非线性泛函分析及其应用

孙经先　著

本书由国家自然科学基金(10671167)资助出版

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书系统叙述了非线性泛函分析及其应用领域中的基本内容，其中包括拓扑度理论、半序方法(半序拓扑方法)、变分方法、分歧理论和 Banach 空间微分方程理论，重点讨论了这一领域最近二十多年来的研究成果.

本书可供高等学校数学及其相关专业的高年级大学生、研究生、教师以及相关领域的研究人员阅读参考，也可以作为研究生教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

非线性泛函分析及其应用/孙经先 著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-020532-2

Ⅰ.非… Ⅱ.孙… Ⅲ. 非线性–泛函分析 Ⅳ.O177.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 009855 号

责任编辑：莫单玉 陈玉琢／责任校对：桂伟利

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008 年 1 月第一次印刷 印张：17 1/2

印数：1—3 000 字数：332 000

定价：46.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

前　　言

非线性泛函分析是现代数学中一个既有深刻理论意义, 又有广泛应用价值的研究方向. 它以数学及自然科学各个领域中出现的非线性问题为背景, 建立了处理许多非线性问题的若干一般性理论. 它的研究成果可以广泛地应用于各种非线性微分方程、积分方程和其他各种类型的方程以及计算数学、控制理论、最优化理论、动力系统、经济数学等许多领域. 目前非线性泛函分析主要内容包括拓扑度理论、临界点理论、半序方法、解析方法和单调型映射理论等.

20 世纪 30 年代, 著名数学家 Wolf 奖获得者 Leray J 与 Schauder J 合作, 建立了无穷维空间上的拓扑度理论, 奠定了非线性泛函分析的基础. 随后, 经过许多数学工作者几十年的努力, 非线性泛函分析的几个基本理论和方法逐步建立起来, 并广泛的应用于数学和自然科学各个领域中出现的各种非线性问题. 目前, 非线性泛函分析已经成为成为研究许多非线性问题的基本工具之一. 由于非线性问题已经引起国内外数学界和自然科学界的高度重视, 对非线性泛函分析及其应用的研究, 无疑具有重要的理论意义和应用价值.

本书的主要内容包括非线性泛函分析中的半序方法、拓扑方法、变分方法、抽象空间微分方程理论以及它们对于各种非线性方程的应用.

第一章简要叙述了非线性泛函分析的若干基础知识.

第二章系统介绍了拓扑度理论 (包括不动点指数理论) 的基本内容. 拓扑度的计算是拓扑度理论中重要的基本课题, 这一章重点研究了拓扑度的计算问题, 并给出了对具有变号 Green 函数的常微分方程边值问题和具有变号核的非线性积分方程的应用.

第三章和第四章着重研究了非线性泛函分析中的半序方法.

国内外在研究各种非线性问题时大都使用了两个基本条件, 即连续性条件和紧型条件. 在第三章中, 我们利用半序方法, 在完全不使用任何连续性条件的情况下, 仅使用非常弱的紧性条件 (在实际应用中这种紧性条件往往是自动满足的), 给出了关于增算子不动点定理的一系列结果, 研究了与这些结果密切相关的非线性泛函分析序集一般原理 (包括著名的 Ekeland 变分原理和 Caristi 不动点定理)、Banach 空间全序集的列紧性判别、在弱紧性条件下的单调迭代等问题. 这一章还讨论了凹凸条件和双边 Lipschitz 条件下非线性算子解的存在唯一性与迭代问题.

把半序方法与拓扑度理论相结合, 形成了研究非线性问题的有力工具, 我们把这种结合称为半序拓扑方法. 在第四章中, 我们介绍了经典的锥拉伸与压缩不动点

定理、Krein-Rutman 理论和 Amann 三解定理; 重点利用半序结构 (特别是格结构), 对锥映射和非锥映射的不动点指数与拓扑度的计算进行了系统研究, 获得了一系列新的不动点定理; 在 Amann 三解定理的条件不满足甚至相反的条件下系统讨论了增算子不动点的个数问题. 这一章还给出了研究半正问题的一个新方法. 本章的结果可以广泛地应用于许多类型的微分方程与积分方程.

第五章介绍了分歧理论, 利用拓扑方法研究了大范围分歧理论 (也称非线性算子方程解集的全局结构理论), 其中包括 Rabinowitz 全局定理和关于超线性算子解集的全局结构的定理, 并给出了若干应用.

第六章讨论了 Banach 空间上的微分方程理论中的一些基本问题.Banach 空间常微分方程理论与非线性泛函分析有着密不可分的关系. 一方面, Banach 空间常微分方程理论广泛利用了非线性泛函分析的理论和方法; 另一方面,Banach 空间常微分方程理论也为非线性泛函分析的发展提供新的思想和工具.

在第七章中, 我们首先介绍了经典的极值理论和极小极大原理. 然后重点讨论了临界点理论中的下降流不变集方法. 这一方法把鞍点问题归结为下降流不变集上的极值问题, 从而把临界点的个数问题归结为互不相交的下降流不变集的个数问题. 我们利用这一方法获得了若干多临界点存在的结论, 并应用于椭圆型边值问题.

限于作者水平和本书篇幅, 本书完全没有涉及非线性泛函分析中的解析方法和单调型映射理论. 对变分方法我们也完全没有涉及 Morse 理论和对称泛函的临界点理论. 关于这些问题, 读者可以参阅有关文献.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (10671167) 的资助, 同时还得到江苏省重点学科基金的资助. 作者表示衷心的感谢.

徐州师范大学学校领导和数学院的领导对本书的写作及出版给予了很大的支持和帮助. 徐西安副教授和徐州师范大学数学院部分研究生进行了本书大部分原始素材的录入工作, 作者的近几届博士生也参与了原始素材的录入工作. 徐西安副教授还参与了本书若干文字性整理工作. 刘笑颖教授参与了 §4.3,§4.4 和第五章的部分文字整理工作. 刘春晗硕士参与了 §3.7 的部分整理工作. 对此, 作者一并表示衷心的感谢.

作者还特别感谢郭大钧教授, 马吉溥教授, 范先令教授, 刘兆理教授和刘立山教授对本书的写作和出版给予的支持和帮助.

由于作者的学识和水平所限, 书中一定会有不少欠妥和不足之处, 敬请读者指正.

孙经先

2007 年 8 月 28 日

于徐州师范大学

目　录

第一章　非线性泛函分析的基础知识

本章给出本书所需要的非线性泛函分析及其应用方面的基础知识.

§1.1　非线性算子的连续性与有界性

§1.1.1　非线性算子的连续性与有界性

设 E_1 和 E_2 是两个 Banach 空间, $D \subset E_1$, 算子 $A : D \mapsto E_2$. 一般来说, 在本书中我们主要讨论 A 是非线性算子的情形.

定义 1.1.1　设 $x_0 \in D$. 如果对任给 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, 使得当 $x \in D$ 并且 $\|x - x_0\| < \delta$ 时, 有 $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$, 则称 A 在 x_0 处是连续的; 如果 A 在 D 中每一点处都连续, 则称 A 在 D 中是连续的; 如果上述 δ 只与 ε 有关而与 $x_0 \in D$ 无关, 则称 A 在 D 中是一致连续的.

显然, 一致连续算子是连续的. 此外我们容易知道, A 在 x_0 处连续的充分必要条件是：对任给 $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to x_0$, 都有 $Ax_n \to Ax_0 (n \to \infty)$.

定义 1.1.2　如果 A 将 D 中每一个有界集都映成 E_2 中的有界集, 则称 A 在 D 上是有界算子, 简称 A 在 D 上是有界的.

注 1.1.1　众所周知, 对线性算子而言, 连续性与有界性是等价的. 容易知道, 对非线性算子没有这种等价性. 一般来说, 连续算子不一定是有界的. 但是, 我们容易证明：一致连续算子是有界的.

除了定义 1.1.1 中叙述的连续性以外, 有时我们还需要其他类型的连续性. 下面设 $x_0 \in D$, 并用 $x_n \rightharpoonup x_0$ 表示 x_n 弱收敛于 x_0.

定义 1.1.3　(i) 如果对任给 $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to x_0$, 都有 $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$, 则我们称 A 在 x_0 处是次连续的;

(ii) 如果对任给 $\{x_n\} \subset D$, $x_n \rightharpoonup x_0$, 都有 $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$, 则我们称 A 在 x_0 处是弱连续的;

(iii) 如果对任给 $\{x_n\} \subset D$, $x_n \rightharpoonup x_0$, 都有 $Ax_n \to Ax_0$, 则我们称 A 在 x_0 处是强连续的.

如果 A 在 D 中的每一点处都是次连续的 (弱连续的, 或者强连续的), 则我们称 A 在 D 中是次连续的 (弱连续的, 或者强连续的).

显然, 强连续性蕴含着连续性、弱连续性和次连续性; 连续性和弱连续性分别蕴含着次连续性.

§1.1.2　Немыцкий 算子

这里我们将讨论应用中出现的一类重要的非线性算子 ——Немыцкий 算子的连续性和有界性.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, $f(x,u):\Omega\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$. 如果 $u(x)$ 是定义在 Ω 上的函数, 则 $f(x,u(x))$ 也是定义在 Ω 上的函数. 我们称映射

$$\mathbf{f}: u(x)\mapsto f(x,u(x)) \tag{1.1.1}$$

为Немыцкий 算子 (或 Caratheodory 算子).

定义 1.1.4　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, $f:\Omega\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$. 如果 f 满足:

(i)　对几乎所有的 $x\in\Omega$, $f(x,u)$ 关于 u 是连续的;

(ii)　对每一个 u, $f(x,u)$ 是 x 的 Lebesgue 可测函数,

称 f 满足 Caratheodory 条件.

引理 1.1.1　设 $f:\Omega\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$ 满足 Caratheodory 条件, $u(x)$ 是 Ω 上的 Lebesgue 可测函数, 则 $f(x,u(x))$ 也是 Ω 上的 Lebesgue 可测函数.

