实分析与泛函分析引论

李国祯　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书共九章，分为两大部分. 前四章为实变函数部分，主要介绍了 Lebesgue 测度和积分论的核心内容；后五章为线性泛函分析部分，主要介绍了三大空间——距离空间、Banach 空间、Hilbert 空间及其上的有界线性算子的基础理论，其中包括线性泛函分析三大基本定理等.

本书可作为高等院校数学专业教材，也可供相关研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

实分析与泛函分析引论/李国祯主编. —北京：科学出版社，2004
ISBN 7-03-014561-5

Ⅰ.实… Ⅱ.李… Ⅲ.①实分析-高等学校-教材 ②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 113784 号

责任编辑：杨瑰玉

责任印制：高 嵘/封面设计：李梦佳

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2004 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2004 年 12 月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1~4 000 字数：278 000

定价：18.00 元

前　言

目前我国高等教育已从精英教育向大众化教育转变，教学的对象发生了较大的变化，教学要求也有所区别。我们在教学过程中发现以培养数学精英为主的教材内容偏难、偏深、偏多，学生普遍感到难学，教师也感到难教。为此，我们决定编写一本适合目前教学实际情况的简明教材，供学生参考。我们力求在保持教育部颁发的该课程教学大纲的核心基本内容的前提下进一步贯彻少而精的原则，把该课程基础性和常用的必要知识介绍给读者，使他们获得进一步学习时所必需的基础；同时尽可能做到通俗易懂、便于自学，把该课程的概念、理论和已学过的数学分析、解析几何、线性代数等课程紧密联系起来，以避免让读者觉得本课程内容过于抽象、难于理解；每章配置的习题紧密结合基本概念、基本知识和基本方法的理解和应用，选择了一些通过自己努力能独立完成的练习题，数量适当，使读者有信心学好这门课程。

本书前四章为实变函数部分，主要介绍了Lebesgue 测度和积分论的核心内容，作为数学类本科专业必修部分；后五章为线性泛函分析部分，主要介绍了三大空间——距离空间、Banach 空间、Hilbert 空间及其上的有界线性算子的基础理论，其中包括线性泛函分析三大基本定理等内容，这部分作为选修内容。

本书由李国祯主编，参加编写的有罗南晨、郑雄军、叶中秋、董祥南等。研究生段华贵、吴克晴也为本书付出了辛勤的劳动。

本书得到江西师范大学的大力支持和关怀，我们深表谢意。

由于我们水平有限，书中错误与疏漏之处在所难免，希望读者及同行不吝赐教。

编　者

2004 年 6 月于南昌

目　录

第一章　集合与点集

集合论是实变函数论的基础，它是研究集合的一般性质的，属于数学基础的一个分支．我们在这里介绍有关集合论的一些基本知识．由于读者在中学和大学的其他基础课（如数学分析、高等代数）中已经接触到集合论，对有些结论我们就述而不证．

在实变函数论中，我们要研究 n 个自变量的实变函数，因此我们在本章还要对特殊的集合即 n 维空间的点集的相关理论作一些介绍．

§ 1　集合及其运算

集合是数学中的一个基础概念．我们通常用"具有某种特定性质的对象的全体"来加以描述．当集合 A 是具有某种性质 P 的对象全体时，我们常用如下形式来表示：

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，若 A 是大于 -1 小于 1 的一切实数的集合，确定集合 A 的性质是 $|x|<1$，A 可表示为

$$A=\{x \mid |x|<1\}$$

又设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数（如图 1-1），A 表示 $[a,b]$ 中所有使 $f(x)$ 的值不小于 α 的一切 x 所组成的集合，则 A 可表示为

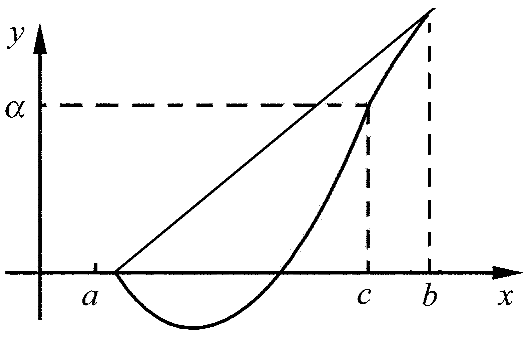

图 1-1

$$A=\{x \mid f(x)\geqslant\alpha,\quad x\in[a,b]\}$$

显然在图 1-1 的情形 $A=[c,b]$．

集合中每个对象称为集合的**元素**．x 是 A 中的元素记作 $x\in$

A,否则记作$x \in A$ 或$x \notin A$. 值得注意的是$x \in A$ 与$x \in A$ 必居且仅居其一,也就是说我们使用集合概念时哪些对象是它的元素必须是明确的. 通常用大写字母表示集合如A、B、C 等,用小写字母表示它们的元素如x,y,z 等.

例如若 R^1 表示全体实数构成的集合,每个实数x 就是集合的元素. 一切自然数组成的集合 N中,每个自然数都是它的元素,例如$3 \in \mathrm{N}$而$\frac{1}{2} \in \mathrm{N}$.

不包含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$. 空集或只含有有限个元素的集合称为**有限集**,不是有限集的集合称为**无限集**.

例如方程$x^2 + 1 = 0$的全体实数根所组成的集就是一个空集. 由自然数1,2,3,4 所组成的集$\{1,2,3,4\}$是一个有限集. 前面提到的全体自然数 N和全体实数的集合 R^1 都是无限集的例子.

设A、B 是两个集,若A 和B 的元素完全相同,就称A 和B **相等**,记作$A = B$(或$B = A$). 例如设A 表示方程$x^2 - 1 = 0$ 的根组成的集合,$B = \{-1,1\}$,则$A = B$.

若集合A 的元素都是集合B 的元素,就称A 是B 的**子集**,记作$A \subset B$(或$B \supset A$),读作A 包含于B(或B 包含A). 若$A \subset B$,而B 中有元素b不属于A,称A 是B 的**真子集**. 如正整数集是有理数集的真子集. 空集是任何集的子集. 事实上,设若$\varnothing \subset A$ 不成立,必有元素 $a \in \varnothing$且 $a \in A$,然而$\varnothing$是不包含任何元素的空集,这就产生矛盾.

由集的“相等”与“包含”的定义,容易得到如下的定理:

定理 1.1　设A、B 是两个集合,则$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且$B \subset A$.

定理 1.2　对任意集合A、B、C,有

(1) $A \subset A$;

(2) 若$A \subset B$,$B \subset C$,则$A \subset C$.

在集合论中往往要考虑集合与集合之间的关系,在研究函数性质时也需要将具有某些性质的集合作合并与分解. 例如集合$\{x \mid |x| > 1\}$实际上是两个集合$A_1 = \{x \mid x > 1\}$和$A_2 = \{x \mid x < -1\}$

合并而成的,因此必须引进集合的一些基本运算.

我们介绍四种集合的运算,它们是“**并**”、“**交**”、“**余**”和“**差**”.

