘积的铅直分量对物体整个浸没面积积分; (2) 通过物体所排开的流体的体积乘上流体的重度.

对于作等加速度运动的流体, 而且没有各流体质点之间的相对运动, 则牛顿第二运动定律对于无限小体积元给出

$$\partial p / \partial x = -\rho a_x, \quad \partial p / \partial y = -(\rho a_y + \gamma)$$

其中  $a_x$  和  $a_y$  是平行和垂直于地球表面的加速度分量.

## 例 题

2.1 图 2-11 中水银压强计与水泵的出口和入口相连(左边通入口, 右边通出口). 设水泵的入口和出口处于同一高度, 试确定水泵的增压.

**解** 通过左边液柱压强的计算, 求出  $a$  的压强为

$$p_a = h_1 \gamma_{\text{水银}} + h_2 \gamma_{\text{水银}} + h_3 \gamma_{\text{水}} + p_{\text{入口}}$$

通过右边液柱压强的计算, 得

$$p_a = h_1 \gamma_{\text{水银}} + h_2 \gamma_{\text{水}} + h_3 \gamma_{\text{水}} + p_{\text{出口}}$$

两式相减

$$p_{\text{出口}} - p_{\text{入口}} = h_2 (\gamma_{\text{水银}} - \gamma_{\text{水}}) = \frac{6}{12} [62.4(13.6 - 1)] = 393 \text{psf}$$

我们已经用了水的重度为  $62.4 \text{lb}/\text{ft}^3$ , 水银的比重为 13.6.

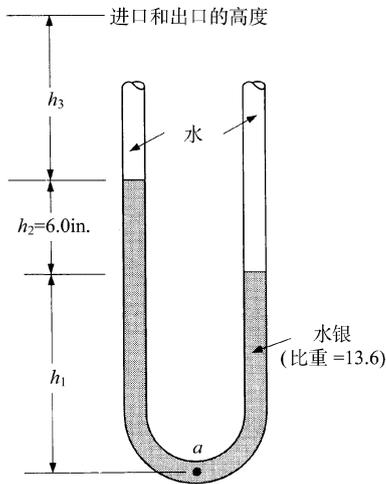


图 2-11

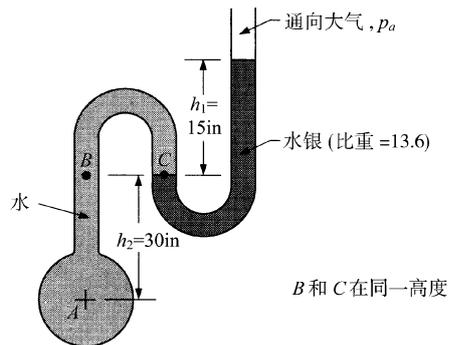


图 2-12

2.2 试从图 2-12 中求出点 A 的表压.

**解** 点 B 的绝对压强与点 C 的相同, 而点 C 的绝对压强为  $\gamma_1 h_1 + p_a$ , 因此

$$p_A = (p_a + \gamma_1 h_1) + \gamma_2 h_2$$

为了方便, 我们已经将水银和水的重度分别记作  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ . 根据表压的定义,

$$\begin{aligned} p_{A\text{表}} &= p_A - p_a = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 = 62.4(13.6)(15/12) + 62.4(30/12) \\ &= 1216(\text{psf}) = 8.45(\text{psi}) \end{aligned}$$

2.3 试求图 2-13 所示的倾斜压强计在点 A 的压强.