证　由于 $u(x)$ 是 Ω 上的 Lebesgue 可测函数, 故存在简单函数序列 $\{u_n(x)\}$ 几乎处处收敛于 $u(x)$. 利用定义 1.1.4 条件 (ii) 知 $f(x,u_n(x))$ 关于 x 是 Lebesgue 可测的. 再由定义 1.1.4 条件 (i), $f(x,u_n(x))\to f(x,u(x))$ 几乎处处成立, 从而 $f(x,u(x))$ 关于 x 是 Lebesgue 可测的. 证完.

引理 1.1.2　设 $\operatorname{mes}\Omega<+\infty$, $f:\Omega\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$ 满足 Caratheodory 条件, 则当 $u_n(x)$ 依测度收敛于 $u(x)$ 时, $f(x,u_n(x))$ 也依测度收敛于 $f(x,u(x))$.

证　对于 $\{f(x,u_n(x))\}$ 的任一子序列 $\{f(x,u_{n_k}(x))\}$, 由于 u_{n_k} 在 Ω 上依测度收敛于 u, 故存在 $\{u_{n_k}\}$ 的子序列 (不失一般可以假定就是 $\{u_{n_k}\}$ 本身) 几乎处处收敛于 u, 利用 (i) 可知 $\{f(x,u_{n_k})\}$ 几乎处处收敛于 $f(x,u(x))$, 从而 $f(x,u_n(x))$ 依测度收敛于 $f(x,u(x))$. 证完.

定理 1.1.1　设 $\operatorname{mes}\Omega<+\infty$, $f:\Omega\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$ 满足 Caratheodory 条件, 并且满足下列增长性条件

$$|f(x,u)|\leqslant a|u|^{p_1/p_2}+b(x),\quad \forall x\in\Omega,\quad u\in\mathbf{R}^1, \tag{1.1.2}$$

其中 $a>0$, $p_1,p_2\geqslant 1$ 是常数, $b(x)\in L_{p_2}(\Omega)$. 则Немыцкий 算子 $\mathbf{f}$ 映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$, 并且是连续的.

证　利用 (1.1.2) 式容易知道当 $u\in L_{p_1}(\Omega)$ 时, $f(x,u(x))\in L_{p_2}(\Omega)$, 故 $\mathbf{f}$ 映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$. 下证连续性. 设 $\{u_n\}$ 在 $L_{p_1}(\Omega)$ 中收敛于 u, 于是 u_n 依测度收

敛于 u, 利用引理 1.1.2 可知 $f(x,u_n(x))$ 依测度收敛于 $f(x,u(x))$. 由 (1.1.2) 式可知

$$\begin{aligned}|(f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^{p_2} &\leqslant 2^{p_2}\Big(|f(x,u_n(x))|^{p_2}+|f(x,u(x))|^{p_2}\Big)\\ &\leqslant 4^{p_2}\Big(a^{p_2}|u_n(x)|^{p_1}+a^{p_2}|u(x)|^{p_1}+2|b(x)|^{p_2}\Big).\end{aligned}$$

所以积分 $\int_\Omega |(f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^{p_2}\mathrm{d}x$ 具有等度的绝对连续性, 于是根据实变函数论中的 Vitali 定理, $f(x,u_n(x))$ 在 $L_{p_2}(\Omega)$ 中收敛于 $f(x,u(x))$. 证完.

定理 1.1.2 如果Немыцкий 算子**f**: $L_{p_1}(\Omega)\mapsto L_{p_2}(\Omega)$ 是连续的, 则 **f** 是有界算子.

证 由于 **f** 在 $L_{p_1}(\Omega)$ 中的零点处是连续的, 故 **f** 在零点的某一邻域中有界, 即存在 $r,M>0$, 使得当 $\Big(\int_\Omega |u(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\Big)^{1/p_1}\leqslant r$ 时, $\int_\Omega |f(x,u(x))|^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant M$. 对任给 $u\in L_{p_1}(\Omega)$, 可取自然数 N, 使得

$$Nr^{p_1}\leqslant \int_\Omega |u(x)|^{p_1}\mathrm{d}x<(N+1)r^{p_1}. \tag{1.1.3}$$

将 Ω 分成 $N+1$ 个可测集 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_{N+1}$ 之并, 使当 $1\leqslant i\leqslant N+1$ 时有 $\int_{\Omega_i}|u(x)|^{p_1}\mathrm{d}x\leqslant r^{p_1}$. 于是, 由 r,M 的定义知 $\int_{\Omega_i}|f(x,u(x))|^{p_2}\mathrm{d}x\leqslant M$. 因此, 由 (1.1.3) 式可知

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u(x))|^{p_2}\mathrm{d}x &\leqslant \sum_{i=1}^{N+1}\int_{\Omega_i}|f(x,u(x)|^{p_2}\mathrm{d}x\\ &\leqslant (N+1)M\leqslant M\Big(\frac{1}{r^{p_1}}\int_\Omega |u(x)|^{p_1}\mathrm{d}x+1\Big).\end{aligned}$$

这说明 **f** 映 $L_{p_1}(\Omega)$ 中的有界集为 $L_{p_2}(\Omega)$ 中的有界集. 证完.

关于定理 1.1.1 和定理 1.1.2, 我们有更进一步的结论:

定理 1.1.3 设 $\mathrm{mes}\,\Omega\leqslant+\infty$, $f:\Omega\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$ 满足 Caratheodory 条件, $p_1,p_2\geqslant 1$ 是常数, 则下列四个命题是等价的:

(i) **f** 映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$;

(ii) **f** 是映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$ 的连续算子;

(iii) **f** 是映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$ 的有界算子;

(iv) 存在 $a>0$ 和 $b(x)\in L_{p_2}(\Omega)$, 使得

$$|f(x,u)|\leqslant a|u|^{p_1/p_2}+b(x),\quad \forall x\in\Omega,\quad u\in\mathbf{R}^1.$$

这一定理的证明见文献 [27], [48]. 定理 1.1.3 可以推广到更一般的 Orlitz 空间, 其详情可见文献 [48].

注 1.1.2 对于作用在 $C(\Omega)$ 空间上的Немыцкий 算子, 容易知道下面结论是成立的：设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭域, $f: G\times\mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^1$ 连续, 则Немыцкий 算子 $\mathbf{f}$ 映 $C(G)$ 入自身, 并且是连续有界算子.

注 1.1.3 本节的内容是标准的. 与本节内容有关的进一步讨论见文献 [27], [13].

§1.2　非线性算子的全连续性

本节讨论非线性泛函分析中一个重要的算子类 —— 全连续算子的基本性质.

§1.2.1　全连续算子

定义 1.2.1 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, $D\subset E_1$, 算子 $A: D\mapsto E_2$. 如果 A 将 D 中的任何有界集 S 都映成 E_2 中的相对紧集 (即它的闭包 $\overline{A(S)}$ 是 E_2 中的紧集), 则称 A 是映 D 入 E_2 的紧算子. 如果算子是连续的, 又是紧算子, 则称 A 是全连续算子.

显然, 紧算子一定是有界算子.

定理 1.2.1 设 $A_n: D\mapsto E_2$ 全连续 $(n=1,2,\cdots)$, $A: D\mapsto E_2$. 如果对于 D 中任何有界集 S, 当 $n\to\infty$ 时, $\|A_nx-Ax\|$ 关于 $x\in S$ 都一致收敛于零, 则 $A: D\mapsto E_2$ 是全连续算子.

证 先证 A 连续. 设 $x_n\to x_0$, 则 $S=\{x_0,x_1,\cdots\}$ 是 D 中的有界集. 于是对任给 $\varepsilon>0$, 存在自然数 k, 使得 $\|A_kx_n-Ax_n\|<\varepsilon/3$, $n=0,1,2,\cdots$. 由 A_k 的连续性知存在自然数 N, 使得当 $n>N$ 时, $\|A_kx_n-A_kx_0\|<\varepsilon/3$. 于是当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}\|Ax_n-Ax_0\|&\leqslant\|Ax_n-A_kx_n\|+\|A_kx_n-A_kx_0\|\\&\quad+\|A_kx_0-Ax_0\|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $Ax_n\to Ax_0$. A 的连续性获证.

再证 A 是紧算子. 设 S 是 D 中任一有界集. 对任给 $\varepsilon>0$, 由假定可取定一个 n_0, 使 $\|A_{n_0}x-Ax\|<\varepsilon$, $\forall x\in S$. 故 $A_{n_0}(S)$ 是 $A(S)$ 的一个 ε 网. 因为 A_{n_0} 全连续, 故 $A_{n_0}(S)$ 是相对紧集, 因此 $A(S)$ 也是相对紧集. 证完.

定理 1.2.2 设 D 是 E_1 中的有界集, $A: D\mapsto E_2$. 则下列两个命题等价：

(i) $A: D\mapsto E_2$ 全连续;

(ii) 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 E_2 的有限维子空间 E_ε, 以及连续有界算子 $A_\varepsilon: D\mapsto E_\varepsilon$, 使得

$$\|Ax-A_\varepsilon x\|<\varepsilon,\quad\forall x\in D.$$

证 (i)⇒(ii) 对任给 $\varepsilon > 0$, 由于 $A(D)$ 是 E_2 中的相对紧集, 故存在 $y_i \in A(D)(i=1,2,\cdots,n)$, 使得 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 构成 $A(D)$ 的有限 ε 网. 定义 $\lambda_i : E_2 \mapsto \mathbf{R}^1$ 如下：

$$\lambda_i(y)=\max\{\varepsilon-\|y-y_i\|,\ \ 0\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则 $\lambda_i(y)$ 在 E_2 上是非负连续的. 令 $\lambda(y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(y)$, 则 $\lambda(y)$ 在 E_2 上是连续的, 并且容易知道 $\lambda(Ax)>0$, $\forall x\in D$. 令 $E_\varepsilon=\operatorname{span}\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,

$$A_\varepsilon x=\frac{1}{\lambda(Ax)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Ax)y_i,\quad \forall x\in D, \tag{1.2.1}$$

则 E_ε 是 E_2 的有限维子空间, 并且 $A_\varepsilon : D\mapsto E_\varepsilon$. 显然 A_ε 是连续算子. 注意到当 $\lambda_i(Ax)\neq 0$ 时, 必有 $\|Ax-y_i\|<\varepsilon$, 因此

$$\begin{aligned}\|Ax-A_\varepsilon x\|&=\left\|\frac{1}{\lambda(Ax)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Ax)(Ax-y_i)\right\|\\&\leqslant\frac{1}{\lambda(Ax)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(Ax)\|Ax-y_i\|<\varepsilon,\quad \forall x\in D.\end{aligned}$$

由此并注意到 A 是有界算子, 所以 A_ε 是有界算子.

