中国科学院研究生教学丛书

# 计算固体力学方法

吴永礼　编著

科 学 出 版 社
北 京

# 内 容 简 介

本书是《中国科学院研究生教学丛书》之一.

本书介绍当前在计算固体和结构力学中广泛研究和应用的四种数值计算方法:有限元法、加权余量法、边界元法和无网格法,并系统地论述了这四种方法的理论基础和相应的离散方法.特别对有限元法进行了详尽的介绍:有限元法和变分原理的关系,各种类型的有限单元,材料非线性和几何非线性问题的有限元解法,有限元代数方程的解法和动力问题的有限元解法.希望通过阅读本书,能使读者比较全面地了解有关计算固体力学的知识,使读者在遇到固体和结构力学问题时能找到相应的计算方法.

图书在版编目(CIP)数据

计算固体力学方法/吴永礼编著.—北京:科学出版社,2003
(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)
ISBN 7-03-011175-3

Ⅰ.计… Ⅱ.吴… Ⅲ.计算固体力学方法-研究生-教材
Ⅳ.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009080 号

责任编辑:鄢德平/责任校对:宋玲玲
责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 4 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2003 年 4 月第一次印刷 印张:10 7/8
印数:1—3000 字数:280 000

定价:25.00 元

# 《中国科学院研究生教学丛书》序

在 21 世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了．相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用．

21 世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量．世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争．而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量．我国要想在 21 世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务．

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多、科研条件好、科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生；在出成果的同时，为国家培养了数以万计的研究生．当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人

才．

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务．研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作．由于各种原因，目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展．为了改变这种情况，中国科学院组织了一批在科学前沿工作，同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材，并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版．希望通过数年努力，出版一套面向 21 世纪科技发展，体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书．本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性，同时也兼顾前沿性，使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识，也能被引导进入当代科学研究的前沿．这套研究生教学丛书，不仅适合于在校研究生学习使用，也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书．

“桃李不言，下自成蹊．”我相信，通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘，《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花，也将似润物春雨，滋养莘莘学子的心田，把他们引向科学的殿堂，不仅为科学院，也为全国研究生教育的发展作出重要贡献．

路甬祥

# 前　　言

计算固体(结构)力学是以电子计算机为主要工具，用数值方法解决各种固体和结构力学问题的学科。从 20 世纪 50 年代以来，它在固体力学的各分支学科和边缘学科中得到了很大的发展，无论是在科学研究还是工程技术应用中均得到广泛的应用，现在它已成为固体力学除理论研究和实验研究以外的第三种手段。随着计算机的迅速发展，计算固体力学解决问题的能力也将不断扩大，为了使计算固体力学能够解决不断增加的新的困难问题，需要有新的数值计算方法。这就要求从事固体和结构力学研究和开发的科技工作者，以及从事各种工程结构设计和计算的工程技术人员，能够较好地掌握固体和结构计算力学的基本原理和数值计算方法，以便一方面能有效地利用现有的计算成果和计算软件，另一方面能具有改进现有计算方法和扩充已有计算软件的能力，甚至能提出更好的计算方法和编制适合自己的计算软件。

为了适应上述需要，我们编写了这本书，希望能为固体力学研究、结构设计和结构强度计算的工程技术人员、高等院校的师生和研究生提供一本参考读物。本书全面地介绍了当前计算固体力学中用得较多的四种数值计算方法：有限元法、加权余量法、边界元法和无网格法。

本书可作为固体和结构力学和计算力学专业本科生和研究生的教材，也可作为相关专业研究人员，工程技术人员和教师的参考书。

本书由中国科学院研究生教材出版基金资助出版，作者在此表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

吴永礼

北京中关村中国科学院力学研究所

2002 年 12 月

# 目　　录

# 第一章　弹性力学和变分原理

弹性力学是固体力学的一个分支．它研究弹性体在外力或其他因素(如温度变化等)作用下所产生的应力、应变和位移，并为各种结构或其构件的强度、刚度和稳定性等的计算提供必要的理论基础和计算方法．本章将介绍弹性力学的基本方程及有关的变分原理．

## §1.1　弹性力学的基本方程和边界条件

弹性力学的研究对象是由实际工程材料抽象出来的弹性可变形物体，简称为弹性体．在建立这种理想模型时作了一些假设．引进这些假设在于突出矛盾的主要因素，而忽略一些次要因素．下面是弹性力学中的几个基本假设．