定义1.1 设A和B为二集合,集合S仅仅包含A与B的所有元素,称S为集合A与B的**并集**,记为$S=A\cup B$.于是

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

例如$\{a,b,c\}\cup\{a,b,d\}=\{a,b,c,d\}$.由并集的定义可得

(1) $A\cup A=A$;

(2) $A\cup B=B\cup A$;

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(4) $A\cup B\supset A, A\cup B\supset B$.

定义1.2 设A和B为二集合,集合P仅仅包含A和B的所有共同元素,称P为A与B的**交集**,记为$P=A\cap B$.于是

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

例如$\{a,b,c\}\cap\{a,b,d\}=\{a,b\}$.由交集定义可以得

(1) $A\cap A=A$;

(2) $A\cap B=B\cap A$;

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$;

(4) $A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$.

两集的并集和交集可以分别用图来表示(图1-2,1-3).

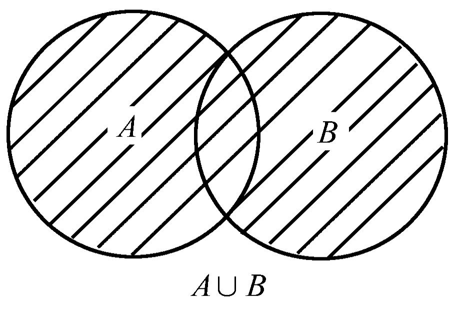

图1-2

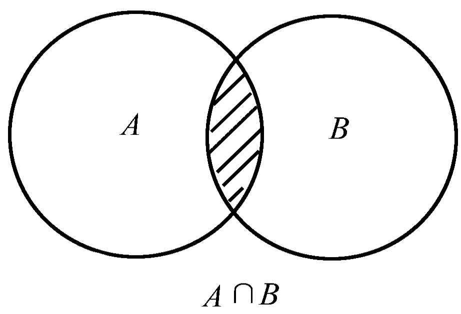

图1-3

对于并集和交集的混合运算,我们有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

“并”和“交”运算可以推广到**一族集合**上去.设$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是

任意一族集合,其中λ是集合的**指标**,它在某个固定的**指标集**Λ中变化,由一切$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$的所有元素组成的集称为这族集合的并集,记为$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,即

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid 有\ \lambda\in\Lambda,使\ x\in A_\lambda\}$$

由一切$A_\lambda(\lambda\in A)$的共有元素组成的集合称为这族集合的交集,记为$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,那么

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x\mid 对每一个\ \lambda\in\Lambda,都有\ x\in A_\lambda\}$$

例1 设$A_i=\left[0,2-\dfrac{1}{i}\right]$,$i=1,2,\cdots$,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=[0,2),\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=[0,1]$$

例2 设$f(x)$是定义于R^1上的实函数,a是一常数,则

$$\{x\mid f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid f(x)\geqslant a+\frac{1}{n}\right\}$$

$$\{x\mid f(x)\geqslant a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid f(x)>a-\frac{1}{n}\right\}$$

其证明作为习题.

通常我们都在一个事先确定的集合上来研究和讨论一些问题,这个集合就称为**基本集**.例如我们有时取基本集为实数集R^1或R^n.

定义1.3 设X是基本集,$A\subset X$,集合$\{x\mid x\in X\ 且\ x\notin A\}$称为$A$的**余集**,记为$A^c$,如图1-4所示.

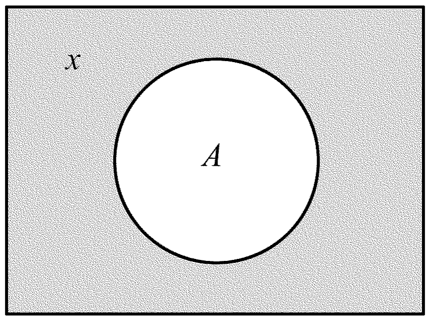

图1-4

例3 取R^1为基本集,集合$A=\{x\mid |x|<1\}$的余集A^c是如下两个集的并集,即$A^c=\{x\mid x\geqslant 1\}\cup\{x\mid x\leqslant -1\}$.

例4 一切有理数的集合对于全体实数的集R^1的余集是一切无理数所构成的集.

需要注意的是基本集X的取法不同,相对X的余集是不相同的.在例3中如果我们取$X=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$,则$A^c=\{-1,1\}$.

定义1.4 设A与B为二集合,集合R仅包含属于A而不属于

B 的一切元素,则称 R 为 A 与 B 的**差集**,记为 $R = A - B$ 或 $A\backslash B$. 于是 $A - B = \{x \mid x \in A$ 而 $x \notin B\}$.

例 5 设 $A = [0,1]$, $B = \left[\frac{1}{2},2\right]$, 则 $A - B = \left[0,\frac{1}{2}\right)$.

当集合 A 与 B 的包含关系不同, $A - B$ 是不一样的. $A - B$ 的各种情形见图 1-5.

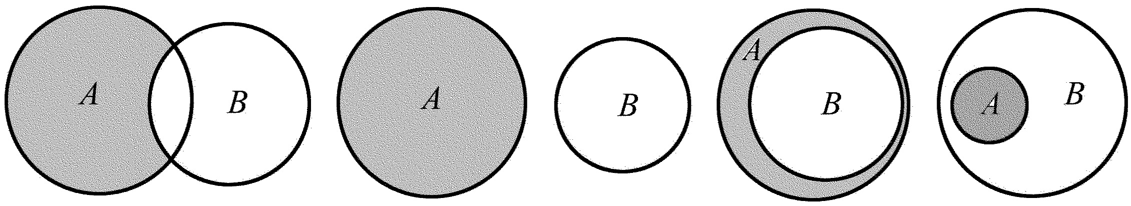

图 1-5

一般来说 $(A - B)\cup B$ 未必等于 A, 读者可以证明 $(A - B)\cup B = A$ 的充要条件是 $B\subset A$.

关于交集与差集的混合运算,我们有以下的等式:

$$A\cap(B - C) = (A\cap B) - (A\cap C)$$

定理 1.3 (De Morgan 公式)

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

证明 由定理 1.1 证明两集合相等,仅要证明两集合互相包含. 我们以第一式为例,为方便我们记左方的集为 E, 右方集为 F.

若 $E\neq\varnothing$, 设 $x\in E$, 则 $x\notin E^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. 由并集定义可知对任意 $\lambda\in\Lambda$ 都有 $x\notin A_\lambda$. 因此对任意 $\lambda\in\Lambda$, $x\in A_\lambda^c$. 由交集定义可知 $x\in F$. 这就表明 $E\subset F$.

反之,当 $F\neq\varnothing$, 设 $x\in F$, 则对一切 $\lambda\in\Lambda$, $x\in A_\lambda^c$, 由余集定义对一切 $\lambda\in\Lambda$, $x\notin A_\lambda$, 于是 $x\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, 这就给出 $x\in E$, 从而得到 $F\subset E$. 这样定理成立.

下面我们考虑集列的极限. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列集,若满足条件 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 称这样一列集为**单调增加集列**. 设

$$A_n=\left[0,2-\frac{1}{n}\right],\quad n=1,2,\cdots$$

显然$\{A_n\}$就是单调增加集列.

同样可以定义**单调减少集列**,即一列集满足条件$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$.例如设$A_n=\left[0,\frac{1}{n}\right]$,$n=1,2,\cdots$,则$\{A_n\}$就是单调减少集列.