(ii)⇒(i) 由于 E_ε 是有限维空间, 所以 $A_\varepsilon : D\mapsto E_\varepsilon$ 是全连续的. 根据定理 1.2.1, A 是全连续算子. 证完.

注 1.2.1 值域在有限维空间的连续有界算子称为是有限维算子. 定理 1.2.2 指出：一个算子是全连续算子的充分必要条件是它可以用有限维算子一致逼近.

§1.2.2 收缩核与保核收缩

为了进一步讨论全连续算子性质的需要, 我们给出收缩核与保核收缩的概念, 这一概念在非线性泛函分析的其他许多问题中也有重要作用.

定义 1.2.2 设 E 是一个拓扑空间, $X\subset E$. 如果存在连续算子 $P:E\mapsto X$, 使得当 $x\in X$ 时恒有 $Px=x$, 则称 X 是 E 的一个收缩核, 算子 P 是一个保核收缩.

容易知道, Hausdorff 空间中的收缩核一定是闭集.

定义 1.2.3 设 E 是一个拓扑空间, 如果对于 E 的任何一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在 E 的开覆盖 $\{V_\beta\}$, 满足：

(i) $\{V_\beta\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的加细覆盖, 即对任何 $V_\beta\in\{V_\beta\}$, 必存在 $U_\alpha\in\{U_\alpha\}$, 使得 $V_\beta\subset U_\alpha$;

(ii) $\{V_\beta\}$ 是局部有限的, 即对于 E 中任何一点 x, 都存在 x 的邻域 W_x, 使得 W_x 只与 $\{V_\beta\}$ 中的有限个 V_β 相交.

则称 E 是仿紧的.

引理 1.2.1　距离空间一定是仿紧的.

这一引理的证明见文献 [85].

定理 1.2.3　设 E 是 Banach 空间, X 是 E 中的非空凸闭集, 则 X 是 E 的收缩核, 并且对任给 $\alpha > 0$, 存在保核收缩 P_α, 使得

$$\|x - P_\alpha x\| \leqslant (1+\alpha)\rho(x, X), \quad \forall x \in E. \tag{1.2.2}$$

其中 $\rho(x, X)$ 表点 x 到集合 X 的距离.

证　给定 $\alpha > 0$, 取正数 $\delta < 1$, 满足 $1 + 2\delta < (1+\alpha)(1-\delta)$. 对 $z \in E \backslash X$, 令 $U_z = \{x \in E \mid \|x - z\| < \delta\rho(z, X)\}$. 于是开球族 $\{U_z \mid z \in E\backslash X\}$ 构成 $E\backslash X$ 的一个开覆盖. 根据引理 1.2.1, 存在 $\{U_z \mid z \in E\backslash X\}$ 的局部有限的加细覆盖 $\{V_\tau \mid \tau \in T\}$. 由于 $\{V_\tau \mid \tau \in T\}$ 是 $\{U_z \mid z \in E\backslash X\}$ 的加细覆盖, 故对每个 V_τ, 都存在 $U_{z_\tau} \in \{U_z \mid z \in E\backslash X\}$, 使 $V_\tau \subset U_{z_\tau}$. 取 $y_\tau \in X$, 使 $\|z_\tau - y_\tau\| \leqslant (1+\delta)\rho(z_\tau, X)$. 于是对 $x \in V_\tau$ 有

$$\rho(z_\tau, X) \leqslant \|z_\tau - x\| + \rho(x, X) \leqslant \delta\rho(z_\tau, X) + \rho(x, X),$$

从而 $\rho(z_\tau, X) \leqslant \dfrac{\rho(x, X)}{1-\delta}$, 所以

$$\begin{aligned}\|x - y_\tau\| &\leqslant \|x - z_\tau\| + \|z_\tau - y_\tau\| \leqslant \delta\rho(z_\tau, X) + (1+\delta)\rho(z_\tau, X)\\ &\leqslant \frac{1+2\delta}{1-\delta}\rho(x, X) \leqslant (1+\alpha)\rho(x, X).\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

考察 $E\backslash X$ 上的连续函数 $\lambda_\tau(x) = \rho(x, E\backslash V_\tau)$, $\tau \in T$. 令 $\lambda(x) = \sum\limits_{\tau\in T}\lambda_\tau(x)$, $\forall x \in E\backslash X$. 由于 $\{V_\tau \mid \tau \in T\}$ 是局部有限的, 即对每个 $x \in E\backslash X$, 存在 x 的某个邻域, 它只与有限个 V_τ 相交, 故 $\sum\limits_{\tau\in T}\lambda_\tau(x)$ 只是有限项的和 (其余项均为零), 从而 $\lambda(x)$ 有定义, 并且是 $E\backslash X$ 上的连续函数. 对每个 $x \in E\backslash X$, 存在 V_τ, 使 $x \in V_\tau$, 从而 $\lambda_\tau(x) > 0$, 故 $\lambda(x) > 0$. 令 $\mu_\tau(x) = \dfrac{\lambda_\tau(x)}{\lambda(x)}$, $\forall x \in E\backslash X$. 显然 $\mu_\tau(x)$ 是非负连续的, 并且 $\sum\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(x) = 1$(注意 $\sum\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(x)$ 实际上是有限项的和). 定义算子 P_α 如下:

$$P_\alpha x = \begin{cases} x, & \text{当 } x \in X \text{ 时},\\ \sum\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(x)y_\tau, & \text{当 } x \in E\backslash X \text{ 时}.\end{cases}$$

下证 P_α 符合定理的要求. 首先注意, 对每个 $x \in E\backslash X$, $\sum\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(x)y_\tau$ 实际上是有限项的和, 故 P_α 有意义, 并且显然 $P_\alpha : E \mapsto X$(因为 X 是凸的). 又 $P_\alpha x = x$, $\forall x \in X$.

当 $x \in X$ 时, (1.2.2) 式显然成立. 当 $x \in E \backslash X$ 时, 由 $x - P_\alpha x = \sum\limits_{\tau \in T} \mu_\tau(x)(x - y_\tau)$ 知

$$\|x - P_\alpha(x)\| \leqslant \sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x) \|x - y_\tau\|. \tag{1.2.4}$$

上式右端只有有限个 $\mu_\tau(x) \neq 0$. 当 $\mu_\tau(x) \neq 0$ 时, 必有 $x \in V_\tau$, 从而由 (1.2.3) 式知 $\|x - y_\tau\| \leqslant (1+\alpha)\rho(x, X)$. 于是再根据 (1.2.4) 式得

$$\|x - P_\alpha(x)\| \leqslant \sum_{\tau \in T} \mu_\tau(x)(1+\alpha)\rho(x, X) = (1+\alpha)\rho(x, X),$$

故 (1.2.2) 式成立.

再证 P_α 的连续性. 在开集 $E \backslash X$ 的点和 X 的内点处, P_α 的连续性是显然的. 设 x_0 是 X 的一个边界点, 并且 $x_n \in E$, $x_n \to x_0$. 于是由 (1.2.2) 式知

$$\begin{aligned} \|P_\alpha x_n - P_\alpha x_0\| &= \|P_\alpha x_n - x_0\| \leqslant \|P_\alpha x_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \\ &\leqslant (1+\alpha)\rho(x_n, X) + \|x_n - x_0\| \leqslant (2+\alpha)\|x_n - x_0\|, \end{aligned}$$

故 $P_\alpha x_n \to P_\alpha x_0$. P_α 的连续性获证. 证完.

定理 1.2.4 设 E 是无穷维 Banach 空间, $r > 0$, $S = \{x \in E \mid ||x|| = r\}$, $T = \{x \in E \mid ||x|| \geqslant r\}$, 则 S, T 都是 E 的收缩核.

这一定理的证明见文献 [61].

注 1.2.2 可以证明, 在有限维空间中, S 和 T 都一定不是 E 的收缩核, 所以定理 1.2.4 的结论是出人意料的. 这一定理实质上给出了无穷维空间的一个本质特征.

引理 1.2.2 设E是一个 Banach 空间, W 是E中的收缩核. 则 $\lambda W = \{\lambda x | x \in W\}$ 也是 E 的一个收缩核.

这一引理的证明是显然的.

§1.2.3 全连续算子延拓定理

下面讨论全连续算子的延拓问题.

定理 1.2.5 (全连续算子延拓定理) 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, D 是 E_1 中的闭集, $A: D \mapsto E_2$ 全连续. 则必存在算子 $\tilde{A}: E_1 \mapsto E_2$ 全连续, 使得当 $x \in D$ 时 $\tilde{A}x \equiv Ax$, 并且 $\tilde{A}(E_1) \subset \overline{\text{co}}A(D)$, 这里 $\overline{\text{co}}A(D)$ 是 $A(D)$ 的凸闭包.