### 一、连续性假设

弹性体是一种密实的连续介质，并在整个变形过程中保持其连续性．微观物理学业已证明，任何物体都是由分子、原子组成的，是稀疏分布的、不连续的．但是，弹性理论和其他宏观物理学分支一样，不考虑实际工程材料的微观粒子结构，而采用宏观性能试验测定的材料统计物理性质(如质量、弹性常数、热膨胀系数等)来描述物体．连续性假设有两层含义：

1．把物体抽象成一个形状和位置与其相同的、连续而密实的空间几何体，物体的统计物理性质以及位移、应变、应力、能量等物理量都作为空间点位置的函数定义在这个几何体上，这种抽象的数学模型称为连续介质；

2．物体在整个变形过程中始终保持连续，原来相邻的两个任

意点,变形后仍是相邻点,不会出现开裂或重叠现象.用数学描述即为:定义在该连续介质上的物理性质和物理量,除了在某些孤立的点、线、面上可能奇异或间断外,在变形过程中始终保持为空间点位的连续函数.有了这个假设就可利用高等数学中的微积分知识来处理连续介质问题.

二、弹性假设

弹性体的变形与载荷在整个加卸载过程中存在一一对应的单值函数关系,且当载荷卸去后变形完全消失,弹性体恢复其初始的形状和尺寸.这里的单值函数关系可以是线性的或非线性的,取决于材料性质与变形大小.

当应力小于弹性极限时,大多数工程材料的应力应变关系是线性的,服从虎克定律,这些材料称为线性弹性材料或线弹性体.也有少数材料的弹性应力应变关系是非线性的,这会导致变形与载荷的非线性关系,称为材料的非线性效应.

在小变形(变形和物体尺寸相比可以忽略不计)的情况下,应变和位移导数间的关系是线性的.但对于大应变情况,必须考虑几何关系中的二阶或高阶非线性项,它也会导致变形与载荷的非线性关系,称为几何非线性效应.

这里讨论线弹性体的小变形情况.非线性问题将在后面介绍.为了简化,进一步引进如下辅助假设:

三、均匀性假设

物体在各点处的弹性性质都相同.实际上,金属材料都可看作均匀的.对于混凝土、玻璃钢等非均质材料,如果不细究其不同组分交界面处的局部应力,可以采用在足够大的材料试件上测得的弹性常数来简化成均匀材料.但是,有些新型材料,例功能梯度材料,是不能采用这个假设的.

四、自然状态假设

假设物体不受外力作用和温度的影响,其中便没有应力和变形,即不考虑由制造工艺引起的残余应力和装配应力.

在经典的弹性力学中还有各向同性假设,即材料是各向同性的.现在一些复合材料并不是各向同性的,所以就不必用各向同性这个假设了.

弹性力学的理论是建立在几何方程、平衡方程和本构方程三组方程的基础上的.这里给出弹性体的几何方程、平衡方程和本构方程[1~3].

(一) 几何方程—应变—位移关系

小变形情况下的应变位移关系为

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \tag{1.1.1}$$

式中 $\varepsilon_{ij}$, $u_i$ 分别为应力张量分量和位移向量分量.采用张量标记时,重复下标表示在该下标的取值范围内求和,三维情况下取值范围为 3,二维情况取值范围为 2.式中下标",i"表示对独立坐标 $x_i$ 取偏导数.

应变位移关系可以用矩阵形式表示为

$$\{\varepsilon\} = [\Delta]\{u\}, \tag{1.1.2}$$

式中$\{\varepsilon\}$,$\{u\}$为应变列阵和位移列阵:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T, \tag{1.1.3}$$

$$\{u\} = [u \quad v \quad w]^T \tag{1.1.4}$$

式(1.1.2)中$[\Delta]$为微分算子.在三维直角坐标情况下可表达为

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \tag{1.1.5}$$

式中的 $\gamma_{xy}$, $\gamma_{yz}$, $\gamma_{xz}$ 为工程切应变,它们与张量切应变 $\varepsilon_{xy}$, $\varepsilon_{yz}$, $\varepsilon_{xz}$

的关系为

$$\gamma_{xy}=2\varepsilon_{xy},\quad \gamma_{yz}=2\varepsilon_{yz},\quad \gamma_{xz}=2\varepsilon_{xz}.$$

（二）平衡方程

根据微元体的平衡条件可以得出平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0, \tag{1.1.6}$$

式中 $\sigma_{ij}$, $f_i$ 为应力张量分量和体力向量分量.