定义 1.5 设$\{A_n\}$是一个任意集列,属于集列$\{A_n\}$中无穷多个集的那种元素的全体所组成的集称为集列$\{A_n\}$的**上限集**,记为$\overline{\lim\limits_n}A_n$或$\lim\limits_n\sup A_n$.于是$\overline{\lim\limits_n}A_n=\lim\limits_n\sup A_n=\{x\mid x$ 属于无穷多个集$A_n\}$.

定义 1.6 设$\{A_n\}$是一个任意集列,属于集列$\{A_n\}$中从某个指标n_0(n_0不是固定的,与x有关)以后的一切集A_{n_0+k}的那种元素x的全体所组成的集称为集列$\{A_n\}$的**下限集**.记为$\underline{\lim\limits_n}A_n$或$\lim\limits_n\inf A_n$.于是$\underline{\lim\limits_n}A_n=\lim\limits_n\inf A_n=\{x\mid$存在自然数$n_0$,使$x\in A_{n_0+k}$,$k=0,1,2,\cdots\}$.

显然$\underline{\lim\limits_n}A_n\subset\overline{\lim\limits_n}A_n$.

当$\underline{\lim\limits_n}A_n=\overline{\lim\limits_n}A_n=A$时,称集列$\{A_n\}$**收敛**于$A$,记作$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$.

例 6 1)设$A_n=\left[\frac{1}{n},3+(-1)^n\right]$,$n=1,2,3,\cdots$,则$\underline{\lim\limits_n}A_n=(0,2]$,$\overline{\lim\limits_n}A_n=(0,4]$.此时$\underline{\lim\limits_n}A_n\neq\overline{\lim\limits_n}A_n$.

2)设$A_n=\left[\frac{1}{n},3\right]$,$n=1,2,\cdots$,则$\underline{\lim\limits_n}A_n=\overline{\lim\limits_n}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=(0,3]$.

由上限集和下限集的定义可以得到:

$$\overline{\lim_n}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$$

$$\underline{\lim_n}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$$

现在证明第一式. 若 $x \in \overline{\lim_n} A_n$,则有无穷多个$n$,使 $x \in A_n$. 对任意n,在A_n,A_{n+1},…中一定有包含x 的集合,因此$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 由于$n$ 的任意性,所以$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 反之,若$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$,则对任意$n$,$x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$,因此必有$m \geqslant n$ 使 $x \in A_m$. 这表明使 $x \in A_n$ 的指标n 必有无穷多个,因此 $x \in \overline{\lim_n} A_n$.

第二式的证明,请读者按定义自己作出.

对于单调集列,有如下定理:

定理 1.4 单调集列是收敛的. 并且若$\{A_n\}$是单调增加的,则$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;若$\{A_n\}$是单调减少的,则$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

证明 我们仅证第一个结论,后一结论请读者自证. 设$\{A_n\}$是单调增加集列,若$x \in \overline{\lim_n} A_n$,则$x$ 属于无穷多个A_n,由于单调性x 必属于某个 n_0 以后的所有 A_n,因此 $x \in \underline{\lim_n} A_n$. 由于$\underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n$,我们就有$\overline{\lim_n} A_n = \underline{\lim_n} A_n$. 这表明单调增加集列是收敛的. 若$x \in \lim\limits_{n\to\infty} A_n$,显然$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. 反之,若$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,当然$x \in A_{n_0}$,由单调性可知 $x \in A_{n_0+k}$,$k=0,1,2,\cdots$,这表明 $x \in \underline{\lim_n} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. 这就证明$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

我们再介绍集的**特征函数**的定义. 设X 是一个非空的集,A 是X 的一个子集,作X 上的函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A \\ 0, & \text{当 } x \in X - A \end{cases}$$

称$\chi_A(x)$为集A 的特征函数.

§ 2 一一对应和基数

在集合论中一个基本问题是一个集合元素的多少.

设A是有限个元素组成的集合,A中元素的多少就是A中元素的个数.空集$\varnothing$的元素个数是零.而非空的有限集元素个数一定是一个正整数.为了求得元素个数,只要逐个地去数一下就可得到.要比较两个有限集合A、B它们元素个数是否相同,可通过上面提到的方法数一下每个集合元素个数,看所得的正整数是否相同.但是我们也可以不通过数的方法来解决问题.例如

$$A = \{a,b,c,d,e\}$$
$$B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$$

我们只要排出下面的表

A:	a	b	c	d	e
B:	α	β	γ	δ	ε

虽然不去数A与B的元素个数,我们也知道它们的元素个数是相等的.

这种比较的方法实质是对于集A的每个元素,集B中有一个且只有一个元素与它对应,反之也是如此.这种比较方法的优点在于它能推广到无限集的元素个数比较上去.

定义1.7　设A与B为二集.若有对应的法则φ存在,使A中任一元素a,有B的惟一元素b与之对应;并且B中任一元素b,也有A中惟一元素a与之对应,此时称法则φ建立了A与B的一个**一一对应**,或称φ是A到B上的一一映射,简称**一一映射**.

定义1.8　设A、B是两个集,若存在A到B上的一个一一对应f,则称A与B是对等的,或具有相同的基数(势),记为$A \sim B$.我们规定$\varnothing \sim \varnothing$.

例1　设N是一切自然数的集合,M是一切负整数的集合.令每个自然数n对应于负整数$-n$,则N与M之间建立了一一对应,因此$\mathrm{N} \sim M$.

例2　设A与B是两个同心圆周上的点集如图1-6.通过从圆心作射线的方法容易看到A与B之间存在一个一一对应,因此$A \sim B$.值得注意的是若将此二圆周展开为线段,则此二线段的长度

并不相同. 这个例子指出一条较长的曲线并不比一条较短的曲线有"更多的点".

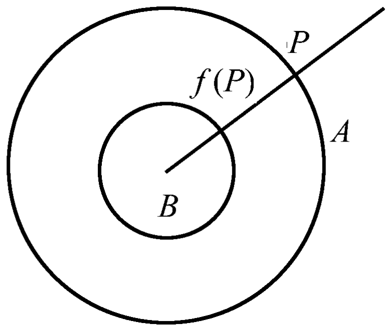

图 1-6

有了对等的概念,我们可以给有限集、无限集下严格的定义.

定义 1.9 设 $M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$). 若集 A 为空集或与某个 M_n 对等,则称 A 为**有限集**,称 n 为 A 的元素个数. 不是有限集的集称为**无限集**.

例 3 设 N 是一切自然数所成的集,而 N_1 是一切正偶数所组成的集. 容易看出 $N_1 \subset \mathrm{N}$,也就是说 N_1 是 N 的一个真子集. 现在我们来建立 N 与 N_1 的一一对应. 令 1 对应于 2, 2 对应于 4, $\cdots$, 一般地,令 n 对应于偶数 $2n$,于是 $\mathrm{N} \sim N_1$. 这个例子表明一个集合可以和它的真子集一一对应. 当然对于有限集来说,这是不可能的. 可以证明,任何无限集必能与它的一个真子集对等(见后面定理 1.5),这是无限集的特征. 因此我们可有如下的等价定义.