证 先设 D 是有界集. 根据定理 1.2.2, 对每一个自然数 n, 存在 E_2 的有限维子空间 E_n 和连续有界的有限维算子 $K_n: D \mapsto E_n$, 使得

$$||Ax - K_n x|| < \frac{1}{2^{n+2}}, \ \forall x \in D.$$

令 $A_1 = K_1,\ A_n = K_n - K_{n-1}(n = 2, 3, \cdots)$, 则每个 $A_n(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 都是 D 上连续有界的有限维算子, 并且

$$\|A_n x\| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad x \in D,\ n = 2, 3, 4, \cdots, \tag{1.2.5}$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x, \quad \forall x \in D, \tag{1.2.6}$$

对每一个自然数 n, 根据定理 1.2.3, $\overline{\mathrm{co}}A_n(D)$ 是 E_2 的一个收缩核. 用 P_n 表示它的一个保核收缩. 由于 $A_n(D)$ 是有限维空间中的有界集, 故根据拓扑学中的 Tietze 扩张定理, A_n 可以延拓成整个 E_1 上的连续有界的有限维算子 B_n, 从而 $B_n : E_1 \mapsto E_2$ 全连续. 令 $C_n = P_n B_n$, 则 $C_n : E_1 \mapsto E_2$ 全连续, 并且当 $x \in D$ 时有 $C_n x = A_n x$. 由 (1.2.5) 式并注意到 P_n 的定义, 易知

$$\|C_n x\| \leqslant \frac{1}{2^n}, \ \ \forall x \in E_1,\ n = 2, 3, 4, \cdots. \tag{1.2.7}$$

令

$$Cx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x, \ \ \forall x \in E_1. \tag{1.2.8}$$

则由 (1.2.7) 式和定理 1.2.1 知 $C : E_1 \mapsto E_2$ 全连续, 并且由 (1.2.6) 式知当 $x \in D$ 时恒有 $Cx = Ax$. 根据定理 1.2.3, $\overline{\mathrm{co}}A(D)$ 是 E_2 的一个收缩核. 设 P 是它的一个保核收缩, $\tilde{A} = PC$, 则显然 $\tilde{A} : E_1 \mapsto E_2$ 全连续, $\tilde{A}(E_1) \subset \overline{\mathrm{co}}A(D)$, 并且当 $x \in D$ 时, 有 $\tilde{A}x = PCx = PAx = Ax$. 于是, 在 D 有界的情况下, 定理获证.

现设 D 无界. 令 $T_n = \{x \in E_1 \mid \|x\| \leqslant n\}(n = 1, 2, \cdots)$. 对有界闭集 $D \cap T_1$ 应用上面已证的结果可知一定存在 $A_1 : E_1 \mapsto E_2$ 全连续, 当 $x \in D \cap T_1$ 时, $A_1 x = Ax$, 并且 $A_1(E_1) \subset \overline{\mathrm{co}}A(D \cap T_1)$. 在集合 $D_1 = D \cup T_1$ 上定义算子 $\tilde{A}_1$ 如下：当 $x \in D$ 时 $\tilde{A}_1 x = Ax$; 当 $x \in T_1$ 时 $\tilde{A}_1 x = A_1 x$(由于当 $x \in D \cap T_1$ 时, $A_1 x = Ax$, 故这样定义是合理的). 显然 $\tilde{A}_1 : D_1 \mapsto E_2$ 全连续, 并且当 $x \in D$ 时, $\tilde{A}_1 x = Ax$. 显然 $\tilde{A}_1(D) \subset \overline{\mathrm{co}}A(D)$. 用同样的方法可以定义 $D_2 = D_1 \cup T_2 = D \cup T_2$ 上的全连续算子 $\tilde{A}_2 : D_2 \mapsto E_2$, 使得当 $x \in D$ 时, $\tilde{A}_2 x = \tilde{A}_1 x = Ax$. 并且 $\tilde{A}_2(D_2) \subset \overline{\mathrm{co}}A(D)$. 这样继续下去, 我们可以定义一列全连续算子 $\tilde{A}_n : D_n = D \cup T_n \mapsto E_2$ 全连续, 它是 $\tilde{A}_{n-1} : D_{n-1} \mapsto E_2$ 的延拓, 并且有 $\tilde{A}_n(D_n) \subset \overline{\mathrm{co}}A(D)(n = 2, 3, \cdots)$. 最后, 定义算子 $\tilde{A}$ 如下：对 $x \in E_1$, 取 n 满足 $x \in D_n$, 定义 $\tilde{A}x = \tilde{A}_n x$. 显然, 这样定义的 $\tilde{A}x$ 由 x 唯一确定, 而与 n 的选取无关. 显然 $\tilde{A} : E_1 \mapsto E_2$ 全连续, 当 $x \in D$ 时, $\tilde{A}x = Ax$, 并且 $\tilde{A}(E_1) \subset \overline{\mathrm{co}}A(D)$. 证完.

推论 1.2.1　设 E 是 Banach 空间, D 是 E 中的闭集, W 是 X 的一个收缩核, $A: D \mapsto W$ 是一个全连续算子. 则存在全连续算子 $A_1: E \mapsto E$, 使得

$$A_1(E) \subset W; \quad A_1 x = Ax, \ \ \forall x \in D.$$

证　根据定理 1.2.5, 存在全连续算子 $\tilde{A}: E \mapsto E$, 使得 $\tilde{A}x = Ax$, $\forall x \in D$. 取 W 的一个保核收缩 $P: E \mapsto W$, 令 $A_1 = P\tilde{A}$, 则显然 A_1 满足推论的全部要求. 证完.

注 1.2.3　本节的主要内容选自文献 [20], [27].

§1.3　无穷维空间的积分和微分

§1.3.1　抽象函数的积分与微分

设 E 是 Banach 空间. 我们把自变量 t 取实数值, 而值域在 Banach 空间 E 中的算子 $x(t): [a,b] \mapsto E$ 称为是抽象函数.

定义 1.3.1　设 $x(t): [a,b] \mapsto E$ 是一个抽象函数. 对 $[a,b]$ 的任一分法 T:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < \cdots < t_n = b,$$

作积分和 $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} x(\xi_i)\Delta t_i$, 其中 $\xi_i \in [t_{i-1},\ t_i]$ 是任取的, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 如果存在 $I \in E$, 使得当 $d(T) = \max\limits_i \Delta t_i \to 0$ 时, $\|\sigma - I\| \to 0$, 则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 元素 I 叫做 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分, 记为 $\displaystyle\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$, 即

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t = I = \lim_{d(t)\to 0} \sum_{i=1}^{n} x(\xi_i)\Delta t_i. \tag{1.3.1}$$

用与数学分析中相同的方法, 我们可以证明：

定理 1.3.1　如果 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.

显然, 对于抽象函数的 Riemann 积分, 下面两个式子都是成立的：

$$\Big\| \int_a^b x(t)\mathrm{d}t \Big\| \leqslant \int_a^b \|x(t)\|\mathrm{d}t, \tag{1.3.2}$$

$$f\Big(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t \Big) = \int_a^b f(x(t))\mathrm{d}t, \quad \forall f \in E^*. \tag{1.3.3}$$

定义 1.3.2　设 $x(t): [a,b] \mapsto E$ 是抽象函数, $t_0 \in [a,b]$. 如果存在 $z_0 \in E$, 使

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Big\| \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - z_0 \Big\| = 0,$$

则称 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 点可微, z_0 叫做 $x(t)$ 在 t_0 点的导数, 记为 $x'(t_0)$, 即

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}. \tag{1.3.4}$$

如果 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 中每一点均可微 (a 点右可微, b 点左可微), 则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微.

显然, 导函数 $x'(t):[a,b]\mapsto E$ 也是一个抽象函数.

定理 1.3.2 (i) 如果 $x'(t)$ 在 $[a,b]$ 存在并且连续, 则 Newton-Leibniz 公式成立:

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t=x(b)-x(a). \tag{1.3.5}$$

(ii) 如果 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 则必存在 $a<\xi<b$, 使得

$$\|x(b)-x(a)\|\leqslant(b-a)\|x'(\xi)\|.$$

(iii) 设 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续. 令 $y(t)=\displaystyle\int_a^t x(s)\mathrm{d}s,\ a\leqslant t\leqslant b$, 则 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 可微, 并且 $y'(t)=x(t)(a\leqslant t\leqslant b)$.

证 (i) 任取 $f\in E^*$, 考察 $[a,b]$ 上的实函数 $g(t)=f(x(t))$. 易知 $g'(t)=f(x'(t)),\ a\leqslant t\leqslant b$, 故 $g'(t)$ 在 $[a,b]$ 连续. 由数学分析中的 Newton-Leibniz 公式知 $\displaystyle\int_a^b g'(t)\mathrm{d}t=g(b)-g(a)$. 注意到 (1.3.3) 式, 得到

$$f\Big(\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t\Big)=\int_a^b f(x'(t))\mathrm{d}t=f(x(b)-x(a)).$$

由于 $f\in E^*$ 是任意的, 故 (1.3.5) 式成立.

(ii) 取 $f\in E^*$, 使得 $\|f\|=1$, 并且 $f(x(b)-x(a))=\|x(b)-x(a)\|$. 令 $g(t)=f(x(t))$, 则由数学分析中的中值公式知, 存在 $a<\xi<b$, 使

$$\begin{aligned}\|x(b)-x(a)\|&=g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)\\&=f(x'(\xi))(b-a)\leqslant\|f\|\cdot\|x'(\xi)\|(b-a)=\|x'(\xi)\|(b-a).\end{aligned}$$

(iii) 设 $t\in[a,b]$. 任给 $\varepsilon>0$, 由 $x(s)$ 的连续性知存在 $\delta>0$, 使得当 $|s-t|<\delta$ 时, 有 $\|x(s)-x(t)\|<\varepsilon$. 于是 $0<|\Delta t|<\delta$ 时, 由公式 (1.3.2) 可得

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}-x(t)\Big\|&=\Big\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}[x(s)-x(t)]\mathrm{d}s\Big\|\\&\leqslant\frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+\Delta t}\|x(s)-x(t)\|\mathrm{d}s\\&<\frac{1}{|\Delta t|}\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon\mathrm{d}s\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

故 $y'(t)=x(t)$. 证完.

注 1.3.1　对于取值在 Banach 空间上的抽象函数, 也可以建立 Lebesgue 可测函数和 Lebesgue 可积的概念, 并且实变函数论中的大多数概念和定理, 对抽象函数也都是成立的. §1.1.2 中所述的结果, 也都可以做相应的推广. 详细情况见文献 [21].