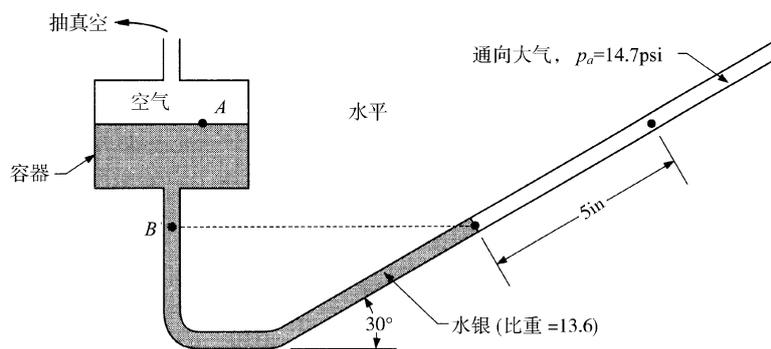


图 2-13

**解** 因为大气压

$$p_B = p_A + \gamma h$$

所以

$$\begin{aligned} p_A &= p_B - \gamma h = 14.7 - 62.4 \cdot (13.6) \cdot (2.5/12) \cdot (1/144) \\ &= 13.47(\text{psi}) \end{aligned}$$

注意,因为压强计的容器内抽真空,所以倾斜管中的水银面低于容器中的水银面。

## 2.4 设图 2-14 的管道中充满流动的水. 试求管道中点 A、B 和 C 的表压。

**解** 设水的重度为  $\gamma_1$ , 水银的重度为  $\gamma_2$ . 我们从点 D 开始, 先下降到水平面 HH, 然后再上升到管道中各点. 则

$$p_A = p_a + \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2$$

但是,  $p_{\text{表}} = p - p_a$ , 所以

$$\begin{aligned} p_{A\text{表}} &= \frac{62.4(13.6)}{1728}(5) - \frac{62.4}{1728}(8) - \frac{62.4(13.6)}{1728}(7) \\ &= -1.28(\text{psi}) \end{aligned}$$

(数字 1728 是重度从单位  $\text{lb}/\text{in}^3$  变成  $\text{lb}/\text{ft}^3$  的换算系数.) 类似地

$$p_{B\text{表}} = \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_4 - \gamma_2 h_5 = -2.17\text{psi}$$

