偏 微 分 方 程 教 程

朱长江　邓引斌　编著

科 学 出 版 社

北　京

内容简介

本书根据作者们多次对数学专业的大学本科生及研究生讲授偏微分方程课程的讲稿编写而成.全书共分八章,包括一阶偏微分方程的求解,特征理论及方程的分类,双曲型、抛物型及椭圆型方程的求解方法及基本理论,Fourier变换,Cauchy-Kovalevskaya定理和Lewy的反例.各章内容相对独立,自成体系,教学时可根据实际教学时数,任选几章独立安排教学.

本书可作为高等院校数学系本科生“偏微分方程”、“数学物理方程”课程的教材或参考书,也可作为理工科本科生和研究生“数学物理方程”、“数学物理方法”课程的参考书或教材.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程教程/朱长江,邓引斌编著.—北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-015153-4

I.偏… II.①朱…②邓… III.偏微分方程—高等学校—教材

IV.0175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第018618号

责任编辑:杨瑰玉

责任印制:高 嵘

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2005年6月第一版 开本:b5(720×1000)

2005年6月第一次印刷 印张:13 1/4

印数:1—3 000 字数:262 000

定价:19.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序　　言

偏微分方程是以建立数学模型、进行理论分析和解释客观现象并进而解决实际问题为内容的一门数学分支学科. 作为大学理工类专业的基础课程,无论对于数学专业还是非数学专业都十分重要. 因此,写好关于偏微分方程课程的教材,一定要针对这门课程的特点,理论联系实际,写出从特殊到一般的结合,并努力反映学科研究的最新成果,以适应日益变化的实际需要.

本书的两位作者一直从事非线性偏微分方程的研究,并长期为华中师范大学数学专业的本科生及研究生、物理专业的本科生开设偏微分方程、数学物理方程等课程. 他们多次应邀访问美国、瑞士、香港等国家和地区的大学,开展合作研究并为这些大学数学专业本科生讲授偏微分方程课程. 他们所在的偏微分方程研究小组近年来还积极参与和组织了许多期各级各类的学术研讨班. 作者这些教学、科研和学术交流的经历使他们积累了丰富的经验,为本书的编写提供了大量的素材. 经过多年的积极酝酿和勤奋笔耕,这本期盼已久的教材终于脱稿并正式出版,实在是可喜可贺.

经过两位作者的精心选择、科学提炼和认真编排,本书向读者完整地展示了运用偏微分方程解决物理、力学及工程技术中实际问题的全过程和一般规律,并重点介绍了偏微分方程的几种常用求解方法,即特征线法(第二、四章)、分离变量法(第四、五、六章)和 Green 函数法(第六章),在理论上讲得透彻完整,在应用上讲得深入细致,做到了严密性与直观性的统一、科学性与可读性的统一,具有自己鲜明的特色. 教材各章节内容由浅入深,相对独立,自成体系. 第二章系统地介绍了用特征线法求解一阶偏微分方程的方法,它作为偏微分方程学习的基础,填补了目前某些同类教材的空白. 第三章给出了二阶方程及一阶方程组的分类,这为分门别类地学好偏微分方程这门课程奠定了基础. 第七章讲述了 Fourier 变换的基本理论,并通过典型例题阐明了 Fourier 变换在解常系数线性偏微分方程中的应用. 第八章介绍了 Cauchy-Kovalevskaya 定理及 Lewy 的反例. 由于作者对定理的证明作了科学的提炼,使得这样一部分学生较难理解和掌握的理论知识变得十分简洁直观,通俗易懂.

根据偏微分方程的特点,学习这门课程必须坚持理论联系实际,重点不仅在于知识的掌握,更应着眼于能力的培养与提高. 希望广大同学将本书提供的一些典型问题均作为案例来对待,通过“解剖麻雀”,揭示偏微分方程的一些带有普遍意义的思维方法、求解过程和推理结论,而不要仅仅满足于学习一些数学知识,更不要满足于对个别实例的机械模仿. 只有这样,才能开阔思路,培养分析问题和解决问题的能力,真正达到学习这门课程的目的.

中国科学院院士

2004 年 10 月于北京

前　　言

偏微分方程作为大学的一门基础课,无论是对数学专业还是非数学专业的理工科学生都十分重要.它的任务是建立数学模型,寻找求解方法,进行理论分析,从而达到解释物理现象的目的.本书是在“偏微分方程讲义”的基础上修改而成,“讲义”的大部分内容曾在数学专业的本科生选修课及研究生基础课上讲授过多次.经过多年的教学实践,并跟据一些专家的建议,在参阅了大量有关偏微分方程及数学物理方程教材的基础上,我们对“讲义”的内容进行了一定的取舍,并对部分章节的先后顺序进行了重新安排.

本书共分八章.第一章介绍偏微分方程的基本概念和各种经典方程及定解问题的物理及力学来源;第二章介绍一阶偏微分方程的求解方法;第三章介绍特征理论及方程的分类;第四、五、六章分别讨论双曲型、抛物型和椭圆型方程定解问题的求解方法、理论分析、适定性讨论,并利用所获得的解对物理现象及力学规律加以解释;第七章介绍Fourier 变换及其应用;第八章介绍Cauchy-Kovalevskaya 定理和Lewy 的反例.为了便于读者理解并牢固地掌握这些内容,我们在每一章中都安排了一定数量的习题.本书各章内容相对独立,自成体系,教学时可根据实际情况,任选几章独立安排教学.

本书在编写过程中得到了华中师范大学教务处、数学与统计学学院及国家自然科学基金委员会的大力支持,特此深表谢意.

由于我们的水平有限,缺点和错误在所难免,诚恳地希望读者批评指正.