§1.3.2　Fréchet 微分

定义 1.3.3　设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, D 是 E_1 中的开集, $A:D\mapsto E_2$, $x_0\in D$. 如果存在有界线性算子 $B:E_1\mapsto E_2$, 使得

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-Bh\|}{\|h\|}=0. \tag{1.3.6}$$

则称算子 A 在点 x_0 处是 Fréchet 可微的, B 叫做 A 在点 x_0 处的 Fréchet 导算子, 记为 $A'(x_0)$.

用与数学分析中复合函数求导法相同的证明方法, 可以证明 (详情见文献 [27]) 下列结论：

定理 1.3.3　设 E_1, E_2, E_3 都是 Banach 空间, 开集 $D\subset E_1$, 开集 $H\subset E_2$, $A:D\mapsto E_2$, $B:H\mapsto E_3$, 且 $A(D)\subset H$. 设 A 在点 $x_0\in D$ 处 Fréchet 可微, B 在点 $y_0=Ax_0$ 处 Fréchet 可微, 则复合算子 $BA:D\mapsto E_3$ 在点 x_0 处 Fréchet 可微, 并且

$$(BA)'(x_0)=B'(y_0)A'(x_0).$$

推论 1.3.1　设 $A:D\mapsto E_2$, A 在点 $x_0\in D$ 处 Fréchet 可微. 设 $B:E_2\mapsto E_3$ 是有界线性算子, 则 BA 在点 x_0 处也 Fréchet 可微, 并且

$$(BA)'(x_0)=BA'(x_0).$$

定理 1.3.4　设 $x_0,h\in E_1$, $l=\{x\mid x=x_0+th,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}\subset D$. 则

(i) 若泛函 $f:D\mapsto \mathbf{R}^1$ 在 l 上 Fréchet 可微, 则存在 $0<\tau<1$, 使中值公式成立：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\tau h)h; \tag{1.3.7}$$

(ii) 若算子 $A:D\mapsto E_2$ 在 l 上 Fréchet 可微, 则存在 $0<\tau<1$, 使

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|\leqslant\|A'(x_0+\tau h)h\|;$$

(iii) 若算子 $A:D\mapsto E_2$ 在 l 上 Fréchet 可微, 并且 $A'(x)$ 在 l 上连续, 则

$$A(x_0+h)-Ax_0=\int_0^1 A'(x_0+th)h\mathrm{d}t. \tag{1.3.8}$$

证　(i) 令 $\varphi(t)=f(x_0+th)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 根据定理 1.3.3 易知 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 并且 $\varphi'(t)=f'(x_0+th)h$. 由微分中值公式知存在 $0<\tau<1$, 使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 即 (1.3.7) 式成立.

(ii) 不失一般可设 $A(x_0+h)-Ax_0\neq\theta$. 由 Hahn-Banach 定理知存在 $\psi\in E^*$, 使 $\|\psi\|=1$, 并且 $\psi(A(x_0+h)-Ax_0)=\|A(x_0+h)-Ax_0\|$. 考察函数 $\varphi(t)=\psi(A(x_0+th))$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 显然 $\varphi'(t)=\psi(A'(x_0+th)h)$. 于是由微分中值公式知存在 $0<\tau<1$, 使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$, 即 $\psi(A(x_0+h)-Ax_0)=\psi(A'(x_0+\tau h)h)$, 从而

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|\leqslant\|\psi\|\|A'(x_0+\tau h)h\|=\|A'(x_0+\tau h)h\|.$$

(iii) 考察抽象函数 $y(t)=A(x_0+th)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 由假定知 $y'(t)=A'(x_0+th)h$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上连续, 故由定理 1.3.2 可知 $\displaystyle\int_0^1 y'(t)\mathrm{d}t=y(1)-y(0)$, 此即 (1.3.8) 式. 证完.

定理 1.3.5　设 $D\subset E_1$ 是开集, $A:D\mapsto E_2$ 是全连续算子, 并且在点 $x_0\in D$ 处 Fréchet 可微, 则 $A'(x_0):E_1\mapsto E_2$ 是全连续线性算子.

证　只需证 $A'(x_0)$ 将 E_1 中单位球 $T=\{x\mid x\in E_1,\|x\|\leqslant 1\}$ 映成 E_2 中的相对紧集 $A'(x_0)(T)$. 设 $A'(x_0)(T)$ 不是相对紧集, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $h_i\in T(i=1,2,\cdots)$, 使得

$$\|A'(x_0)h_i-A'(x_0)h_j\|\geqslant\varepsilon_0\quad(i\neq j).$$

由 $A'(x_0)$ 的定义并注意到 D 是开集, 可知 存在 $\tau>0$, 使得当 $\|h\|\leqslant\tau$ 时, 有 $x_0+h\in D$, 并且

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{3}\|h\|.$$

于是当 $i\neq j$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\|A(x_0+\tau h_i)-A(x_0+\tau h_j)\|\\
&\quad=\|[A(x_0+\tau h_i)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_i)]\\
&\qquad-[A(x_0+\tau h_j)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_j)]+\tau[A'(x_0)h_i-A'(x_0)h_j]\|\\
&\quad\geqslant\tau\|A'(x_0)h_i-A'(x_0)h_j\|-\|A(x_0+\tau h_i)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_i)\|\\
&\qquad-\|A(x_0+\tau h_j)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_j)\|\\
&\quad\geqslant\tau\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{3}\|\tau h_i\|-\frac{\varepsilon_0}{3}\|\tau h_j\|\geqslant\frac{\tau\varepsilon_0}{3},
\end{aligned}$$

此与 A 的全连续性矛盾. 证完.

§1.3.3　渐近线性算子

定义 1.3.4　设 $A:D\mapsto E_2$, D 包含 E_1 中某球的外部 (即存在 $R>0$, 使

$\forall x \in E_1$, $\|x\| > R$ 都有 $x \in D$). 若存在有界线性算子 $B: E_1 \mapsto E_2$, 使

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\|Ax - Bx\|}{\|x\|} = 0,$$

则称算子 A 在无穷远 ∞ 处 Fréchet 可微, B 叫做 A 在 ∞ 处的 Fréchet 导算子, 记为 $A'(\infty)$, 即 $A'(\infty) = B$. 当 $A'(\infty)$ 存在时, 称 A 是渐近线性算子.

用与定理 1.3.5 同样的证明方法我们有

定理 1.3.6 如果 $A: D \mapsto E_2$ 是全连续的渐近线性算子, 则 $A'(\infty): E_1 \mapsto E_2$ 是全连续线性算子.

注 1.3.2 设 D 是 E_1 中开集, $A: D \mapsto E_2$. 如果 A 在 D 中每一点 x 处都是 Fréchet 可微的, 则 Fréchet 导算子 $A'(x)$ 随 x 而变. 因此, $A': D \mapsto L(E_1, E_2)$ 也是一个算子, 这里 $L(E_1, E_2)$ 是映 E_1 入 E_2 的全体有界线性算子组成的 Banach 空间. 如果 A' 在点 $x_0 \in D$ 处是 Fréchet 可微的, 则称 A 在点 x_0 处是二阶 Fréchet 可微的. 导算子 $(A')'(x_0)$ 叫做算子 A 在点 x_0 处的二阶 Fréchet 导算子, 记为 $A''(x_0)$. 类似的. 可以定义 n 阶 Fréchet 可微和 n 阶 Fréchet 导算子的概念. 关于高阶 Fréchet 可微和高阶 Fréchet 导算子的详细讨论, 请参见文献 [27], [13].

§1.3.4 Gâteaux 微分

定义 1.3.5 设 D 是 E_1 中开集, $A: D \mapsto E_2$, $x_0 \in D$. 如果对于任何 $h \in E_1$, 极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{A(x_0 + th) - Ax_0}{t} \tag{1.3.9}$$

都存在 (是 E_2 中元素), 则称 A 在点 x_0 处是 Gâteaux 可微的, 极限 (1.3.9) 叫做 A 在 x_0 处沿方向 h 的 Gâteaux 微分, 记为 $D[A(x_0)h]$. 如果存在有界线性算子 $B: E_1 \mapsto E_2$, 使得 Gâteaux 微分可以表为 $D[A(x_0)h] = Bh$, 则称 A 在 x_0 处有有界线性的 Gâteaux 微分, B 叫做 A 在点 x_0 处的 Gâteaux 导算子. A 在点 x_0 处的 Gâteaux 导算子也记为 $A'(x_0)$(这里使用与 Fréchet 导算子相同的符号, 在证明了下一定理后就会知道不会产生混淆).

下面的定理给出了 Fréchet 可微和 Gâteaux 可微之间的关系, 其证明见文献 [27].

定理 1.3.7 设 D 是 E_1 中的开集, $A: D \mapsto E_2$, $x_0 \in D$. 则

(i) 如果 A 在 x_0 处是 Fréchet 可微, 则 A 在 x_0 处必有有界线性的 Gâteaux 微分, 并且 A 在 x_0 处的 Gâteaux 导算子和 Fréchet 导算子相等;

(ii) 若 A 在点 x_0 的某邻域内处处有有界线性的 Gâteaux 微分, 并且 Gâteaux 导算子 $A'(x)$ 在点 $x = x_0$ 处是连续的, 则 A 在点 x_0 处是 Fréchet 可微的.

注 1.3.3　从定理 1.3.4 的证明可以看出, 如果把 Fréchet 可微减弱为 Gâteaux 可微, 则定理 1.3.4 的结论仍然成立.

§1.3.5　隐函数定理

下面我们把数学分析中的隐函数定理和反函数定理推广到 Banach 空间. 它们的证明思想类似于数学分析中的相应定理, 因此我们只叙述定理的内容, 详细证明可参看文献 [27].

设 E_1, E_2, E_3 是 Banach 空间, Ω 是 $E_1\times E_2$ 中的开集, $F:\Omega\mapsto E_3$. 考察方程

$$F(x,y)=0. \tag{1.3.10}$$

设 $(x_0,y_0)\in\Omega$, 使得 $F(x_0,y_0)=0$.