$$p_{C\text{表}} = \gamma_2 h_3 - \gamma_1 h_3 - \gamma_2 h_7 = 0.55\text{psi}$$

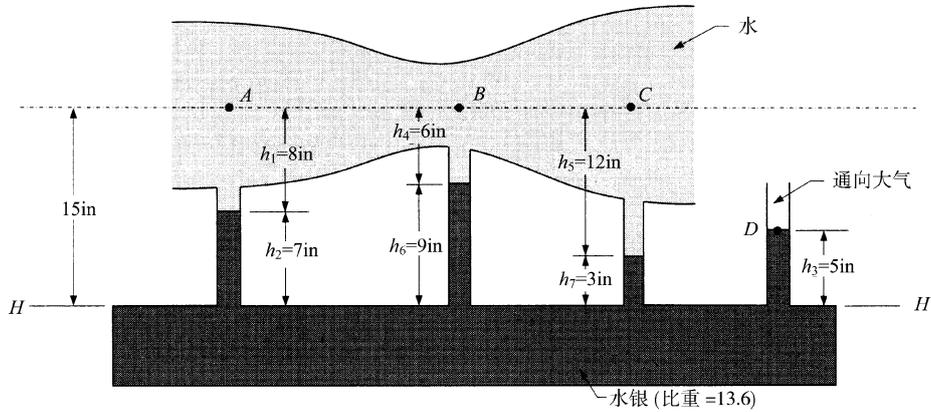


图 2-14

## 2.5 设水流通过一喷管如图 2-15 所示, 若 A 点的表压为 5psi, 试求出高度 h。

**解** 从自由面上点 B 绕到点 A, 我们有

$$p_A = p_a + \gamma_2 h - \gamma_1 (h + 24)$$

$$p_{A\text{表}} = 5 = \frac{62.4}{1728}(13.6h) - \frac{62.4}{1728}(h + 24)$$

因此得:  $h = 12.9\text{in}.$

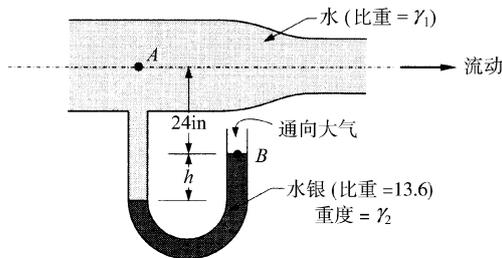


图 2-15

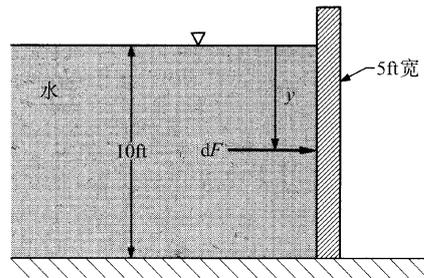


图 2-16

## 2.6 设一水坝如图 2-16 所示. 已知坝宽为 5ft, 水深为 10ft, 试求水对坝面作用的合力。

**解** 为了求出合力, 将压强对坝面积分,

$$F = \int_A dF = \int_A p dA = \int_0^{15} 5 \gamma y dy = 5 \gamma y^2 / 2 \Big|_0^{15} = 15.600 \text{ lbf}$$

我们没有计及水面上的大气压强,因为它由大坝反面的大气压抵消了.

- 2.7 设大坝闸门如图 2-17 所示,已知闸门宽 5ft,阻止闸门打开的水平力作用在闸门底部,试确定力的大小.

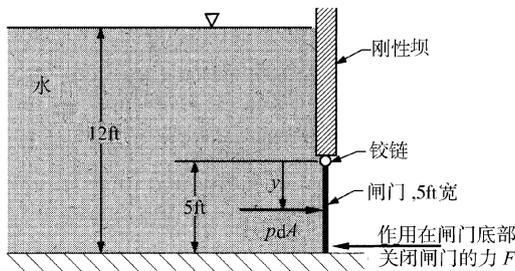


图 2-17

**解** 对于静力平衡状态,所有对铰链的力矩之和必须为零.取矩得

$$5 F - \int_A y p dA = 0,$$

因此

$$5 F = \int_0^5 y \gamma (T + y) dy = 5(62.4) [7 y^2 / 2 + y^3 / 3]_0^5$$

且求得

$$F = 8050 \text{ lbf}$$

- 2.8 设一斜面如图 2-18 所示,已知斜面顶端用铰链连接,宽度为 3m,试求出水压作用在斜面上的合力.

**解** 合力垂直于闸门,可以由压强对斜面表面的积分求得

$$\begin{aligned} F &= \int_A dF = \int_A p dA = \int_A \gamma h dA \\ &= \int_0^2 \gamma (1 + y \sin 30^\circ) (3 dy) \\ &= 3(9810) \left[ y + \frac{1}{4} y^2 \right]_0^2 = 8.83 \times 10^4 \end{aligned}$$

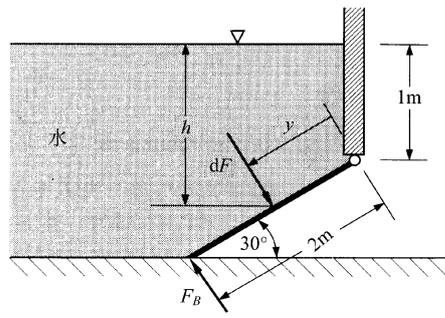


图 2-18

同理,因为斜面右侧暴露在大气中,因此,我们计算中不需考虑大气压强.合力可以分解成  $x$  和  $y$  方向分量,并且可以求出合力作用的确切位置.因此,在确定铰链上和平板底部的反力中,单个合力的作用等价于压强的合成作用.在习题 2.9 中,我们计算了平板底部的反力.经这样的计算,则确定合力的位置就很简单了.

- 2.9 在习题 2.8 中,试确定作用在闸门底部末端上,地面对底部表面的总反力.设一力  $F_B$  等价于水压对斜面的作用,试求出该力  $F$  的作用点.