定义 1.9′ 凡能与其某一个真子集对等的集称为无限集,不是无限集的集称为有限集.

显然对等关系"~ "有如下性质:

(1) $A \sim A$ (自反性);

(2) 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$ (对称性);

(3) 若 $A \sim B$, $B \sim C$,则 $A \sim C$ (传递性).

此外还有下面的一个性质.

(4) 设具有同一指标集 Λ 的两个集族 $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 和 $\{B_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$,每个集族中的集都是两两不相交的. 如果对任意 $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \sim B_\lambda$,则 $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.

性质(1),(2),(3)可由定义直接得到,性质(4)可通过作出 A 与 B 之间的一个一一对应来证明.

证明 我们先作出 A 到 B 的一个映射,再证明它是一一映射.

对任意 $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda \sim B_\lambda$,因此存在 A_λ 到 B_λ 的一一映射:

$$f_\lambda: A_\lambda \to B_\lambda, x \mapsto f_\lambda(x)$$

作映射f:任意$x \in A$,必存在惟一的$\lambda \in \Lambda$,使$x \in A_\lambda$,这是因为A_λ两两互不相交,定义$f(x)=f_\lambda(x)$.

若$x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$,当x_1, x_2属于同一个A_λ时,因$f(x_1)=f_\lambda(x_1)$, $f(x_2)=f_\lambda(x_2)$,而f_λ是一一对应,因此$f(x_1) \neq f(x_2)$. 当x_1与x_2属于不同的A_λ时,我们设$x_1 \in A_{\lambda_1}$, $x_2 \in A_{\lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,此时$f(x_1)=f_\lambda(x_1) \in B_{\lambda_1}$, $f(x_2)=f_{\lambda_2}(x_2) \in B_{\lambda_2}$. 因$\{B_\lambda\}$也是两两互不相交的,我们得到$f(x_1) \neq f(x_2)$. 此外,对任意$y \in B$,必有某$\lambda \in \Lambda$,使$y \in B_\lambda$,于是存在$x \in A_\lambda$,使$f_\lambda(x)=y$,即$f(x)=y$. 所以$f(x)$是$A$到$B$上的一一对应.

有了对等或基数的概念,就可以比较两个集的元素的“多少”了. 一个集合的基数是所有与之对等的集合所共同有的一个属性. 用$\overline{\overline{A}}$表示集合A的基数. A与B有相同的基数记为$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$,由定义它等价于$A \sim B$. 设$n$是一个自然数,$M_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若$A$与某个$M_n$对等,那么$A$为有限集,规定$\overline{\overline{A}}=n$. 集合的基数概念是有限集元素个数的拓广. 无限集有如下的性质:

定理 1.5　无限集必与它的一个真子集对等.

证明　记此无限集为A. 在A中任取元素a_1,集$A-\{a_1\}$不是空集,因为A是无限集. 再从$A-\{a_1\}$中任取元素a_2,集$A-\{a_1,a_2\}$也决不是空集. 可继续下去,从A中取出一列元素$a_1,a_2,\cdots$,记$A-\{a_n \mid n=1,2,\cdots\}=A_1$. 在$A$中取出一个真子集$\{a_2,a_3,\cdots\} \cup A_1=\widetilde{A}$. 作$A$与$\widetilde{A}$的一个映射$\varphi$:

$$\varphi(a_i)=a_{i+1}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$\varphi(x)=x, \quad x \in A_1$$

显然,φ是A到$\widetilde{A}$上的一一对应,也就是A与其真子集$\widetilde{A}$对等.

关于基数的比较,我们给出:

定义 1.10　设A、B是两个集合,如果A和B不对等,但存在B的子集B^*与A对等,则称$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

按上述定义是否会出现$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$同时成立的情况? 下面

的定理说明这是不可能的.

定理1.6(Bernstein**定理**) 若A,B是两个集合,如果存在A的子集A_0,B的子集B_0,使$A\sim B_0$,$B\sim A_0$,则$A\sim B$.

证明 设φ是A与B_0之间,ψ是B与A_0之间的一个一一对应,令

$$\begin{aligned}&A-A_0=A_1,\quad \varphi(A_1)=B_1,\\&\psi(B_1)=A_2,\quad \varphi(A_2)=B_2,\\&\psi(B_2)=A_3,\quad \varphi(A_3)=B_3,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

由于φ与ψ都是一一映射,故$A_1,A_2,A_3,\cdots$是互不相交的,$B_1,B_2,B_3,\cdots$等也互不相交.显然由映射φ知$A_n\sim B_n$,$n=1,2,\cdots$,故$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.另一方面由映射$\psi$知$B\sim A_0$,$B_k\sim A_{k+1}$,$k=1,2,\cdots$.故$B-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k\sim A_0-\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{k+1}=A-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.从而$A=(A-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\cup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)\sim(B-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\cup(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=B$.定理得证.

Bernstein 定理也是证明两集合对等的有力工具.

推论 设$A\subset B\subset C$,若$A\sim C$,则$B\sim C$.

这是因为$C\sim A$,$A\subset B$,又$B\sim B$,$B\subset C$,根据定理有$B\sim C$.

定理1.7 设A、B是两集合,则下面三个关系式

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

中任何两个不能同时成立.

证明 (1)当$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$时,$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$和$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$都不会成立,即$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$,$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$不会同时成立.

(2)若$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$同时成立.由$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$,必有$B$的子集$B^*$,使$A\sim B^*$;由$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$,又有$A$的子集$A^*$,使$A^*\sim B$.于是由定理1.6,$A\sim B$,这与$A$、$B$不对等矛盾.故$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$也不能同时成立.证毕.

我们指出,对任意两个集合A和B,定理1.7中的三个关系式有且仅有一个成立.要证明它,只需要证明上述三个关系式至少有

一个成立. 后一命题的证明较为复杂,有兴趣的读者可阅读其他参考书(如豪斯道夫《集论》,科学出版社,1960 年版).

§ 3　可数集与连续基数点集

定义 1.11　设 N 为自然数全体所成的集,凡与 N 对等的集称为**可数集**,也称为**可列集**. 不是可数集的无限集称**不可数集**.

一个集 A 是可数集的充要条件是 A 中的元素可以排成一个无穷序列的形式,即

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

要注意的是:A 中的元素必出现在这个序列的某个确定的位置,而且序列中各项元素不会重复出现.

事实上,若 A 是可数集,则 $A \sim$ N. 存在 A 到 N 的一一对应,在这个对应中,与 n 对应的 A 中元素记为 a_n,排在 n 的位置,由此把 A 中元素排成**无穷序列**. 反之若 A 中元素已排成无穷序列. 只要令 A 中每个元素与所在序列中的位置相对应,就得到 A 与 N 之间的一一对应. 因此 A 是可数集.

例如,正偶数集,$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$,$\{\sin n\}$ 都是可数集,很容易将这些集的元素排成无穷序列的形式.

定理 1.8　任何一个无限集都包含一个可数子集.

证明　设 A 是无限集,$A \neq \varnothing$,选 $a_1 \in A$. 因 $A - \{a_1\} \neq \varnothing$,仍是无限集,又可选 $a_2 \in A - \{a_1\}$. $A - \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$ 仍是无限集,则可选 $a_3 \in A - \{a_1, a_2\}$,…继续下去可以在 A 中选出可数子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

定理 1.9　可数集的任何无限子集是可数集.