定理 1.3.8(隐函数定理)　设 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续, 它对 y 的偏导算子 (Fréchet 导算子)$F'_y(x,y)$ 存在, 并且在点 (x_0,y_0) 处连续. 又设 $F'_y(x_0,y_0)$ 具有有界逆. 则存在 $r>0$, $\tau>0$, 使得当 $\|x-x_0\|<r$ 时, 方程 (1.3.10) 在 $\|y-y_0\|<\tau$ 中具有唯一连续解 $y=f(x)$, 并且 $y_0=f(x_0)$.

作为隐函数定理的特例, 下列反函数定理成立.

定理 1.3.9(反函数定理)　设 D 是 E_1 中的开集, $x_0\in D$, $f:D\mapsto E_2$ 是 Fréchet 可微的, $f'(x)$ 在点 x_0 处连续, 并且 $f'(x_0)$ 具有有界逆. 则 $f(x)$ 在点 x_0 处是局部同胚的, 即存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 及 $y_0=f(x_0)$ 的邻域 $V(y_0)$, 使得 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上的限制是 $U(x_0)$ 到 $V(y_0)$ 的同胚.

注 1.3.4　本节的内容选自文献 [27].

§1.4　非紧性测度

本节给出非紧性测度的概念和一些主要性质.

定义 1.4.1　设 E 是 Banach 空间, S 是 E 中的有界集. 令

$$\alpha(S)=\inf\{\delta>0\mid S\text{ 是有限个直径}\leqslant\delta\text{的集合之并}\},$$

则称 $\alpha(S)$ 是 S 的 Kuratowski 非紧性测度, 简称非紧性测度.

显然, $0\leqslant\alpha(S)<\infty$.

定理 1.4.1　设 S,T 是 E 中的有界集, a 是实数, $\alpha(S)$ 是非紧性测度, 则下列结论成立：

(i) $\alpha(S)=0\Leftrightarrow S$ 是相对紧集;

(ii) $S\subset T\Rightarrow\alpha(S)\leqslant\alpha(T)$;

(iii) $\alpha(\overline{S})=\alpha(S)$;

(iv) $\alpha(S\cup T)=\max\{\alpha(S),\alpha(T)\}$;

(v) $\alpha(aS)=|a|\alpha(S)$, 其中 $aS=\{x=az \mid z\in S\}$;

(vi) $\alpha(S+T)\leqslant\alpha(S)+\alpha(T)$, 其中 $S+T=\{x=y+z \mid y\in S, z\in T\}$;

(vii) $\alpha(\overline{\mathrm{co}}S)=\alpha S$, 这里 $\overline{\mathrm{co}}S$ 是 S 的凸闭包;

(viii) $|\alpha(S)-\alpha(T)|\leqslant 2d_h(S,T)$, 这里 $d_h(S,T)$ 是 S 和 T 之间的 Hausdorff 距离, 即 $d_h(S,T)=\max\{\sup\limits_{x\in S}d(x,T),\ \sup\limits_{x\in T}d(x,S)\}$, $d(\cdot,\cdot)$ 表示点到集合之间的距离.

引理 1.4.1 设 $\{S_n\}$ 是 E 中的一列有界非空闭集, $S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$, 并且当 $n\to\infty$ 时有 $\alpha(S_n)\to 0$. 则 $S=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 是 E 中的非空紧集.

设 $I=[a,b]$, $C[I,E]=\{x(t) \mid x(t):[a,b]\mapsto E\text{连续}\}$, 其范数为 $\|x\|=\max\limits_{t\in I}\|x(t)\|$. 对 $H\subset C[I,E]$, 令

$$H(t)=\{x(t) \mid x\in H\}\subset E,\quad H(I)=\bigcup_{t\in I}H(t)\subset E.$$

下面我们把 E 和 $C[I,E]$ 中的非紧性测度都用 $\alpha(\cdot)$ 表示.

定理 1.4.2 设 $H\subset C[I,E]$ 是有界的, 等度连续的, 则

$$\alpha(H)=\alpha(H(t));\qquad \alpha(H(I))=\max_{t\in I}\alpha(H(t)).$$

定理 1.4.3 设 D 是 E 中的有界集, $f: I\times D\mapsto E$ 是有界且一致连续的, 则

$$\alpha(f(I\times B))=\max_{t\in I}\alpha(f(t,B)),\quad \forall B\subset D.$$

定理 1.4.4(Ascoli-Arzela) 集合 $H\subset C[I,E]$ 相对紧的充分必要条件是：H 是等度连续的, 并且对任给 $t\in I$, $H(t)$ 是 E 中的相对紧集.

定理 1.4.5 设 $H\subset C[I,E]$ 是有界的、等度连续的, 则 $\alpha(H(t))$ 在 I 上连续, 并且

$$\alpha\Big(\Big\{\int_I x(t)\mathrm{d}t \mid x\in H\Big\}\Big)\leqslant\int_I\alpha(H(t))\mathrm{d}t.$$

注 1.4.1 本节所有结论及其证明均可以在文献 [27], [46], [49] 中找到.

§1.5 非线性积分方程与微分方程

非线性泛函分析的一般理论广泛地应用于研究各种类型的非线性微分方程和积分方程解的性质. 这里我们简要地叙述本书所需要的非线性积分方程与微分方程的若干基本知识.

§1.5.1　非线性积分方程

非线性积分方程的研究起源于 20 世纪 20 年代, 它的发展同非线性泛函分析的发展紧密地联系在一起. 事实表明, 相当广泛类型的非线性微分方程可以转化成与之等价的非线性积分方程. 这种转化已经成为研究微分方程最重要的基本方法之一. 这种转化一旦实现, 人们就可以利用非线性泛函分析和非线性积分方程的已有成果.

设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭域, $k(x,y,u):G\times G\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$. 形如

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y=K\varphi(x) \tag{1.5.1}$$

的非线性积分方程被称为是Урысон 型积分方程, 由 (1.5.1) 式定义的算子 K 被称为Урысон型积分算子.

非线性积分算子的全连续性是非线性积分方程理论的重要研究内容. 这里我们简要地讨论一下这个课题.

定理 1.5.1　设 $0<\mathrm{mes}G<+\infty$, 并且对一切 $x\in G$ 和几乎所有的 $y\in G$, $k(x,y,u)$ 关于 u 连续, 对一切 $x\in G$, $u\in\mathbf{R}^1$, $k(x,y,u)$ 关于 y 是 Lebesgue 可测函数. 则Урысон算子 K 映 $C(G)$ 入自身全连续的充分必要条件是：对任给 $a>0$, 下面两个关系

$$\int_G\sup_{|u|\leqslant a}|k(x,y,u)|\mathrm{d}y<+\infty,$$

$$\lim_{\substack{|h|\to 0\\ x+h\in G}}\int_G\sup_{|u|\leqslant a}|k(x+h,y,u)-k(x,y,u)|\mathrm{d}y=0,$$

对一切 $x\in G$ 成立.

这一定理的充分性部分和必要性部分分别见文献 [60], [138].

推论 1.5.1　设 $k(x,y,u):G\times G\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$ 连续, 则Урысон算子 K 映 $C(G)$ 入自身全连续.

Урысон 型积分方程最重要的特殊情况是如下的 Hammerstein 型积分方程：

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y=A\varphi(x). \tag{1.5.2}$$

由 (1.5.2) 式定义的算子 A 被称为 Hammerstein 型积分算子.

设 $\mathbf{f}\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$, $K\varphi(x)=\displaystyle\int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$, 则显然 Hammerstein 型积分算子可以表为 $A=K\mathbf{f}$.

为了研究 Hammerstein 型积分算子的全连续性, 可以利用定理 1.5.1(它实际上也给出了在 $C(G)$ 空间中判别 Hammerstein 型积分算子全连续性的充分必要条件), 也可以利用下列定理 (这一定理的成立是显然的)：

定理 1.5.2 设 E_1, E_2, E_3 是 Banach 空间, $\mathbf{f} : E_1 \mapsto E_2$ 是有界连续算子, $K : E_2 \mapsto E_3$ 是全连续算子, 则 Hammerstein 型积分算子 $A : E_1 \mapsto E_3$ 是全连续的.

注 1.5.1 定理 1.5.2 的意义在于, 它把 Hammerstein 型积分算子的全连续性的判别归结为Немыцкий 算子的有界性和连续性判别与线性积分算子的全连续性判别. 关于非线性积分算子全连续性的系统讨论见文献 [48].

注 1.5.2 这里需要指出：Немыцкий 算子 $\mathbf{f}$ 一般来说不可能是全连续的, 因为可以证明 (见文献 [60])：Немыцкий 算子 $\mathbf{f}$ 映一个函数空间到自身全连续的充分必要条件是 $f(x, u)$ 与 u 无关. 在这种情况下, $\mathbf{f}$ 把整个函数空间映为一个点.

Урысон型积分方程的另一个重要的特殊情况是如下的 Volterra 型积分方程：

$$\varphi(t) = \int_a^t k(t, s, \varphi(t))\mathrm{d}t = A\varphi(t). \tag{1.5.3}$$

由 (1.5.3) 式定义的算子 A 被称为 Volterra 型积分算子.

§1.5.2 常微分方程两点边值问题

考虑常微分方程两点边值问题 (也称 Sturm-Liouville 问题)

$$-Lu = g(x), \quad x \in [0,\ 1], \tag{1.5.4}$$

$$au(0) + bu'(0) = 0, \quad cu(1) + du'(1) = 0. \tag{1.5.5}$$

我们使用下列假设：

(SL_1) $Lu = (p(x)u')' + q(x)u$, $p(x) \in C^1[0,\ 1]$, $p(x) > 0 (x \in [0,\ 1])$, $q(x) \in C[0,\ 1]$; $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$; 并且对应的齐次方程是 $-Lu = 0$ 在边界条件 (1.5.5) 下只有零解.