**解** 对铰链力矩之和必为零.因为压强只能给出垂直于闸门的作用力.所以,如果忽略平板的重力,则铰链上和底部的反力都垂直于平板.忽略平板的重力不计,由对铰链的合力矩为

$$F_B \times 2 = \int_A y dF = \int_A y (\gamma h) dA$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma \int_0^2 y(1 + y \sin 30^\circ)(3dy) = (3)(9810) \left[ \frac{1}{2} y^2 + \frac{y^3}{6} \right]_0^2 \\
 &= 9.81 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

则  $F_B = 4.905 \times 10^4 \text{ N}$ .

如果压强的等价合力位于  $y = y_0$ , 则  $F_{y_0} = F_B \cdot 2$ , 所以

$$y_0 = 2 F_B / F = 2 \times 4.905 \times 10^4 / (8.83 \times 10^4) = 1.11 (\text{m})$$

**2.10** 设一曲面如图 2-19 所示, 已知曲面宽为 2ft, 试确定作用在曲面上的总压力.

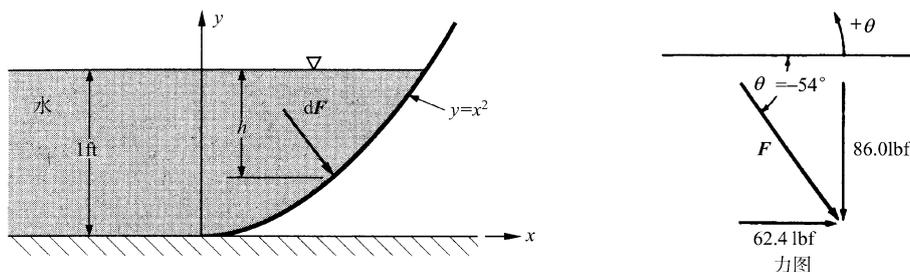


图 2-19

**解** 我们可以写出水对曲面作用力的一般公式为  $F = \int_A dF$ . 但是在进行积分之前, 必须将上述公式写成标量形式

$$F_x = \int_A dF_x = \int_A p dA = \int_A (\gamma h) 2dy$$

将  $h$  写成  $y$  的函数,

$$F_x = 2 \gamma \int_0^1 (1 - y) dy = 2 \times 62.4 \times [y - y^2/2]_0^1 = 6.24 \text{ lbf}$$

类似地, 我们可以求出  $F_y$ . 但是必需记住, 沿正  $y$  向的  $F_y$  定义为正的. 而压力的作用沿着负的  $y$  方向, 所以

$$F_y = -2 \gamma \int_0^1 (1 - x^2) dx = -86.0 \text{ lbf}$$

负号表明  $F_y$  的作用向下. 压力合力的大小为

$$|F| = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = 106.4 \text{ lbf}$$

方向满足  $\tan \theta = F_y / F_x = -1.38$  或  $\theta = -54^\circ$ .  $\theta$  是合力  $F$  对水平线的倾角, 如图 2-19 所示. 由于  $\theta$  为负的, 所以合力作用沿斜下方.

**2.11** 一 U 形管加速计如图 2-20 所示, 可用于测量汽车的加速度. 加速计安装在汽车上, 两开口管铅垂向上. 开口 U 形管中装有一部分重度为  $\gamma$  的液体. 在等加速度的情形下, 假定液体具有图中的位形, 试找出相关参数与加速度大小的关系.