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第一章　方程的导出及定解问题的提法

自从微积分产生以后,人们就设法把物理学、力学和工程技术问题中的一些规律归结成偏微分方程进行研究,习惯上称之为数学物理方程.这类方程的内容基本上都是一些典型的偏微分方程.因此我们说,偏微分方程是一门历史悠久的学科,在它的发展过程中,具有紧密联系实际的特点.生产和科学技术的不断发展,不仅丰富和更新了偏微分方程的研究内容,而且随着问题的解决,也产生了许多新的数学方法,从而发展了偏微分方程的理论,同时,也促进了偏微分方程与数学的许多分支及自然科学各部门之间的联系.本章将从几个简单的物理模型出发,推导出本课程将要讨论的三种典型方程及其相应的典型定解问题.

§1　基本概念

1.1　什么是偏微分方程

所谓**偏微分方程**,是指关于多元函数 $u(x,y,\cdots)$ 及其偏导数的关系式

$$F(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\cdots)=0, \tag{1.1}$$

其中 F 是自变量 $x,y,\cdots$,未知函数 u 及 u 的有限多个偏导数的已知函数.例如关系式

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=f(x,y), \tag{1.2}$$

$$(u_x^2+u_y^2+1)u^2=1, \tag{1.3}$$

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \tag{1.4}$$

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0, \tag{1.5}$$

$$u_{tt}-u_{xx}+u^3=0, \tag{1.6}$$

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.7}$$

等都是偏微分方程.

1.2　偏微分方程的解

如果给定一个函数 $u=\varphi(x,y,\cdots)$,将它及它对自变量的各阶偏导数代入方程(1.1),能使(1.1)成为恒等式,则称函数 φ 是偏微分方程(1.1)的**解**.我们知道,一个线性常微分方程如果有解,就必有无穷多个解,其表现形式是依赖于一个或几个任意常数的通解,于是自然会想到偏微分方程的通解也会含有任意元素.

例1 求偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1.8}$$

的通解.

解 关于y积分方程(1.8),可得其通解为$u=\varphi(x)$,其中φ是x的任意连续可微函数.

但是,在偏微分方程中,除了一些特别简单的例子以外,求通解是很困难的.而且即使求得了通解,要想利用所给的伴随条件将其表达式中的任意元素确定出来,也是一件不容易的事情,甚至是不可能的.

1.3 偏微分方程的阶

在偏微分方程的研究中,"**阶**"是一个非常基本的概念.所谓偏微分方程的阶,就是方程中实际所含未知函数的偏导数中的最高阶数,如上例中的方程(1.2)、(1.3)是一阶偏微分方程,(1.4)、(1.5)和(1.6)是二阶偏微分方程,(1.7)是三阶偏微分方程.

1.4 线性偏微分方程

如果方程关于未知函数及其各阶偏导数都是线性的,则称它为**线性偏微分方程**.例如方程(1.2)和(1.4)都是线性偏微分方程.在线性偏微分方程中,不含有u及它的偏导数的项称为**自由项**;当自由项为零时,称方程为**齐次方程**,如方程(1.4);否则就称为**非齐次方程**,如方程(1.2).

一般的线性齐次偏微分方程可写为

$$\mathrm{L}u=0, \tag{1.9}$$

线性非齐次偏微分方程可写为

$$\mathrm{L}u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{1.10}$$

其中L是u的某一偏微分线性算子,例如

$$\mathrm{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

$$\mathrm{L}=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

$$\mathrm{L}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

等等.所谓**线性算子**,是指对任意的函数u,v及常数c,总有

$$\mathrm{L}(u+v)=\mathrm{L}u+\mathrm{L}v,\quad \mathrm{L}(cu)=c\mathrm{L}u. \tag{1.11}$$

由方程(1.11),我们可得关于线性方程的如下**叠加原理**.

定理1.1 若$u_1,u_2,\cdots,u_m$是线性齐次方程(1.9)的解,则$u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m$也是(1.9)的解;若$u_1,u_2,\cdots,u_m$是线性非齐次方程(1.10)的解,则$u=c_1u_1+$

$c_2u_2+\cdots+c_nu_n$ 是如下线性非齐次方程

$$\mathrm{L}u=f\sum_{i=1}^{n}c_i$$

的解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数.

1.5 非线性偏微分方程

我们把不是线性偏微分方程的偏微分方程统称为**非线性偏微分方程**.在非线性偏微分方程中,如果关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的,则称它为**拟线性偏微分方程**.例如方程(1.5)、(1.6)和(1.7)都是拟线性偏微分方程.在拟线性偏微分方程中,由最高阶偏导数所组成的那一部分,称作方程的**主部**;若主部内的系数都是常数或是自变量的已知函数,这时方程被称作是**半线性**的,如方程(1.6)和(1.7)就是半线性的.对于既不是线性也不是拟线性的偏微分方程,就称它为**完全非线性偏微分方程**,如方程(1.3)就是.一般地,我们又把拟线性偏微分方程及完全非线性偏微分方程,统称为非线性偏微分方程.

习 题 1-1

1. 指出下列方程的阶并判断它是线性的,还是非线性的.如果是线性的,说明它是齐次的,还是非齐次的:

(1) $u_t-(u_{xx}+u_{yy})+1=0$;

(2) $u_t-u_{xx}+xu=0$;

(3) $u_t-u_{xxt}+uu_x=0$;

(4) $u_x^2+uu_y=0$;

(5) $u_{tt}-u_{xx}+t^2+x^2=0$;

(6) $u_x+e^yu_y=0$;

(7) $u_t+u_{xxxx}+\sqrt{1+u}=0$;

(8) $u_x(1+u_x^2)^{-\frac{1}{2}}+u_y(1+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}=0$;

(9) $\dfrac{\partial^4u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4u}{\partial y^4}=0$;

(10) $\dfrac{\partial^3u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2}+\log u=0$.

2. 设$f(x)$和$g(y)$是任意的二次连续可微函数,验证函数$u=f(x)g(y)$满足方程

$$uu_{xy}-u_xu_y=0.$$

3. 验证函数$u(x,y)=\dfrac{1}{6}x^3y^2+x^2+\sin x+\cos y-\dfrac{1}{3}y^2+4$是方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=x^2y$$

的解.

4. 验证函数 $u(x,y)=x^2-y^2$ 和 $u(x,y)=e^x\sin y$ 都是方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 的解.