用矩阵形式表示可写为

$$[\Delta]^T\{\sigma\}+\{f\}=0, \tag{1.1.7}$$

式中$[\Delta]^T$为公式(1.1.5)的转置矩阵，$\{\sigma\}$为应力列阵，$\{f\}$为体力列阵.

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T, \tag{1.1.8}$$

$$\{f\}=[f_x \quad f_y \quad f_z]^T \tag{1.1.9}$$

此外,还有应变协调方程,它是从应变位移关系中消去位移而得出的方程,这里列出如下：

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}-\varepsilon_{ik,jl}-\varepsilon_{jl,ik}=0, \tag{1.1.10}$$

（三）本构方程——材料的应力-应变关系

对于各向异性的材料,本构方程为

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{1.1.11}$$

式中 $D_{ijkl}$为材料本构张量分量.

本构方程可用矩阵形式表示

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}, \tag{1.1.12}$$

材料的本构矩阵[D]的一般形式为

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{1.1.13}$$

用马克斯威尔-贝蒂互等定理可以证明，本构矩阵是对称的.

因此,一般情况下各向异性材料有21个材料常数.

有的材料对物体的某些轴具有对称性,这些轴称为对称轴,而且对称轴往往是正交的,这时材料是正交各向异性材料.如果将坐标取在对称轴上,则本构矩阵(1.1.13)可简化为

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}, \tag{1.1.14}$$

这时材料常数为9个.由于材料矩阵是对称的,所以在式(1.1.14)中省略了下三角部分,以下也采用这种省略写法.

对于常见的各向同性材料,材料本构矩阵可化为

$$[D]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \tag{1.1.15}$$

即各向同性材料独立的材料常数只有两个:弹性模量 $E$ 和泊松比 $\nu$.此外,在弹性力学中还常用其他材料常数,如剪切模量 $G$、体积模量 $K$、拉梅(Lamé)常数 $\lambda$ 和 $\mu$.它们与弹性模量和泊松比之间的关系为

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad K=\frac{E}{3(1-2\nu)},\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\tag{1.1.16a}$$

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\ \mu=G.\tag{1.1.16b}$$

在材料为各向同性时，式(1.1.11)中的 $D_{ijkl}$可以写成

$$D_{ijkl}=\frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}),$$

式中 $\delta_{ij}$为克罗内克尔符号，$i=j$时 $\delta_{ij}=1$，$i\neq j$时 $\delta_{ij}=0$.

在轴对称问题中，弹性矩阵为

$$[D]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\times\begin{bmatrix}1 & \nu/(1-\nu) & 0 & \nu/(1-\nu)\\ & 1 & 0 & \nu/(1-\nu)\\ & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & 0\\ & & & 1\end{bmatrix},\tag{1.1.17}$$

在平面问题中弹性矩阵为

$$[D]=\frac{E_0}{(1-\nu_0^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu_0 & 0\\ & 1 & 0\\ & & (1-\nu_0)/2\end{bmatrix},\tag{1.1.18}$$

对平面应力，$E_0=E$，$\nu_0=\nu$；对平面应变，$E_0=E/(1-\nu^2)$，$\nu_0=\nu/(1-\nu)$.

除了基本方程以外，还有边界条件.边界条件有位移边界条件和力的边界条件两种：

1. 在力边界 $S_\sigma$ 上相应的边界条件为

$$\sigma_{ij}n_j\equiv p_i=\bar{p}_i,\tag{1.1.19}$$

式中 $\bar{p}_i$ 为已知的外部作用力，$n_j$ 为边界上外法线的方向余弦.

2. 在位移边界 $S_u$ 上相应的边界条件为

$$u_i=\bar{u}_i,\tag{1.1.20}$$

式中 $\bar{u}_i$ 为给定的位移.

$S = S_u + S_\sigma$, S 为弹性体的全部边界.