**解** 液体的位形完全和液体在宽度  $L$  的容器中一样, 于是, 由公式 (2.19a) 给出的角  $\theta$  为

$$\tan \theta = -h/L = -a_x/g$$

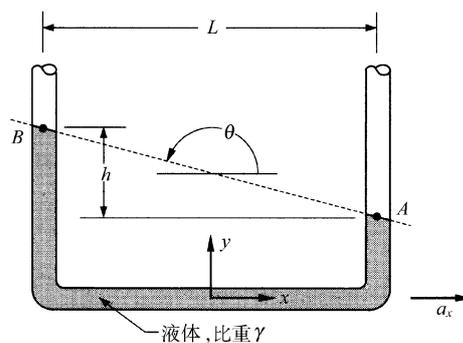


图 2-20

立即得出  $a_x = gh/L$ .

2.12 装水容器如图 2-21 所示. 当容器静止时, 水深 5ft. 现在容器沿正  $x$  方向作加速运动. 试求出水刚要溢出容器后壁时的  $a_x$ .

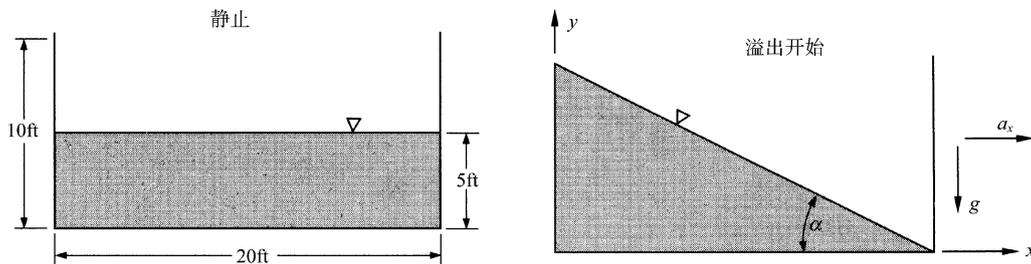


图 2-21

**解** 随着  $a_x$  的增加, 水在后壁的高度也增加. 当水达到后壁的顶端时, 水升高了 5ft, 因此, 水在前壁必降低 5ft. 在刚要溢出的瞬间,  $\tan \alpha = 10/20 = a_x/g$ , 所以  $a_x = g/2 = 16.1 \text{ft/sec}^2$ . 注意, 为了方便, 我们已经定义角度  $\alpha$  与公式(2.19b)中角  $\theta$  符号正好相反.

2.13 在重力场  $\mathbf{g}$  中, 当装有液体的容器以等加速度  $\mathbf{a}$  运动时, 试证明容器中液体的压强分布和虚拟的重力场  $(\mathbf{g} - \mathbf{a})$  中静止容器中液体的压强分布一样. 也就是说, 假定重力沿负  $y$  方向, 则虚拟重力场的大小为  $\sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2 + a_z^2}$ ,  $\mathbf{g}$  和  $-\mathbf{a}$  的矢量和如图 2-22 所示. 又若容器在重力场中自由下落, 显然液体中表压处处为零. 试解释之.

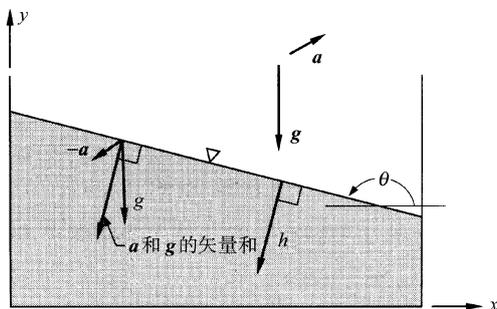


图 2-22

**解** 根据公式(2.19a), 我们知道流体中的等压面为一平面. 假定压强沿  $z$  方向没有变化, 而且重力作用沿负  $y$  方向, 则根据等值面沿法向变化的导数规则, 压强沿等压面法向的变化可以写成

$$dp/dh = \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

直接进行计算, 我们立即得到

$$dp/dh = \rho \sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2}$$

并且可以推广到三维情形(重力作用仍沿负  $y$  方向), 得

$$dp/dh = \rho \sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2 + a_z^2}$$

积分后得

$$p = p_0 + \rho h \sqrt{a_x^2 + (a_y + g)^2 + a_z^2}$$