证明　因为 A 是可数的,则 A 的元素可排成无穷序列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

设 A^* 是 A 的无限子集,则 A^* 的元素必是上面序列中的一个无穷子列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

因此A^*也是可数集.

定理 1.10　若A、B是可数集,则$A\cup B$是可数集.

证明　$B^* = B - A$,不妨设B^*是可数集,显然$B^*\cap A=\varnothing$,将B^*排列成无穷序列

$$B^* = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$$

同样将A排成无穷序列

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

于是$A\cup B$可以排成

$$A\cup B = A\cup B^* = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots\}$$

这就表明$A\cup B$是可数集.

定理1.11　如果$A_i(i=1,2,\cdots)$的每一个是可数集,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$也是可数集(可数个可数集的并集是可数集).

证明　由于$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$中已含有可数集$A_1$,我们可以设$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$.我们设

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ik}, \cdots\}$$

A的元素可以按如下方式排成无穷序列:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots$$

具体做法为:① 按脚标和的大小分组,脚标和大的组排在右边;② 脚标和相同的一组中,各元素按第一个脚标的大小排列,脚标大的排在右边.因此A是可数集.

定理 1.12　全体有理数的集合是一个可数集.

证明　设$A_i=\left\{\dfrac{n}{i}\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}(i=1,2,\cdots)$,则$A_i$是可数集.由前面定理1.11,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$是可数集.这表明正有理数集是可数集.从而负有理数集也是可数集,再加上$\{0\}$这样一个有限集,可知全体有理数之集是可数集.

是否所有无限集都是可数集呢?下面定理表明不可数集是存

在的.

定理 1.13 区间$[0,1]$中的点是不可数的.

证明 反证.设$[0,1]$中的点是可数集,可以表示为

$$x_1, x_2, x_3, \cdots$$

现把$[0,1]$分成三等分,则$\left[0,\frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3},1\right]$两区间中有一个不含有$x_1$,记此区间为$I_1$;把$I_1$分成三等分,左右两闭区间中有一个不含有$x_2$,记此区间为$I_2$;继续下去,由归纳法得到闭区间套$\{I_n\}$,它满足$x_n \notin I_n$, $n=1,2,\cdots$.由闭区间套定理,有惟一点$\xi \in I_n (n=1,2,\cdots)$.显然$\xi \neq x_n (n=1,2,\cdots)$,但$\xi$是$[0,1]$中的点,这就产生矛盾.定理证毕.

我们用a和c分别表示可数集与$[0,1]$区间的点集的基数,显然$a<c$. c称为**连续基数**.

推论 开区间$(0,1)$的基数也是c.

证明 由于$(0,1)$是无限集,可以在$(0,1)$选出一可数子集A.设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$,现在我们作出$[0,1]$与$(0,1)$之间的一一对应.$[0,1]-A-\{0,1\}$与$(0,1)-A$是相同的集,它们之间$x$与自身对应,让0对应于$a_1$,1对应于$a_2$,而$a_k$对应于$a_{k+2}$, $k=1,2,\cdots$.按上述对应关系我们得到$[0,1]\sim(0,1)$.

定理 1.14 全体实数所成之集$\mathbb{R}^1$的基数是c.

证明 令$\varphi(x)=\tan\frac{2x-1}{2}\pi, x\in(0,1)$.则$\varphi$是$(0,1)$到$\mathbb{R}^1=(-\infty,+\infty)$上的一一对应,所以$\mathbb{R}^1$的基数也是$c$.

读者容易证明(a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$的基数也都是c.

推论 无理数全体所成的集的基数为c.

读者可以通过作出无理数集与实数集的一一对应来证明.

定理 1.15 正整数数列的全体所成的集Q, Q的基数是c.

为证明这个定理,先介绍二进位数的理论.

(1) 级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$($a_k$取0或1)的和称为二进位小数,简写此和

为 $0.a_1a_2a_3\cdots$.

(2) 对 $x\in(0,1)$,必可用二进位小数 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$表示,若 x 不是分数$\frac{m}{2^n}(m=1,3,\cdots,2^n-1)$的形式时,表示是惟一的. 若 $x=\frac{m}{2^n}(m=1,3,\cdots,2^n-1)$,则 x 有两种表示. 如 x 可表示为 $0.a_1a_2\cdots a_{n-1}100\cdots$和 $0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0111\cdots$. 例如

$$\frac{3}{8}=0.01100\cdots,\qquad \frac{3}{8}=0.010111\cdots$$

我们规定$(0,1)$中的数用二进位小数表示时不允许取从某位起全是1 的形式. 对于0 和1 我们表示为$0=0.000\cdots$,$1=0.111\cdots$. 于是对于$[0,1]$中每个数其二进位小数表示是惟一的.

(3) 每个二进位小数一定等于$[0,1]$中某一个数.

类似地,我们可以定义 p 进位小数$(p=3,4,\cdots)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{p^i},\quad a_i=0,1,2,\cdots,p-1$$

并规定$(0,1)$中的数用 p 进位小数表示时不取从某位起全是 $p-1$ 的形式.

对一个二进位小数如果我们知道使 $a_k=0$ 的那些 k,那么这个小数便完全确定了. 这种 k 组成一个单调增加的自然数列

$$k_1<k_2<k_3<\cdots$$

因此对于每一个自然数列$\{k_1,k_2,\cdots\}$可以作一个二进位小数与之对应. 显然所有这样的自然数列的全体组成集H,其基数为 c. 现在作H 与Q 的一一对应如下:

对每个自然数列$\{k_n\}$,令$\{n_1,n_2,\cdots\}$与之对应,这里$n_1=k_1$,$n_2=k_2-k_1$,$n_3=k_3-k_2$,$\cdots$. 于是H 与Q 成一一对应,因此Q 的基数是 c.

定理 1.16　若集 A 中每个元素由 n 个互相独立的指标所决定,而每个指标所属的集具有**连续基数** c,则集 A 的基数也是 c.

证明　为简单起见不妨设$n=3$. 设$A=\{a_{xyz}|x\in X,y\in Y,z\in Z\}$,这里$\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{Z}}=c$. 设$Q$ 是自然数数列的全体. 我们已知$\overline{\overline{Q}}=c$.

现在将 X,Y,Z 分别作成与 Q 的一一对应:

$$x_0\in X,\quad x_0 \text{ 与}(n_1,n_2,n_3,\cdots)\text{对应}$$
$$y_0\in Y,\quad y_0 \text{ 与}(p_1,p_2,p_3,\cdots)\text{对应}$$
$$z_0\in Z,\quad z_0 \text{ 与}(q_1,q_2,q_3,\cdots)\text{对应}$$

令 A 的元素 $\xi=a_{x_0y_0z_0}$ 与 Q 的元素

$$(n_1,p_1,q_1,n_2,p_2,q_2,\cdots)$$

对应,即得 A 与 Q 之间的一一对应.

由此定理可以得到重要推论.

推论 R^n 空间的点的全体所成的集,其基数为 c.