利用常微分方程理论, 可以证明以下三个引理 (证明详细过程见文献 [149], [48])：

引理 1.5.1 设 (SL_1) 成立, 则必存在两个函数 $\tilde{u}(x)$ 和 $\tilde{v}(x)$, 满足

(i) $\tilde{u}(x) \in C^2[0,\ 1]$, $\tilde{v}(x) \in C^2[0,\ 1]$;

(ii) $L\tilde{u}(x) = 0$, $a\tilde{u}(0) + b\tilde{u}'(0) = 0$;

(iii) $L\tilde{v}(x) = 0$, $c\tilde{v}(1) + d\tilde{v}'(1) = 0$;

(iv) $\tilde{u}(x)$ 与 $\tilde{v}(x)$ 线性无关;

(v) $p(x)(\tilde{u}\tilde{v}' - \tilde{u}'\tilde{v}) = -1$.

设 u, v 如引理 1.5.1 所述, 令

$$k(x, y) = \begin{cases} \tilde{u}(x)\tilde{v}(y), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ \tilde{u}(y)\tilde{v}(x), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.5.6}$$

引理 1.5.2 设 (SL_1) 成立, 则

(i) $k(x,y)$ 在 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 上连续;

(ii) $k(x,y)$ 是对称的, 即 $k(x,y)=k(y,x)$;

(iii) 当 $0\leqslant x<y\leqslant 1$ 或者 $0\leqslant y<x\leqslant 1$ 时 $k(x,y)$ 有连续的偏导数 k'_x, k''_{xx};

(iv) 对于固定的 $y\in[0,\ 1]$, $k(x,y)$ 满足

$$Lk(x,y)=0,\quad \text{当 } x\in[0,\ 1],\ x\neq y\text{时},$$

$$ak(0,y)+bk'_x(0,y)=0,\quad ck(1,y)+dk'_x(1,y)=0,\quad \text{当 } y\in(0,1)\text{ 时};$$

(v) 当 $x=y$ 时 k'_x 有第一类间断点, 并且

$$k'_x(y+0,y)-k'_x(y-0,y)=-\frac{1}{p(y)},\ \forall y\in(0,1).$$

注 1.5.3 容易证明满足引理 1.5.2 性质 (i)~(v) 的函数 $k(x,y)$ 是唯一确定的. 具有引理 1.5.2 性质 (i)~(v) 的函数 $k(x,y)$ 称为是 Green 函数.

注 1.5.4 直接计算表明, 如果 $Lu=u''$, $\Delta=bc-a(c+d)\neq 0$, 则齐次方程 $-Lu=0$ 在边界条件 (1.5.5) 下只有零解, 相应的 Green 函数为：

$$k(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(ax-b)(cy-c-d)}{\Delta}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\text{时},\\[2mm] \dfrac{(ay-b)(cx-c-d)}{\Delta}, & \text{当 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\text{时}.\end{cases}$$

对边值问题 (1.5.4), (1.5.5), 许多时候我们还使用下列假设：

(SL_2) $q(x)\leqslant 0$, $a\geqslant 0$, $b\leqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$.

引理 1.5.3 设 (SL_1), (SL_2) 满足, 则存在函数 $\tilde{u}(x)$ 和 $\tilde{v}(x)$, 具有引理 1.5.1 中的性质 (i)~(v), 并且还有如下性质：

(vi) $\tilde{u}(x)$ 是连续的增函数, 并且 $\tilde{u}(x)>0,\ \forall x\in(0,1]$;

(vii) $\tilde{v}(x)$ 是连续的减函数, 并且 $\tilde{v}(x)>0,\ \forall x\in[0,1)$.

于是 $k(x,y)>0,\ \forall 0<x<1,\ 0<y<1$.

引理 1.5.4 设 (SL_1), (SL_2) 满足, 令 $M=\max\{\max\limits_{x\in[0,1]}\tilde{u}(x),\ \max\limits_{x\in[0,1]}\tilde{v}(x)\}$, $v^*(x)=M^{-1}\min\{\tilde{u}(x),\tilde{v}(x)\},\ 0\leqslant x\leqslant 1$. 则

$$k(x,y)\geqslant v^*(x)k(z,y),\ \forall x,y,z\in[0,1]. \tag{1.5.7}$$

证 如果 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant y\leqslant 1$, 则有

$$k(x,y)=\tilde{u}(x)\tilde{v}(y)\geqslant M^{-1}\tilde{u}(x)\tilde{u}(z)\tilde{v}(y)\geqslant v^*(x)\tilde{u}(z)\tilde{v}(y)=v^*(x)k(z,y),$$

即 (1.5.7) 式成立. 同理, 在其他情况下 (1.5.7) 式也成立. 证完.

定理 1.5.3 设引理 1.5.1 的条件满足, $g(x) \in C[0,\ 1]$, 则下列结论成立：

(i) 边值问题 (1.5.4), (1.5.5) 存在唯一的解.

(ii) 如果函数 $w(x)$ 由

$$w(x) = \int_0^1 k(x,y)g(y)\mathrm{d}y \tag{1.5.8}$$

确定, 则 $w(x) \in C^2[0,\ 1]$, 并且是边值问题 (1.5.4), (1.5.5) 的解.

(iii) 如果 $w(x) \in C^2[0,\ 1]$ 是边值问题 (1.5.4), (1.5.5) 的解, 则 $w(x)$ 必满足 (1.5.8) 式.

有了以上准备后, 我们考虑非线性常微分方程两点边值问题

$$-Lu = f(x,u,u'), \quad x \in [0,\ 1]. \tag{1.5.9}$$

定理 1.5.4 设引理 1.5.1 的条件满足, $f(x,u,p) : [0,1] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^1$ 连续, 则下列结论成立：

(i) 如果 $u(x)$ 满足

$$u(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y,u(y),u'(y))\mathrm{d}y, \tag{1.5.10}$$

则 $u(x) \in C^2[0,\ 1]$, 并且是边值问题 (1.5.9), (1.5.5) 的解.

(ii) 如果 $u(x) \in C^2[0,\ 1]$ 是边值问题 (1.5.9), (1.5.5) 的解, 则 $u(x)$ 满足方程 (1.5.10).

定理 1.5.5 如果假设 (SL_1) 满足, $Ku(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$ 则 K 具有无界的特征值序列：

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots, \qquad \lambda_n \to +\infty,$$

每个特征值的代数重数都是单重的. 如果进一步假定 (SL_2) 成立, 则 $\lambda_1 > 0$, 并且 K 的谱半径 $r(K) = \lambda_1^{-1}$.

注 1.5.5 常微分方程两点边值与积分方程之间的关系是 Hilbert 在 1904 发现的. 它是 Hilbert 最有价值的成就之一. 从这个工作开始, 利用积分方程研究微分方程成为微分方程理论中最重要和最基本的方法之一.

注 1.5.6 本节内容选自文献 [48], [149]. 本书所需要的线性泛函分析的知识可见文献 [21], [25], [26], [143], [150], 点集拓扑学的知识见文献 [57], [140], 常微分方程的知识见文献 [58], [149], 偏微分方程的知识见文献 [24], [142].

第二章　拓扑度理论

拓扑度理论是非线性泛函分析的基本理论之一, 它是研究各种非线性问题重要的基本工具. 拓扑度的概念起源于用代数拓扑的方法研究映射的不动点. 它的陈述和讨论最早都是采用代数拓扑学的工具. 最近几十年, 拓扑度理论在分析数学, 特别是在微分方程与积分方程理论中得到了越来越广泛的应用. 为了便于分析学者掌握和使用这一工具, 人们做了大量的工作, 把拓扑度理论重新建立在分析学的基础上. 本章的主要目的是用分析学的方法介绍拓扑度理论的基本内容.

§2.1　Brouwer 度的概念与基本性质

在本节中, 我们首先讨论有限维空间中的拓扑度理论. 有限维空间中的拓扑度理论也称 Brouwer 度理论.

§2.1.1　$\mathbf{R}^n$ 中 C^2 映射拓扑度的定义和基本性质

设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界, $f:\overline{\Omega}\mapsto\mathbf{R}^n$ 是连续映射, $p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$(即 $f(x)\neq p,\ \forall x\in\partial\Omega$). 下面我们的目的是定义一个与 $f,\ \Omega,\ p$ 有关的整数, 使得可以用它来研究方程 $f(x)=p$ 解的存在问题.

首先我们假定 $f:\overline{\Omega}\mapsto\mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射, 即 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 所有的二阶偏导数都存在并且是连续的.

定义 2.1.1　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, $f:\overline{\Omega}\mapsto\mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射, $p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$, 于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 作连续函数 $\Phi:[0,+\infty)\mapsto\mathbf{R}^1$, 使得

(i) 存在 $0<\sigma<\tau^*\leqslant\tau$, 使得当 $r\notin(\sigma,\tau^*)$ 时有 $\Phi(r)=0$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\|u\|)\mathrm{d}u=1$.

定义 C^2 映射的拓扑度 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 如下：

$$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\int_{\overline{\Omega}}\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x,\tag{2.1.1}$$

这里 $J_f(x)$ 是 $f(x)$ 在 x 处的 Jacobian 行列式.

显然, 具有上述定义中性质 (i), (ii) 的连续函数 Φ 是很多的. 下面证明由 (2.1.1) 式定义的 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 与 Φ 的选取无关, 并且是一个整数. 为此, 先给出几个引理.