5. 验证函数

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$

在区域 $\Omega=\{(x,y,t)\,|\,(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<a^2t^2\}$ 内满足方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

其中 a 为正常数,ξ,η 为任意实数.

§2 几个经典方程

数学物理中的许多问题,都可由一个偏微分方程来描述,本节将介绍几个从物理学和力学中提出的典型的偏微分方程.

2.1 弦振动方程

弹性弦的振动问题,是一个很有意义而且十分重要的古典问题,下面我们建立它的数学模型.

所谓弦是指一条具有弹性的、均匀的、非常柔软的细线,它能够承受相对小的横向振动,并且它在弯曲时所产生的抵抗力比之于张力,可以忽略不计,故张力沿着切线方向.例如,一条被拉直的小提琴弦.

我们考虑弦的微小横振动,如图 1-1 选择坐标系,将弦的两端固定在 x 轴的原点 O 及点 L 上,并设 $OL=l$.所谓横振动是指弦的运动发生在一个平面内,而且弦上各点的位移与弦平衡位置垂直.令 $u(x,t)$ 表示弦上位置为 x 的点在时刻 t 的位移,用 $\rho(x)$ 表示弦的线密度(即单位长度细线的质量).如果弦是均匀的,则 $\rho(x)=$ 常数.

我们将在上述假设下,用如下两个物理定律来导出弦振动方程.

牛顿(Newton)第二定律:

作用在物体上的力 = 该物体的质量 × 该物体的加速度

动量原理:

作用在物体上的冲量 = 该物体的动量的变化

在弦上任取一小段 $[x_1,x_2]$,令 $T(x,t)$ 表示弦在点 x 处时刻 t 的张力,用 $\alpha(x,t)$ 表示弦在点 x 处时刻 t 的切线方向和 x 轴之间的夹角,于是在时刻 t 沿着铅直方向作用在弦段上的张力是

$$T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t). \tag{2.1}$$

设 $\Delta x=x_2-x_1$,由于弦的振动很小,所以弦上各点的斜率也很小,从而有

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha.$$

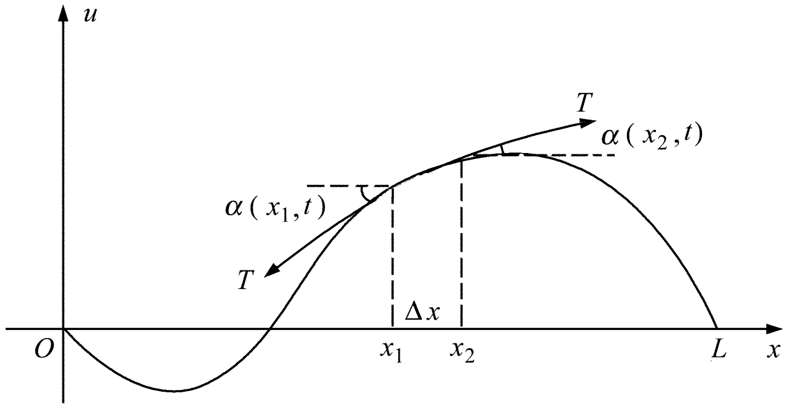

图 1-1

而 $\tan\alpha = u_x(x,t)$，于是(2.1)可写为

$$T(x_1+\Delta x,t)u_x(x_1+\Delta x,t)-T(x_1,t)u_x(x_1,t)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x,t)u_x(x,t)\Big)\Big|_{x=\bar{x}}\Delta x,$$

其中 $\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$.

另一方面，在时刻 t 弦段 $(x,x+\Delta x)$ 的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x=\rho u_{tt}(\tilde{x},t)\Delta x,$$

其中 $\tilde{x}\in(x,x+\Delta x)$.

根据动量原理有

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x,t)u_x(x,t)\Big)\Big|_{x=\bar{x}}\Delta x=\rho u_{tt}(\tilde{x},t)\Delta x.$$

将上式两端除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，即得

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x,t)u_x(x,t)\Big)=\rho u_{tt}(x,t). \tag{2.2}$$

下面我们证明张力 $T(x,t)$ 恒为常数.

事实上，因为弦的振动是横向的，所以作用于弦段上所有力沿 Ox 轴的分量应等于零，即

$$T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t)=0, \tag{2.3}$$

由于弦的振动是微小的，所以 u_x^2 可以忽略不计，即

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx 1,$$

由方程(2.3)知

$$T(x_1,t)=T(x_2,t),$$

这说明张力 T 与 x 无关. 下面证明张力 T 与时间无关. 因为在振动过程中弦长的改变量为

$$\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x - l,$$

它是关于 u_x 的二阶小量.

根据虎克(Hooke)定律知,使弦的长度改变所需加的张力也是 u_x 的二阶小量. 现假设弦是绷紧的,也就是说,原来的张力足够大,因而由于弦的振动使长度改变而产生的张力变化可忽略不计,即弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变. 这样,张力 T 与时间 t 也无关,于是张力 T 恒为常数.

此时方程(2.2)可写成

$$T u_{xx} = \rho u_{tt},$$

即

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{2.4}$$

其中 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ 表示弦的张力密度,这就是通常所谓的**弦振动方程**. 它是最早被提出的一个偏微分方程.

如果作用于弦上的还有外力,其线密度为 $F(x,t)$,这时方程(2.4)将改写为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \tag{2.5}$$

其中 $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$ 表示单位质量在点 x 处所受的外力.

弦振动方程中只含有两个自变量 x 和 t,其中 x 表示位置,t 表示时间. 由于它描述的弦振动亦称为波动现象,因此又称弦振动方程为**一维波动方程**.

2.2 膜振动方程

对于薄膜的微小横振动,我们可以用类似的方法处理. 所谓薄膜是指柔软而有弹性的薄片,它的重量相对于张力可以忽略不计,所以薄膜上每一点的张力总是沿着该点的切线方向. 我们考察一张绷紧的均匀薄膜,它的静止状态在水平位置 xOy 平面内,假设薄膜的运动只是上下方向的,并设在运动时薄膜的弯曲是极微小的. 用函数 $u(x,y,t)$ 表示薄膜在点 (x,y) 处于时刻 t 的位移,由于薄膜的弯曲极为微小,所以 u_x 和 u_y 的高次项可以忽略不计. 与推导弦振动方程类似,我们可以证明张力 T 可近似地看做是与时间 t 及位置 (x,y) 无关的常量.