定理 1.17 若集 A 中每个元素由可数个互相独立的指标所决定,每个指标所属的指标集具有连续基数 c,则 A 的基数也是 c.

我们略去这个定理的证明(读者可参考那汤松著《实变函数论》). 是否存在除 a 和 c 以外的基数呢? 是否存在比 c 更大的基数呢? 答案是肯定的,我们有下面的定理:

定理 1.18 设 M 是任意的一个集合,μ 表示 M 的全体子集构成的集合,则 $\overline{\overline{\mu}}>\overline{\overline{M}}$.

证明 取 μ 的一个子集 $\mu_0=\{\{x\}\mid x\in M\}$,则 $M\sim\mu_0$. 现证明 M 不能与 μ 对等. 假设 $M\sim\mu$. 对于每个 $x\in M$,有 μ 的元素(是 M 的一个子集)M_x 对应,令

$$M^*=\{x\mid x\in M,\ x\notin M_x\}$$

M^* 也是 M 的子集. 故 $M^*\in\mu$,故有 $x^*\in M$,使 $M^*=M_{x^*}$,如果 $x^*\in M^*$,由 M^* 的定义 $x^*\notin M_{x^*}=M^*$;如果 $x^*\notin M^*$,则由 M^* 的定义,$x^*\in M^*=M_{x^*}$. 因此在两种情形下都产生矛盾. 可知 $M\sim\mu$ 不可能成立.

定理 1.18 表明不可能存在一个最大的基数.

§ 4 n 维欧氏空间,开集与闭集

设 n 为一个固定的自然数,由 n 个实数所作成的有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所组成的集合记为 R^n. 对 R^n 中任意两点定义距

离

$$\rho(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

称 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间.距离具有三条基本性质:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$(三角不等式).

性质(3)的证明要利用柯西(Cauchy)不等式(可参阅数学分析教材).

设 $x_0\in\mathbb{R}^n$,$\delta>0$ 为一实数,$N(x_0,\delta)=\{x\mid\rho(x,x_0)<\delta\}$,称为 x_0 为中心的 δ 邻域.

设 $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列,$x_0\in\mathbb{R}^n$,若 $\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$,称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0.

设 $E\subset\mathbb{R}^n$,$P_0\in\mathbb{R}^n$,由 P_0 与 E 的关系,我们给出如下几个定义:

(1) 若存在邻域 $N(P_0,\delta)\subset E$,称 P_0 为 E 的**内点**;

(2) 若存在邻域 $N(P_0,\delta)\subset E^c$,称 P_0 为 E 的**外点**;

(3) 若对任何 $\delta>0$,$N(P_0,\delta)$ 中恒有无穷多个点属于 E,称 P_0 为 E 的**聚点**;

(4) 若对任何 $\delta>0$,总有 $N(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$ 且 $N(P_0,\delta)\cap E^c\neq\varnothing$,称 P_0 是 E 的**界点**;

(5) 若 $P_0\in E$,存在某个 $\delta>0$,$N(P_0,\delta)\cap E=\{P_0\}$,称 P_0 是 E 的一个**孤立点**.

读者可以研究问题:一个点集 E 的聚点 P_0 是否必属于 E?点集 E 的界点又是否属于 E?

定义 1.12 $E\subset\mathbb{R}^n$,若集合 E 的每一个点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**.

由定义可知 $\mathbb{R}^n$ 及 $\varnothing$ 都是开集,$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集.

定义 1.13 $E\subset\mathbb{R}^n$,若 E 包含了 E 的所有聚点,则称 E 为**闭集**.

由定义可知 $\mathbb{R}^n$ 及 $\varnothing$ 是闭集,$[a,b]$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭集.点集 E 的所

有聚点组成的集称为E的**导集**,记为E',$E'\cup E$称为E的**闭包**,记为$\overline{E}$.若$E'=E$,称E为**完备集**.

利用定义容易证明(作为习题):开集的余集是闭集,闭集的余集是开集.

开集与闭集有如下性质:

定理1.19 任意个开集的并是开集,有限个开集的交是开集.

证明 (1)设$G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$,$G_\alpha(\alpha\in I)$是开集.任取$x\in G$,则存在$\alpha_0\in I$,使$x\in G_{\alpha_0}$,故$x$是$G_{\alpha_0}$的内点,因此$x$也是$G$的内点.

(2)设$G=\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$,$G_k(k=1,2,\cdots,n)$是开集.任取$x\in G$,则对每个$k$,$x\in G_k$.$x$必是$G_k$的内点,存在$\delta_k>0$,使

$$N(x,\delta_k)\subset G_k,\quad k=1,2,\cdots,n$$

设$\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\delta_k\}$,则

$$N(x,\delta)\subset G_k,\quad k=1,2,\cdots,n$$

因此$N(x,\delta)\subset G$.从而x是G的内点,G是开集.

注意:无限个开集的交集不一定是开集.例如令$G_k=\left(-\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)$,$k=1,2,3,\cdots$,则$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k=\{0\}$,而单点集$\{0\}$不是开集.

定理1.20 任意个闭集的交集为闭集,有限个闭集的并集为闭集.

证明 设$F_\alpha(\alpha\in I)$为闭集,则F_α^c为开集$(\alpha\in I)$.因为

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I}F_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}(F_\alpha^c),\left(\bigcup_{\alpha\in I}F_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}(F_\alpha^c)$$

由定理1.19,对任意指标集I,$\bigcup\limits_{\alpha\in I}(F_\alpha^c)$为开集,从而$\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$为闭集.对有限指标集$I$,类似地由定理1.19可得$\bigcup\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$为闭集.

也要注意,无限个闭集的并集可能不是闭集.例如令$F_n=\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right]$,$n=3,4,\cdots$,$F_k$是闭集,但$\bigcup\limits_{n=3}^{\infty}F_n=(0,1)$是开集.

类似于$\mathbf{R}^1$的聚点定理,有:

定理1.21 $\mathbf{R}^n$中的有界点列必有收敛的子列.

证明　设$P_k(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$是$\mathrm{R}^n$中任一有界点列,则每个$\{x_i^{(k)}\}(i=1,2,\cdots,n)$是$\mathrm{R}^1$的有界数列,因此$\{x_1^{(k)}\}$有收敛子列$\{x_1^{(k_1)}\}$.显然$\{x_2^{(k_1)}\}$也是$\mathrm{R}^1$的有界数列,存在收敛子列$\{x_2^{(k_2)}\}$,其中$\{k_2\}$是$\{k_1\}$的子列,如此一直进行第$n$步得到$\{x_n^{(k_n)}\}$是收敛的.现在取$\{P_k\}$的子列$\{(x_1^{(k_n)},x_2^{(k_n)},\cdots,x_n^{(k_n)})\}$.显然每个$\{x_i^{(k_n)}\}(i=1,2,\cdots,n)$都是收敛的数列,因此$\{P_k\}$的这个子列也收敛.

注:由此可知,在R^n中任一有界无限集E至少有一个聚点(此点不一定属于E).

定义 1.14　设E是一集合,$\mu=\{N_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是一族集合.若$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda\supset E$,称$\mu$是$E$的一个**覆盖**.当$\Lambda$是有限集或可数集时,称$\mu$是$E$的**有限覆盖**或**可数覆盖**.