引理 2.1.1 设连续函数 $\Phi:[0,\infty)\mapsto\mathbf{R}^1$ 满足定义 2.1.1 中的条件 (i), 则存在 C^1 映射 $G(u):\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}^n$, 使得

$$\mathrm{div}G(u)=\Phi(\|u\|),\quad \forall u\in\mathbf{R}^n. \tag{2.1.2}$$

证 定义

$$G(u)=\begin{cases}\dfrac{u}{\|u\|^n}\displaystyle\int_0^{\|u\|}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r, & \text{当}u\neq\theta\text{时},\\ \theta, & \text{当}u=\theta\text{时}.\end{cases} \tag{2.1.3}$$

下证 G 满足要求. 因为 Φ 满足条件 (i), 故当 $\|u\|<\sigma$ 时, $G(u)=\theta$. 由此知 G 是 C^1 映射. 记 $G(u)=(G_1(u),G_2(u),\cdots,G_n(u))$, $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, 则由 (2.1.3) 式知当 $u\neq\theta$ 时, 对于 $1\leqslant i\leqslant n$, 有

$$\frac{\partial}{\partial u_i}G_i(u)=\Phi(\|u\|)\frac{u_i^2}{\|u\|^2}+\int_0^{\|u\|}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r\cdot\Big(\frac{1}{\|u\|^n}-\frac{nu_i^2}{\|u\|^{n+2}}\Big),$$

当 $u=\theta$ 时, 显然有 $\dfrac{\partial}{\partial u_i}G_i(u)=0$. 因此

$$\mathrm{div}G(u)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial u_i}G_i(u)=\Phi(\|u\|).$$

证完.

引理 2.1.2 设 f,Φ 如定义 2.1.1 所述, 则存在 C^1 映射 $F:\overline{\Omega}\mapsto\mathbf{R}^n$, 使得

$$\mathrm{div}F(x)=\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x),\quad \forall x\in\overline{\Omega}. \tag{2.1.4}$$

证 令 G 由 (2.1.3) 式定义, $A_{ij}(x)$ 表示行列式 $J_f(x)$ 中元素 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 的代数余子式, 定义

$$F_i(x)=\sum_{j=1}^nA_{ij}(x)G_j(f(x)-p),\qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$F(x)=(F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)). \tag{2.1.5}$$

下证 F 为所求的映射. 因为 f 是 C^2 映射, G 是 C^1 映射, 故 F 是 C^1 映射. 由 F_i 的定义知

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}&=\sum_{j=1}^nA_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}G_j(f(x)-p)+\sum_{j=1}^n\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\Big]G_j(f(x)-p)\\&=\sum_{j=1}^nA_{ij}(x)\sum_{k=1}^n\frac{\partial}{\partial u_k}G_j(f(x)-p)\frac{\partial}{\partial x_i}f_k(x)+\sum_{j=1}^n\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\Big]G_j(f(x)-p).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{div}F(x) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F_i(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i}\Big]\frac{\partial}{\partial u_k}G_j(f(x)-p)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\Big]G_j(f(x)-p).\end{aligned}$$

利用对于行列式的求导法容易证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

由行列式的性质知

$$\sum_{i=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i}=\begin{cases}J_f(x), & \text{当}j=k\text{时},\\ 0, & \text{当}j\neq k\text{时}.\end{cases}$$

所以, 利用引理 2.1.1, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}F(x) &= \sum_{j=k}J_f(x)\frac{\partial}{\partial u_k}G_j(f(x)-p)=J_f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}G_k(f(x)-p)\\ &= J_f(x)\operatorname{div}G(f(x)-p)=J_f(x)\Phi(\|f(x)-p\|).\end{aligned}$$

证完.

定理 2.1.1 定义 2.1.1 中所定义的 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 与函数 Φ 的选取无关.

证 设连续函数 Φ_1 和 Φ_2 都满足定义 2.1.1 中的条件 (i), (ii), 则 $\Phi=\Phi_1-\Phi_2$ 满足条件 (i), 并且有 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\|u\|)\mathrm{d}u=0$. 由于

$$\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\|u\|)\mathrm{d}u=S_{n-1}\int_0^{\infty}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r,$$

其中 S_{n-1} 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积, 故有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r=0$. 因为当 $r\geqslant\tau$ 时 $\Phi(r)=0$, 故当 $x\in\partial\Omega$ 时, 有

$$\int_0^{\|f(x)-p\|}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}r^{n-1}\Phi(r)\mathrm{d}r=0.$$

取 G 和 F 如引理 2.1.1 和引理 2.1.2 证明中所述, 则易知当 $x\in\partial\Omega$ 时, 有 $F(x)=0$. 因此由引理 2.1.2 以及 Gauss 公式, 得到

$$\int_{\overline{\Omega}}\Phi_1(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x-\int_{\overline{\Omega}}\Phi_2(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x=\int_{\overline{\Omega}}\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\overline{\Omega}}\mathrm{div}F(x)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}F(x)\mathrm{d}S=0.$$

这说明 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 与 Φ 的选取无关. 证完.

下面令

$$N_f=\{x\in\Omega\,|\,J_f(x)=0\}.$$

由反函数定理知道, 若 $p\notin f(N_f)$, 则方程 $f(x)=p$ 在 Ω 中至多有有限个解.

定理 2.1.2　若 $p\notin f(N_f)$, 则对于由定义 2.1.1 定义的 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 来说, 有

$$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}J_f(x_i). \tag{2.1.6}$$

其中 $x_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 是方程 $f(x)=p$ 在 Ω 中的所有的解.

证　由反函数定理可知, 对每一个 $x_i(1\leqslant i\leqslant m)$, 存在 x_i 的开邻域 $\Omega_i\subset\Omega$, 使得 $f:\Omega_i\mapsto f(\Omega_i)$ 是微分同胚. 显然可取 Ω_i, 使得 $\overline{\Omega}_i\subset\Omega$, $\overline{\Omega}_i\cap\overline{\Omega}_j=\varnothing(i\neq j)$, 并且在每一个 $\overline{\Omega}_i$ 上 $J_f(x)$ 保持定号. 因为 $f(x)=p$ 在 $D=\overline{\Omega}\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega_i$ 上无解, 故 $\tau_0=\inf\limits_{x\in D}\|f(x)-p\|>0$. 作满足定义 2.1.1 中条件 (i), (ii) 的函数 Φ, 使当 $r\geqslant\tau_0$ 时, $\Phi(r)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\deg(f,\ \Omega,\ p)&=\int_{\overline{\Omega}}\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{m}\int_{\overline{\Omega}_i}\Phi(\|f(x)-p\|)J_f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}J_f(x_i)\int_{\overline{\Omega}_i}\Phi(\|f(x)-p\|)|J_f(x)|\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}J_f(x_i)\int_{f(\overline{\Omega}_i)}\Phi(\|u-p\|)\mathrm{d}u\\&=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}J_f(x_i)\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\|u-p\|)\mathrm{d}u\\&=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}J_f(x_i).\end{aligned}$$

证完.

根据定理 2.1.2, 当 $p\notin f(N_f)$ 时, $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 是整数. 下面我们证明当 $p\in f(N_f)$ 时, $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 也是整数. 为此需要下列引理.

引理 2.1.3 (Sard 定理)　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, $f:\Omega\mapsto\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射, 则 $f(N_f)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度为零.

这一引理的证明是纯测度论的, 其证明方法与本书内容无关, 故从略, 有兴趣的读者可参见文献 [27].

定理 2.1.3　由定义 2.1.1 所定义的 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 是一个整数.

证　根据定理 2.1.2 知, $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 当 $p\in\mathbf{R}^n\backslash(f(N_f)\cup f(\partial\Omega))$ 时是整值函数. 由 (2.1.1) 式知, $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 关于 $p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 是连续的. 再由 Sard 定理, $\mathbf{R}^n\backslash(f(N_f)\cup f(\partial\Omega))$ 在 $\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 中稠密, 因此 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 当 $p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 时是整值函数. 证完.

定理 2.1.4　由定义 2.1.1 所定义的 $\deg(f,\ \Omega,\ p)$ 具有下列四条基本性质：

(i) 正规性: 若 $p\in\Omega$, 则 $\deg(I,\ \Omega,\ p)=1$, 这里 I 是单位算子;

(ii) 同伦不变性: 设 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\mapsto\mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射, 并且对任给 $t\in[0,1]$, $x\in\partial\Omega$, 都有 $H(t,x)\neq p$, 则 $\deg(H(t,\cdot),\ \Omega,\ p)=$ 常数, $\forall 0\leqslant t\leqslant 1$;

(iii) 区域可加性：设 $\Omega_1,\Omega_2\subset\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, $\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$, 并且对任给 $x\in\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)$, 都有 $f(x)\neq p$, 则必有

$$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\deg(f,\ \Omega_1,\ p)+\deg(f,\ \Omega_2,\ p);$$

(iv) 平移不变性:$\deg(f,\ \Omega,\ p)=\deg(f-p,\ \Omega,\ \theta)$.

证　(i) 正规性由定理 2.1.2 推出.

(ii) 同伦不变性：令 $\tau_1=\inf\limits_{t\in[0,1],x\in\partial\Omega}\|H(t,x)-p\|$, 则 $\tau_1>0$. 按定义 2.1.1 的条件 (i), (ii) 选取 Φ(其中取 $\tau=\tau_1$), 则

$$\deg(H(t,\cdot),\ \Omega,\ p)=\int_{\Omega}\Phi(\|H(t,x)-p\|)J_{H(t,\cdot)}(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1.7}$$

由 (2.1.7) 式知 $\deg(H(t,\cdot),\ \Omega,\ p)$ 关于 t 是连续的. 由于 $\deg(H(t,\cdot),\ \Omega,\ p)$ 是整值函数, 从而它当 $t\in[0,1]$ 时是常数.

(iii) 区域可加性可以由定义 2.1.1 直接推出 (在定义 2.1.1 中取 $\tau=\inf\{\|f(x)-p\|\,|\,x\in\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)\}$).

(iv) 平移不变性由定义 2.1.1 直接推出. 证完.

§2.1.2　$\mathbf{R}^n$ 中 Brouwer 度的定义和基本性质

在定义 2.1.1 中假定了 f 是 C^2 映射, 下面解除这一限制.

定义 2.1.2　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, $f\in C(\overline{\Omega},\mathbf{R}^n)$, $p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$, 于是 $\varepsilon=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$. 取 $g\in C^2(\overline{\Omega},\mathbf{R}^n)$ 满足

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon, \tag{2.1.8}$$