现在我们在薄膜上任取一小块 $\Delta\sigma$,由于振动是微小的,所以它的面积可近似等于 $\Delta x\Delta y$ ($\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$). 用 $\alpha(x,y)$ 和 $\beta(x,y)$ 表示薄膜在点 (x,y) 处的切向与 x 轴和 y 轴的夹角,故沿着铅直方向作用在这块薄膜上的力为(如图 1-2)

$$T\Delta y\sin\alpha(x_2,y) - T\Delta y\sin\alpha(x_1,y) + T\Delta x\sin\beta(x,y_2) - T\Delta x\sin\beta(x,y_1).$$

由牛顿第二定律,有

$$T\Delta y[\sin\alpha(x_2,y) - \sin\alpha(x_1,y)] + T\Delta x[\sin\beta(x,y_2) - \sin\beta(x,y_1)] = \rho\Delta\sigma u_{tt}(\bar{x},\bar{y},t), \tag{2.6}$$

其中 $\Delta\sigma$ 是这一小块薄膜的面积,u_{tt} 是加速度,$\bar{x}\in(x_1,x_2)$, $\bar{y}\in(y_1,y_2)$.

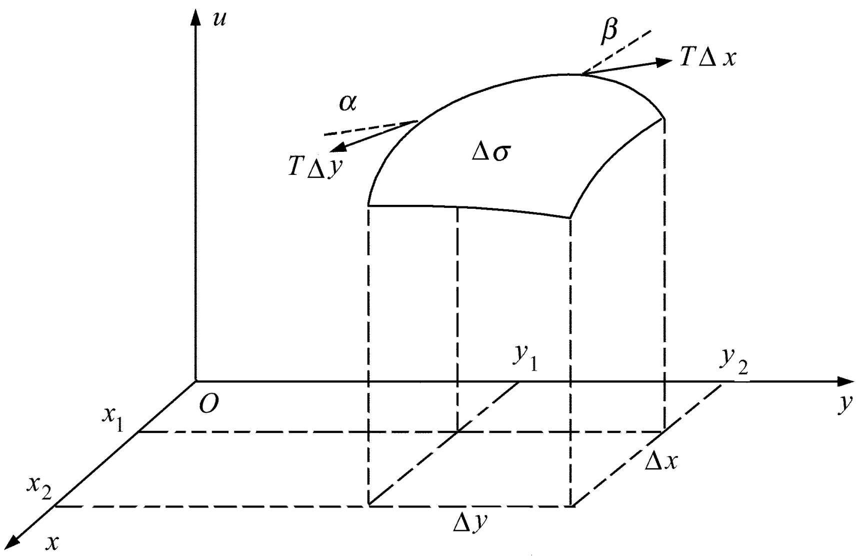

图 1-2

由于薄膜的振动是微小的,于是有

$$\Delta\sigma \approx \Delta x \Delta y,$$

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x(x, y, t),$$

$$\sin\beta \approx \tan\beta = u_y(x, y, t).$$

代入(2.6)式中,得到

$$T\Delta y[u_x(x_2, y, t) - u_x(x_1, y, t)] + T\Delta x[u_y(x, y_2, t) - u_y(x, y_1, t)]$$
$$= \rho\Delta x\Delta y u_{tt}(\bar{x}, \bar{y}, t),$$

上式两边同除以 $\rho\Delta x\Delta y$,得

$$\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x_1+\Delta x, y, t) - u_x(x_1, y, t)}{\Delta x} + \frac{u_y(x, y_1+\Delta y, t) - u_y(x, y_1, t)}{\Delta y}\right]$$
$$= u_{tt}(\bar{x}, \bar{y}, t), \tag{2.7}$$

在(2.7)式中,令 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$,得

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{2.8}$$

其中 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ 表示薄膜的张力密度,这就是**薄膜振动方程**,亦称为**二维波动方程**.

如果作用在薄膜上的还有外力,其密度为 $F(x, y, t)$,这时方程(2.8)可改写为

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t), \tag{2.9}$$

其中 $f(x, y, t) = \dfrac{F(x, y, t)}{\rho}$ 表示单位质量在点 (x, y) 处所受的外力.

注 用类似的方法可推出**三维波动方程**

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z, t),$$

它表示电磁波、声波的传播.

2.3 热传导方程

我们考察空间物体G的热传导问题,令函数$u(x,y,z,t)$为物体G在点(x,y,z)处t时刻的温度,若温度不是常量,则热量由温度高处向温度低处传递,这种现象叫做“热传导”.根据傅里叶(Fourier)热传导定律,物体在无穷小时段$\mathrm{d}t$内流过一个无穷小面积$\mathrm{d}S$的热量$\mathrm{d}Q$与物体温度沿曲面$\mathrm{d}S$的法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比,即

$$\mathrm{d}Q=-\kappa(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

其中$\kappa(x,y,z)$称为物体在点(x,y,z)处的热传导系数,它应取正值.负号的出现是由于热量的流向和温度的梯度的正向(即$\mathrm{grad}u$的方向)相反.也就是说,如果$\mathrm{grad}u$与曲面的法线n交成锐角,则$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{grad}u\cdot n>0$,它表示依法线$n$的方向越过曲面时温度要增加,而热流方向却与此相反,即从温度高的一侧流向低的一侧,依法线n的方向越过曲面的流量就应该是负的.