定理 1.22　设F是一有界闭集,μ是一族开邻域,μ是F的一个覆盖,则在μ中一定存在F的有限覆盖.

证明　分两步证明这个定理.

(1) 先证明存在正数δ,使任一以属于F的x为中心的δ邻域都包含在某一个属于μ的开邻域N内.若不然,即没有这样的正数δ,则对于任意正整数n,$\dfrac{1}{n}$都不能取作δ,因而必有$x_n\in F$,使$N\left(x_n,\dfrac{1}{n}\right)$不包含在任何属于$\mu$的开邻域中.由于$F$有界,$\{x_n\}$也有界.由定理 1.21,存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_i}\}$,使$x_{n_i}\to x_0(i\to\infty)$.由于$F$是闭集,故$x_0\in F$.因此必存在$N\in\mu$,$x_0\in N$.设$N=N(y_0,\eta)$,则有$\eta'>0$,使$N(x_0,\eta')\subset N(y_0,\eta)$.取$n_i$充分大,使

$$\rho(x_{n_i},x_0)<\frac{\eta'}{2},\quad \frac{1}{n_i}<\frac{\eta'}{2}$$

于是$N\left(x_{n_i},\dfrac{1}{n_i}\right)\subset N(x_0,\eta')\subset N(y_0,\eta)\in\mu$.这与$x_{n_i}$的定义矛盾.因此这个正数$\delta$是存在的(这样的正数通称Lebesgue数).

(2) 因F有界,作平行于坐标平面的超平面,将F分成有限多个小块,使每小块的直径都小于δ,设这些小块是$F_1,F_2,\cdots,F_m$,在每个F_i中取点x_i,作x_i的δ邻域$N(x_i,\delta)$,则有$N_i\in\mu$,使$N(x_i,\delta)$

$\subset N_i$. 于是得到有限多个 $N_1, \cdots, N_m \in \mu$. 显然 $F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} N_i$. 这就证明了定理.

我们还可以证明如下的 Lindelöf 定理.

定理 1.23 对于 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的任一开覆盖 $\{B\}$, 一定存在可数子覆盖.

证明 因为 $\mathbb{R}^n$ 中坐标为有理数的全体点是一个可列点集, 所以可以以 $\{P_n\}$ 来表示. 设 $r_1, r_2, \cdots, r_m, \cdots$ 是正有理数全体, 作 P_n 的邻域

$$N(P_n, r_m), \quad n = 1, 2, \cdots; \quad m = 1, 2, \cdots$$

对于 E 中任意一点 a, 有一集 B 覆盖 a, 取正数 δ 充分小, 使

$$N(a, \delta) \subset B$$

在 $N(a, \delta)$ 中取一点 P_n, 使 $\rho(a, P_n) < \frac{1}{2}\delta$, 又取有理数 r_m, 使

$$\rho(a, P_n) < r_m < \frac{1}{2}\delta$$

那么 $a \in N(P_n, r_m)$, 然后设 $x \in N(P_n, r_m)$, 则

$$\rho(x, a) \leqslant \rho(x, P_n) + \rho(P_n, a) < r_m + \frac{\delta}{2} < \delta$$

故 $N(P_n, r_m) \subset N(a, \delta)$, 因而 $N(P_n, r_m) \subset B$. $\{N(P_n, r_m)\}$ $(m = 1, 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots)$ 是可列集, 其中之一子集 $\{N_k\}$ 覆盖 E 的一切点. 对每个 N_k, 在 $\{B\}$ 中只取一个 $B_k \supset N_k$. 故 $\{B\}$ 中有可数个集 $B_1, B_2, \cdots$ 覆盖了 E 中一切点.

§ 5 直线上的开集、闭集和完备集

本节将讨论直线上**开集**、**闭集**和**完备集**的构造, 然后研究一个非常重要的集合——Cantor 集.

定理 1.24 直线上的非空开集 G 可以表示成有限个或可数个互不相交的开区间的并.

证明 因为 G 是开集, 对任意 $x \in G$, 存在开区间 (α, β), 使 $x \in$

$(\alpha,\beta)\subset G$[例如(α,β)是$N(x,\delta)\subset G$]. 记A_x 为此类(α,β)的全体所构成的开区间集. 记

$$\alpha_0=\inf_{(\alpha,\beta)\in A_x}\alpha,\quad \beta_0=\sup_{(\alpha,\beta)\in A_x}\beta$$

我们证明$(\alpha_0,\beta_0)\subset G$ 且$\alpha_0\notin G$, $\beta_0\notin G$. 任取$x'\in(\alpha_0,\beta_0)$, 由确界定义必存在$(a,b)\in A_x$, 且使$\alpha_0<a<x'<b<\beta_0$, 因此$x'\in(a,b)\subset G$, 因此$(\alpha_0,\beta_0)\subset G$. 现在设$\alpha_0\in G$, 由$G$ 是开集, 必存在$\delta>0$, 使$N(\alpha_0,\delta)\subset G$, 于是

$$(\alpha_0-\delta,\beta_0)\subset G,\ (\alpha_0-\delta,\beta_0)\in A_x$$

此与α_0 的下确界定义矛盾. 因此$\alpha_0\notin G$. 同理$\beta_0\notin G$. 我们称(α_0,β_0)为G 的**构成区间**. 由上所证可知G 必为全体构成区间的并.

设(α_1,β_1)和(α_2,β_2)是G 的两个构成区间, 若

$$(\alpha_1,\beta_1)\cap(\alpha_2,\beta_2)\neq\varnothing$$

则$\alpha_1\in G$ 或$\alpha_2\in G$, 这是不可能的. 因此任意两个不同的构成区间互不相交. 容易证明构成区间至多可数多个.

若$G=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$是一组互不相交的开区间的并, 我们证明$(\alpha_i,\beta_i)$必是一个构成区间. 这只要证明$\alpha_i,\beta_i\notin G$ 即可. 如果某个$\alpha_i\in G$, 则存在$j\neq i$, 使$\alpha_i\in(\alpha_j,\beta_j)$, 这表明

$$(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j)\neq\varnothing$$

此与假设矛盾. 同样证$\beta_i\notin G$, 故(α_i,β_i)都是构成区间.

由上面的证明可知, 任何非空开集必能惟一地表示为至多可数个互不相交的开区间的并集.

定理 1.25 直线上的闭集或是全直线, 或是从直线上去掉有限个或可数个互不相交的开区间所得到的集.

证明 设闭集F 不是全直线, 则F^c 是非空开集, F^c 为至多可数个开区间的并, 因此$F=\mathbf{R}^1-\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$.

定义 1.15 设F 是闭集, 称F 的余集$F^c=\mathbf{R}^1-F$ 的构成区间为F 的**余区间**(**邻接区间**).

由完备集的定义可知完备集是没有孤立点的闭集, 例如$[a,b]$就是完备集. 由定理1.25, 构造完备集时从直线上去掉的开区间是

不能有公共端点的.因此容易证明:

定理 1.26 不是全直线的非空闭集 F 是完备集的充要条件是:F 是从直线上去掉至多可数个无公共端点的开区间而成.