在物体G内任取一闭曲面S,它所包围的区域记为D,以n表示它的外法线方向.于是从时刻t_1到时刻t_2流进闭曲面内的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\iint_S\kappa(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

今假设函数$u(x,y,z,t)$关于变量x,y,z具有二阶连续偏导数,关于t具有一阶连续偏导数,利用奥斯特罗格拉特斯基-高斯(Ostrogradsky-Gauss)公式(简称奥-高公式),可把(2.11)改写成

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(\kappa u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\kappa u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\kappa u_z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

另一方面,区域D内的总热量又等于

$$\iiint_D C(x,y,z)\rho(x,y,z)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{2.13}$$

其中$\rho(x,y,z)$是物体的密度,$C(x,y,z)$是它的比热.流入的热量使物体内温度发生变化,在时间间隔(t_1,t_2)中物体温度从$u(x,y,z,t_1)$变化到$u(x,y,z,t_2)$,它应吸收的热量是

$$\begin{aligned}Q_2&=\iiint_D C\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D C\rho\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.14}$$

由于热量守恒,则$Q_1=Q_2$,即流入的热量应等于物体温度升高所吸收的热量,因此有等式

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left[C\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(\kappa u_x)-\frac{\partial}{\partial y}(\kappa u_y)-\frac{\partial}{\partial z}(\kappa u_z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t=0. \tag{2.15}$$

由于t_1, t_2与区域D 都是任意取的,且积分号下的被积函数是连续函数,因此在G 内的任意一点于任何时刻都有

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(\kappa u_x)-\frac{\partial}{\partial y}(\kappa u_y)-\frac{\partial}{\partial z}(\kappa u_z)=0. \tag{2.16}$$

如果物体是均匀的且各向同性,则C,ρ,κ 都是常数,这时令$a^2=\frac{\kappa}{C\rho}$,则方程(2.16)化成

$$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, \tag{2.17}$$

这就是著名的**热传导方程**.

如果物体内有热源,热源密度为$F(x,y,z,t)$,这时温度函数$u(x,y,z,t)$应该满足的方程是

$$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z,t), \tag{2.18}$$

其中

$$f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{C\rho}.$$

在适当情况下,方程中描述空间坐标的自变量数目可以减少.例如当物体是均匀的细杆时,如果它的侧面不产生热交换(即绝热),且在同一截面上温度的分布是相同的,则温度函数u 仅与坐标x 及时间t 有关,这时得到的热传导方程就是如下的一维偏微分方程:

$$u_t-a^2u_{xx}=0. \tag{2.19}$$

如果考虑的是一个薄片的热传导,当它的侧面绝热时,便得到二维的热传导方程:

$$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0. \tag{2.20}$$

2.4 拉普拉斯(Laplace)方程

在前面所研究的温度分布问题中,如果经过相当长的时间以后,物体内各点的温度随时间的推移而发生的变化已不显著,这时我们就说温度分布趋于定常,数学上可近似地用$\frac{\partial u}{\partial t}=0$表示. 这样一来方程(2.17)就变成

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \tag{2.21}$$

它被称为 Laplace**方程**.为了书写简洁,我们通常引入如下符号Δ_n:

$$\Delta_n=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

它被称为n 维空间的 Laplace**算子**.在不至于引起混淆的情况下,我们也将Δ_n 简记为Δ.于是方程(2.21)可简写为

$$\Delta u=0.$$

类似地,方程(2.18)能改写成

$$\Delta u=f(x,y,z,t), \tag{2.22}$$

我们称方程(2.22)为**泊松(Poisson)方程**.

习　题　1-2

1. 有一柔软的均匀细线,在阻尼介质中作微小横振动,单位长度弦受的阻力 $F=-Ru_t$. 试推导其振动方程.

2. 设三维热传导方程的解具有球对称形式 $u(x,y,z,t)=u(r,t)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$,试证

$$u_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{2u_r}{r}\right).$$

3. 若 n 维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

具有球对称形式的解 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(r)$,其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$,则

$$f(r)=\begin{cases} C_1+C_2\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n\neq 2,\\ C_1+C_2\ln\dfrac{1}{r}, & n=2,\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

§3　定解问题

3.1　定解问题

正如我们在§1例1所看到的,一个偏微分方程和常微分方程一样,通常有很多解,因此我们需要给出**某些附加条件**来挑出其中的某个解. 另一方面,从§2的讨论可以看出,对于不同的物理现象,可归结为不同形式的偏微分方程,而同一个典型的方程又能代表某些物理过程的共同特点. 如在研究空间中的声波和电磁波的传播时都会出现三维波动方程

$$u_{tt}=a^2\Delta u. \tag{3.1}$$

我们知道,方程建立以后,目的就是要求出它的解. 但是,仅有方程的解还不足以完全确定一个具体的物理过程,因为对于一个具体的物理过程,除了方程本身之外还必须考虑该物理过程的初始状态以及它所满足的外界条件,这些都是本节开头所提到的“某些附加条件”.

例如在弦振动问题的讨论中,如果长度为 l 的弦的两端是固定的,这时位移函

数就应该满足条件

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geqslant 0,\tag{3.2}$$

我们称它为**边界条件**.又如在初始时刻($t=0$)测得弦上各点的位移与速度分别为

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l,\tag{3.3}$$

我们称它为**初始条件**.

在以后的讨论过程中,我们把描绘普遍规律的方程称为**泛定方程**;而称边界条件和初始条件为**定解条件**.定解条件可以有多种形式,它依不同的物理问题而定.

所谓定解问题,就是泛定方程满足某种定解条件,即

$$\begin{cases}\text{泛定方程},\\ \text{定解条件}.\end{cases}$$

若定解条件为初始条件,则称该定解问题为**初值问题**或**柯西**(Cauchy)**问题**;若定解条件为边界条件,则称该定解问题为**边值问题**;若定解条件中既有初始条件又有边界条件,这时称定解问题为**初边值问题**或**混合问题**.

3.2 三类典型的边界条件

关于边界条件的提法,通常有三种形式,这里以热传导现象为例加以说明.

第一边界条件:如果物体G与外界接触的表面的温度是已知的,这时边界条件的提法是

$$u\big|_{\Gamma}=\varphi(x,y,z,t),\tag{3.4}$$

其中Γ是物体G的表面,φ是定义在$(x,y,z)\in\Gamma$,$0\leqslant t\leqslant T$上的已知函数.具有这种边界条件的定解问题称为**第一边值问题**或**狄利克雷**(Dirichlet)**边值问题**.

第二边界条件:如果在物体G和外界接触的表面上,知道的是热量通过表面Γ各点的流速,即知道在单位时间内通过物体G的表面Γ上从物体内向外流出的热量,即已知热流强度$q(x,y,z,t)$.根据Fourier热传导定律(§2(2.10)),我们有

$$\left(-\kappa\frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\Gamma}=q(x,y,z,t),\quad t\geqslant 0,$$

这时边界条件的提法应是

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=\varphi(x,y,z,t),\tag{3.5}$$

其中$\varphi=-\dfrac{q}{\kappa}$是定义在$(x,y,z)\in\Gamma$,$0\leqslant t\leqslant T$上的已知函数.这实际上是知道温度函数$u$在物体表面$\Gamma$上的法向导数.带有边界条件(3.5)的定解问题称为**第二边值问题**或**诺伊曼**(Neumann)**边值问题**.

特别地,如果G的表面Γ是绝热边界,因而$q=0$,则条件(3.5)简化为

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0,\quad t\geqslant 0.\tag{3.6}$$

第三边界条件:当物体位于另一个介质中,且假设介质的温度u_1是已知的,u_1

与物体表面上的温度u往往并不相同,这时会有热交换. 由Newton 热交换定律,在单位时间内从物体表面单位面积中流向介质的热量$q(x,y,z,t)$同物体与介质在表面处的温度差成正比,即

$$q=h(u-u_1),\tag{3.7}$$

其中$h>0$称为两种介质间的热传导系数.

考察在物体中无限贴近于介质表面Γ的曲面Γ_1,由于在物体表面热量不能累积,因此在曲面Γ_1上的热量应等于表面Γ上的热量. 而流过曲面Γ_1的热量由Fourier 定律所确定,它为$-\kappa\dfrac{\partial u}{\partial n}$. 因此,我们有如下关系式:

$$-\kappa\frac{\partial u}{\partial n}=q,$$

即

$$-\kappa\frac{\partial u}{\partial n}=h(u-u_1),$$

因此,在这种情形下的边界条件是

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_{\Gamma}=\varphi(x,y,z,t),\tag{3.8}$$

其中$\sigma=\dfrac{h}{\kappa}$,$\varphi=\dfrac{h}{\kappa}u_1$. 具有条件(3.8)的定解问题称为**第三边值问题**或**鲁宾**(Robin)**边值问题**.

注 对波动方程、Laplace 方程等,我们也可以考虑相应的Dirichlet 边值问题、Neumann 边值问题和Robin 边值问题.

3.3 适定性

设u是一个定义在区域Ω上的函数,在Ω内u及它出现在方程中的微商连续且满足方程,又设函数u以及出现在定解条件中的微商一直连续到Ω的边界,并适合已给的定解条件,那么,我们称函数u是这个定解问题的解.

我们把求一个泛定方程在给定的定解条件下的解,称做**解定解问题**. 一个定解问题,如果满足下列三个条件,就称为是**适定**的:

(1) **存在性**:定解问题至少存在一个解;

(2) **惟一性**:定解问题至多有一个解;

(3) **稳定性**:当已知的定解条件在某种意义下作微小的变动时,相应的定解问题的解也只作微小的变动.

由于偏微分方程是一门应用性较强的学科,当我们利用它的理论和方法去解决某些实际问题时,虽然定解问题的适定性一时还得不到解决,但经过实践检验,结果还是可以采用的. 这时就没有必要墨守先解决适定性方可求解的陈规,因为,理论和实践之间总有一些距离.

习　题　1-3

1. 考虑Poisson 方程的Neumann 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, & (x,y,z)\in\Gamma. \end{cases}$$

(1) 问上述边值问题的解是否惟一?

(2) 由散度定理证明上述边值问题有解的必要条件是

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

2. 设物体表面的绝对温度为 u,此时它向外界辐射出的热量按 Stefan-Boltzmann 定律正比于 u^4,即

$$\mathrm{d}Q = \sigma u^4\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

今假设物体与周围介质之间只有热辐射而没有热传导,周围介质的温度为 $f(x,y,z,t)$,试给出该热传导问题的边界条件.

第二章　一阶偏微分方程

在这一章,我们将介绍一阶偏微分方程的特征.利用特征的概念,我们将一阶偏微分方程的求解转化为相应的特征常微分方程组的求解.利用常微分方程的首次积分,我们能求解各种各样的一阶偏微分方程.此外,本章的内容也是我们今后学习偏微分方程的基础.

§1　基本概念

1.1　积分曲面

这一节我们只介绍一阶偏微分方程的有关概念.一阶偏微分方程的一般形式可写成

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \tag{1.1}$$

或者写成就某一个偏导数解出的情形

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right), \tag{1.2}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是自变量,u 是未知函数.

关于方程(1.1)的解 u 的几何意义,可看做是$(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$空间的一个曲面,这个曲面通常称为方程(1.1)的**积分曲面**.

在二维的情形,用 x 和 y 表示自变量,u 为未知函数,常记$\frac{\partial u}{\partial x}=p$,$\frac{\partial u}{\partial y}=q$,这时一阶偏微分方程可写成

$$F(x, y, u, p, q)=0.$$

于是它的解 $u=u(x, y)$的几何意义就是(x, y, u)空间的一个曲面,它是定义在(x, y)平面中某一区域上的函数.

例1　求一阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y$$

的解.

解　显然,它的解是

$$u=\frac{1}{2}x^2+xy+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$是关于 y 的任意连续可微函数.

例2 求一阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的解.

解 作变换

$$x=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\quad y=\frac{1}{2}(\xi-\eta),$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

对η积分,得$u=\varphi(\xi)$,这里φ是关于变量ξ的任意连续可微函数,所以

$$u=\varphi(x+y)$$

就是所求方程的解.