由完备集构造,似乎完备集必能包含直线上某一开区间,但由下面的例子可知这是一个错觉.这就是著名的 Cantor **集**.它的构造方法是:将闭区间 $[0,1]$ 三等分,去掉中间的开区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,剩下两闭区间又各自三等分,去掉两个中间的开区间 $\left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)$ 和 $\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$.继续下去,第 n 次三等分时去掉的开区间是

$$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\quad I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\quad \cdots,\quad I_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

令 $K=[0,1]-\bigcup\limits_{k,n} I_k^{(n)}$,它就是 Cantor 三分集.显然 K 是一个闭集,而且 $I_k^{(n)}$ 中任何两个无公共端点.由此 K 是完备集.设 $x\in K$,则任何 $\delta>0$,$N(x,\delta)$ 中必有不属于 K 的点,即 x 不是内点.事实上由于第 n 次去掉区间后,剩下的是 2^n 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间,只要 $\frac{1}{3^n}<\delta$,则 x 必属于某个剩下的闭区间 Δ,当继续去掉开区间后,Δ 中必有不属于 K 的点.因 $\Delta\subset N(x,\delta)$,故 $N(x,\delta)$ 中必有点不属于 K.因此 K 不包含任何开区间.

将 $[0,1]$ 中的实数按三进位小数展开,则 Cantor 集中的点 x 与下述三进位小数集的元

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i},\quad a_i=0,2$$

一一对应.从而知 Cantor 集为连续基数集.

例 1 证明直线上除了空集 $\varnothing$ 及直线本身 $\mathbf{R}^1$ 以外,不存在既开又闭的集.

证明 反证.设 A 既是开集又是闭集,$A\subset\mathbf{R}^1$ 并且 $A\neq\varnothing$,$A\neq\mathbf{R}^1$.由直线上开集的构造定理,可设 $A=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$,其中 (α_i,β_i) 是 A 的构成区间,由构成区间定义,$\alpha_i,\beta_i\notin A\ (i=1,2,\cdots)$.因 $A\neq\mathbf{R}^1$,则

这些α_i,β_i中至少有一个例如α_k使$-\infty<\alpha_k<+\infty$.因$(\alpha_k,\beta_k)\subset A$,$\alpha_k$必是$(\alpha_k,\beta_k)$的一个聚点,也是$A$的聚点,但$A$是闭集,故$\alpha_k\in A$.这就得出矛盾.

§6 点集的距离与隔离性定理

我们已经定义过$\mathbb{R}^n$中两点的距离,现在定义$\mathbb{R}^n$中两点集间的**距离**.

定义 1.16 设A、B是$\mathbb{R}^n$两非空点集,我们定义A、B间的距离为

$$\rho(A,B)=\inf_{x\in A,y\in B}\{\rho(A,B)\}$$

显然对任意非空A、B,$\rho(A,B)\geqslant 0$,但与点的距离不同的是$\rho(A,B)=0$,不能得到$A=B$,也不一定能得到$A\cap B\neq\varnothing$.例如$A=(-1,0)$,$B=(0,1)$,$A\neq B$,$A\cap B=\varnothing$,但是$\rho(A,B)=0$.

定理 1.27 设A、B为两非空闭集,且有一个为**有界集**,则有$x_0\in A$,$y_0\in B$,使$\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B)$.

证明 设A有界,即$A\subset\{P\,|\,(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant M\}$.由$\rho(A,B)$定义,每个自然数$n$,存在$x_n\in A$,$y_n\in B$,$n=1,2,\cdots$,使

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(x_n,y_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}$$

点列$\{x_n\}$有界,故必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$,设$x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$.由$A$是闭集,$x_0\in A$.对应的$\{y_{n_k}\}$有

$$\rho(y_{n_k},0)\leqslant\rho(y_{n_k},x_{n_k})+\rho(x_{n_k},0)\leqslant\rho(A,B)+1+M$$

这里M是满足A的有界性的常数.由此$\{y_{n_k}\}$也有界.它必有收敛子列$\{y_{n_{k_l}}\}$,设$y_{n_{k_l}}\to y_0$,B是闭集,$y_0\in B$.由此

$$\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B)$$

事实上

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(x_0,y_0)$$

$$\leqslant \rho(x_0, x_{n_{k_l}}) + \rho(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) + \rho(y_{n_{k_l}}, y_0)$$

$$\leqslant \rho(x_0, x_{n_{k_l}}) + \frac{1}{n_{k_l}} + \rho(A, B) + \rho(x_{n_{k_l}}, y_0)$$

令 $l\to\infty$ 即可.

定理1.28　设$E\subset R^n$,$d>0$.令$U=\{x\mid\rho(x,E)<d\}$,则U是开集,且$U\supset E$.

证明　由U的定义,对任意$x_0\in U$,

$$\rho(x_0,E)<d$$

因此E中必有点x^*,使

$$\rho(x_0,x^*)<d$$

令$d-\rho(x_0,x^*)=h$,则$N(x_0,h)\subset U$.事实上,任取$y\in N(x_0,h)$,有

$$\rho(x_0,y)<h$$

又因$\rho(x_0,x^*)=d-h$,所以

$$\rho(y,x^*)\leqslant\rho(y,x_0)+\rho(x_0,x^*)<d$$

于是

$$\rho(y,E)<d$$

从而$y\in U$.故x_0是U的内点,U是开集.$U\supset E$是显然的(图1-7).

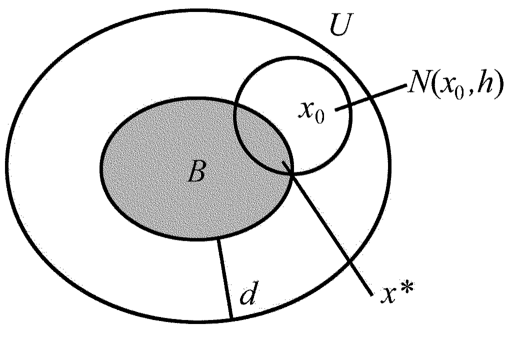

图 1-7

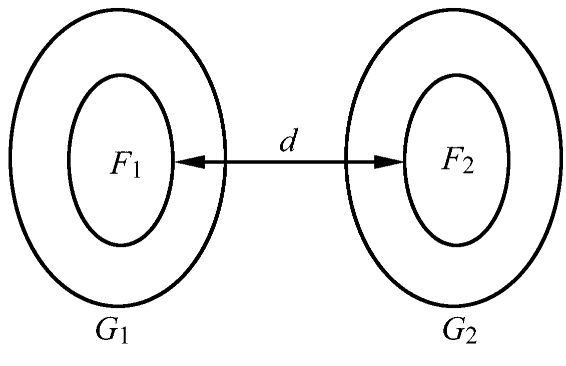

图 1-8

定理1.29　(隔离性定理)设F_1,F_2是二有界闭集,$F_1\cap F_2=\varnothing$,则有开集G_1,G_2,使$G_1\supset F_1$,$G_2\supset F_2$且$G_1\cap G_2=\varnothing$.

证明　由$F_1\cap F_2=\varnothing$,从定理1.27知道

$$d=\rho(F_1,F_2)>0$$