1.2 特征线与全特征线

为了简单起见,我们首先考虑一阶半线性偏微分方程,它的一般形式是

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,u),\tag{1.3}$$

其中$A_1,A_2,\cdots,A_n,f$ 都是已知的函数.

特别若函数f 关于u 是线性的,则方程(1.3)为线性方程;当$f\equiv 0$时,则称它为一阶线性齐次偏微分方程.

对于偏微分方程(1.3),我们写出对应的常微分方程组为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=A_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=A_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases}\tag{1.4}$$

或把它写成对称的形式:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{A_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n}.\tag{1.5}$$

我们称方程组(1.4)或(1.5)为偏微分方程(1.3)的**特征方程**,它的每一组解$x_i=x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$空间中表示一条曲线l,我们称这条曲线为方程(1.3)的**特征线**.方程(1.3)的求解问题与它的特征方程组(1.4)有着密切的关系.事实上,沿着特征线可将偏微分方程化成常微分方程.设$u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(1.3)的解,则沿着特征线l有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\\&=A_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\\&=f(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),u(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))).\end{aligned}\tag{1.6}$$

我们常称方程(1.6)的解为偏微分方程(1.3)的**全特征线**,显然它由常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=A_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=A_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=A_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\end{cases}\tag{1.7}$$

决定,全特征线在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$空间的投影就是特征线.

常微分方程组(1.7)的积分曲线完全位于偏微分方程(1.3)的积分曲面上,即全特征线一定落在积分曲面上,而且我们可以用全特征线构造偏微分方程的积分曲面.关于这个事实,在后面还要作进一步的讨论.

在一阶偏微分方程的讨论中,特征线起着重要的作用,正是由于引入了特征线这个概念,我们把对一阶偏微分方程的求解问题,化成了对一个常微分方程组的求解问题,从而使常微分方程组初积分对求解一阶偏微分方程也起到特殊的作用.

例3 求一阶偏微分方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的通解.

解 它的特征方程组可写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x.$$

容易求出它的特征线为$x^2+y^2=c_1$,沿着此特征线,偏微分方程可化为常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

关于t积分上式,得$u=c_2$,这里任意常数c_1与c_2之间应存在一定的关系,我们用任意函数Φ表示:

$$c_2=\Phi(c_1).$$

由此得到方程的通解(下一节将给出严格的理论证明)为

$$u=\Phi(x^2+y^2).$$

习 题 2-1

1. 求下列一阶线性齐次偏微分方程的特征线：

(1) $x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}+3z\frac{\partial u}{\partial z}=0$；

(2) $\sqrt{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sqrt{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$；

(3) $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$.

2. 求下列方程的通解：

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial u}{\partial y}=0$， 常数 $a>0$；

(2) $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2$；

(3) $x\frac{\partial u}{\partial y}=yu$.

§ 2 线性齐次偏微分方程

2.1 通解的结构

首先,我们介绍具有如下形式的线性齐次偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0. \tag{2.1}$$

假定系数 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的已知函数,它们在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 空间的某个区域内是连续可微的,并且不同时为零.

偏微分方程(2.1)对应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{A_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n}. \tag{2.2}$$

根据常微分方程理论建立的初积分概念及特征的定义,可以看出,偏微分方程(2.1)的解与特征方程组(2.2)的初积分密切相关.要求出线性齐次偏微分方程(2.1)的一个特解,只要求得常微分方程组(2.2)的一个初积分就行了.

例 1 求一阶线性齐次偏微分方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

的解.

解 对应的特征方程是

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{-z}.$$

可求出初积分$\varphi=x\sqrt{y}=c_1,\varphi=xz=c_2$,所以函数

$$u_1=x\sqrt{y},\quad u_2=xz$$

都是方程的解.

我们知道如果$\varphi=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程组(2.2)的初积分,那么对于任意连续可微函数Φ,显然$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})=c$也是方程组(2.2)的初积分,因而$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$也是方程(2.1)的解.

由此可见,一阶线性偏微分方程(2.1)的解依赖于一个任意函数Φ.我们知道,一阶线性常微分方程的通解含有一个任意常数,那么我们是否可以说一阶线性偏微分方程的通解也仅依赖于一个任意函数?下面的定理给出了一个肯定的回答.

定理 2.1 若$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程组(2.2)的$n-1$个相互独立的初积分,则函数

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})\tag{2.3}$$

就是方程(2.1)的通解,其中Φ是其变元的任意连续可微函数.

证 设$u=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(2.1)的任一解,我们只要证明存在函数$\Phi$,使得

$$\psi=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$$

成立即可.

由于函数ψ和$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$都是方程(2.1)的解,所以有

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}A_i\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}=0,\\ \sum_{i=1}^{n}A_i\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n}A_i\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_i}=0.\end{cases}\tag{2.4}$$

我们把方程组(2.4)看做是对函数$A_1,A_2,\cdots,A_n$的线性方程组,由于$A_i(i=1,2,\cdots,n)$在讨论的区域上不同时为零,所以方程组(2.4)的雅可比(Jacobi)行列式

$$\frac{D(\psi,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\equiv0.\tag{2.5}$$

现在由(2.5)我们能证明存在一个函数Φ,使得

$$\psi=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}).\tag{2.6}$$

事实上,由于$\varphi_i=c_i(i=1,2,\cdots,n-1)$是相互独立的,所以存在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$,满足条件$1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1}\leqslant n$,使得

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_{n-1}})}\neq 0.$$

为了简单起见,不妨设

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}\neq 0. \tag{2.7}$$

由隐函数存在定理,从关系式 $u_1=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,u_{n-1}=\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可解出

$$x_i=w_i(u_1,\cdots,u_{n-1},x_n),\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

于是

$$u=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv\psi(w_1,\cdots,w_{n-1},x_n)=\Phi(u_1,\cdots,u_{n-1},x_n). \tag{2.8}$$

余下只需证明 Φ 与 x_n 无关,即 $\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\equiv 0$. 由(2.5),我们有

$$\Delta=\begin{vmatrix} du & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}} \\ du_1 & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ du_{n-1} & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}} \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_i}dx_i & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$\equiv(-1)^{n-1}\frac{D(\psi,\varphi,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}dx_n\equiv 0.$$

将行列式 Δ 按第一列展开,有

$$\frac{D(\varphi,\varphi,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}du=-\sum_{i=1}^{n-1}B_{i+1,1}du_i,$$

其中 $B_{i,j}$ 是 Δ 的第 i 行第 j 列的元素的代数余子式.

由(2.7),我们有

$$du=\sum_{i=1}^{n-1}D_i du_i, \tag{2.9}$$

其中

$$D_i=\frac{-B_{i+1,1}}{\frac{D(\varphi,\varphi,\cdots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})}}.$$

另一方面,由(2.8),我们有

$$du=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}du_i+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}dx_n. \tag{2.10}$$

由(2.10)式减去(2.9)式,得到

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}-D_i\right)du_i+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}dx_n\equiv 0.$$

由 u_i 的表达式,有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n \equiv 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]\mathrm{d}x_j+\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right]\mathrm{d}x_n=0.$$

由于 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 彼此无关,故上式中的系数必须同时为零,即

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\equiv 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n-1}}\equiv 0,\\ \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}+\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\equiv 0.\end{cases}\tag{2.11}$$

由(2.7)及(2.11)的前 $n-1$ 个方程推出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}-D_i\equiv 0,\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

代入(2.11)的最后一个方程推出 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\equiv 0$. 于是

$$u=\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}),$$

即

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}).$$

定理证毕.

注 定理 2.1 表明:为了获得一阶线性齐次偏微分方程(2.1)的通解,我们仅需要求得它所对应的特征方程组(2.2)的 $n-1$ 个相互独立的初积分. 这样一来,一阶线性齐次偏微分方程(2.1)的求解问题,将化归为求一个一阶常微分方程组的初积分问题.

例 2 求偏微分方程

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

的通解.

解 对应的特征方程是

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}.$$

设 $x_n\neq 0$,于是可求出它的 $n-1$ 个相互独立的初积分为

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\quad \frac{x_2}{x_n}=c_2,\quad \cdots,\quad \frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},$$

所以方程的通解可写为

$$u=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

这里 Φ 是关于其变元的任意连续可微函数.

例 3 求偏微分方程

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的通解.

解 这是我们在§ 1 讨论过的例题,对于特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x},$$

容易看出,$\varphi=x^2+y^2=c$ 就是它的一个初积分,由公式(2.3),方程的通解表达式可写成

$$u=\Phi(\varphi)=\Phi(x^2+y^2),$$

其中 Φ 是任意连续可微函数,方程的一切特解都可通过对函数 Φ 的不同选取而得到,如:

取 $\Phi(\varphi)=\varphi$,就得到特解 $u=x^2+y^2$,它的几何图形是一个旋转抛物面;

取 $\Phi(\varphi)=\sqrt{R^2-\varphi^2}$,得到特解 $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,这是一个上半球面;

取 $\Phi(\varphi)=\sqrt{\varphi}$,得到特解 $u=\sqrt{x^2+y^2}$,这是一个锥面.

2.2 初值问题

下面我们将利用定理 2.1 所求得的通解来解方程(2.1)的初值问题.为简单起见,不妨假设方程(2.1)的未知函数是含两个自变量的情形,即

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2.12}$$

关于方程(2.12)的初值问题是指:在点(x_0,y_0)的某个邻域D 内,求方程(2.12)的这样一个解

$$u=f(x,y),$$

使它满足初始条件

$$u\big|_{x=x_0}=\psi(y), \tag{2.13}$$

这里 $\psi(y)$是已知的连续可微函数.

这个定解问题的几何意义是:在由方程(2.12)确定的所有积分曲面中,找通过由初始条件(2.13)所确定的那条曲线的积分曲面.

下面我们给出初值问题(2.12)、(2.13)的求解过程,我们知道,方程(2.12)的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}.$$

设它的初积分是$\varphi(x,y)=c_0$,于是,由公式(2.3),方程(2.12)的通解可写成

$$u=\Phi(\varphi),$$

其中Φ是任意连续可微函数.现在的问题是如何利用初始条件(2.13)将任意函数Φ确定出来.为此,令

$$\Phi(\varphi)\big|_{x=x_0}=\psi(y), \tag{2.14}$$

若记$\varphi\big|_{x=x_0}=\bar{\varphi}$,则方程(2.14)可写成

$$\Phi(\bar{\varphi})=\psi(y). \tag{2.15}$$

假定在D内由$\varphi\big|_{x=x_0}=\bar{\varphi}$可解出

$$y=\omega(\bar{\varphi}),$$

于是(2.15)式可写成

$$\Phi(\bar{\varphi})=\psi(\omega(\bar{\varphi})),$$

这样任意函数Φ就被确定了,即

$$\Phi(\varphi)=\psi(\omega(\varphi)),$$

从而初值问题的解就是

$$u=\psi(\omega(\varphi)).$$

不难验证,这个解满足方程(2.12)和初始条件(2.13).

在前面的例3中,我们选取了几个特解,实际上,它们是分别以$u\big|_{x=0}=y^2$,$u\big|_{x=0}=\sqrt{R^2-y^2}$和$u\big|_{x=0}=y$为初始条件所确定的特解.

例4 求初值问题

$$\begin{cases}\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\\ u\big|_{x=1}=y-z\end{cases}$$

的解.

解 对应的特征方程为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}},$$

不难求出它的两个相互独立的初积分是

$$\varphi_1=\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1,$$

$$\varphi_2=\sqrt{x}-\sqrt{z}=c_2.$$

于是得到方程的通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2).$$

记$\varphi_1\big|_{x=1}=\bar{\varphi}_1=1-\sqrt{y}$,$\varphi_2\big|_{x=1}=\bar{\varphi}_2=1-\sqrt{z}$,由此解得$y=(1-\bar{\varphi}_1)^2$,$z=(1-\bar{\varphi}_2)^2$,再利用初始条件,令

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2)\big|_{x=1}=y-z,$$

就得到