## §1.2 弹性力学的变分原理

前面已经介绍了弹性力学的基本方程和相应的边界条件,也就是把弹性力学问题归结为在给定边界条件下求解这组偏微分方程的边值问题.自从建立弹性力学以来,人们用各种偏微分方程的解法求得了许多弹性力学问题的解析解.然而,随着工业技术的发展,工程结构的形状也越来越复杂,很多问题得不到解析解,因而需求助于数值解,而变分原理则是许多数值解的基础.因此,下面介绍各种变分原理.弹性力学问题,在数学上就是空间连续场的确定问题.变分法就是把它归结为一个泛函变分的极值问题或驻值问题.

### 1.2.1 应变能和应变余能

对于一个弹性体,它的应变能 $U_\varepsilon$ 和应变余能 $U_\sigma$ 定义为

$$U_\varepsilon = \int_V W_\varepsilon \, dV, \quad U_\sigma = \int_V W_\sigma \, dV, \tag{1.2.1}$$

式中 $W_\varepsilon$ 称为应变能密度, $W_\sigma$ 是应变余能密度,它们分别可表示为

$$W_\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \qquad W_\sigma = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}, \tag{1.2.2}$$

由此可见

$$\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \tag{1.2.3}$$

式中 $C_{ijkl} = D^{-1}_{ijkl}$,对于弹性材料

$$W_\varepsilon = W_\sigma = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2, \tag{1.2.4}$$

$$W_\varepsilon + W_\sigma = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{1.2.5}$$

对于线弹性体,应变能密度和应变余能密度是相等的.对于非线性

材料二者是不等的.式(1.2.5)表示 $W_\varepsilon$ 和 $W_\sigma$ 相对于全功 $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$而言是互余关系.

$W_\varepsilon$ 和 $W_\sigma$ 分别可以表示为应变和应力的二次函数：

$$W_\varepsilon = D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/2, \quad W_\sigma = C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}/2. \tag{1.2.6}$$

### 1.2.2 虚位移原理和最小势能原理

凡是物体几何约束(例如支承条件)所允许的位移就称为可能位移，取其任意微小的变化量就是虚位移 $\delta u_i$，也就是几何上可能位移的变分.根据能量守恒定律,外力在虚位移上所做的功(虚功)必等于物体内部应力在虚应变上所做的功,这就是虚功原理或虚位移原理：

$$\int_V f_i\delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V, \tag{1.2.7}$$

式中左边第一项是体积力在虚位移上所做的功，第二项则是边界力在虚位移上所做的功,等号右边是应力在虚应变上所做的功,也即应变能,其中虚应变由下式求得

$$\delta\varepsilon_{ij} = (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})/2, \tag{1.2.8}$$

式(1.2.7)的右端可作如下变换：

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V &= \int_V \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\delta u_{i,j} + \sigma_{ji}\delta u_{j,i})\mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V \\ &= \int_V (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j}\mathrm{d}V - \int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i \mathrm{d}V \\ &= \int_{S_\sigma} \sigma_{ij}\delta u_i n_j \mathrm{d}S - \int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i \mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

上式化简过程中用了体积分化面积分的公式,即散度定理,并注意到

$$\int_{S_u} \sigma_{ij}n_j\delta u_i \mathrm{d}S = \int_{S_u} p_i\delta u_i \mathrm{d}S = 0,$$

所以面积分公式只在已知边界面力上求积分.

将式(1.2.9)代回式(1.2.7)可得到

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + f_i)\delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)\delta u_i \mathrm{d}S = 0, \tag{1.2.10}$$

需使上式对一切可能的虚位移 $\delta u_i$ 都成立，$\sigma_{ij}$必须满足

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{1.2.11}$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \qquad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}, \tag{1.2.12}$$

所以 $\sigma_{ij}$是与外载相平衡的静力可能的应力场.对问题的精确解来说,满足虚功原理和满足平衡方程与力边界条件是等价的.如果仅在积分意义下满足虚功原理(1.2.7),而不能逐点满足平衡方程(1.2.11)和力边界条件(1.2.12)，则为近似解.

用虚位移原理直接求近似解的步骤是：

(1)假设一个满足位移边界条件且连续的可能位移状态 $u_i^k$.在 $u_i^k$ 的表达式中含有若干可调整的待定位移参数作为基本未知量；

(2)把 $u_i^k$ 代入几何方程和本构关系，求得用位移参数表示的变形可能应力 $\sigma_{ij}^k$的表达式；

(3)把 $u_i^k$ 对各位移参数求变分得到相应的虚位移 $\delta u_i$ 和虚应变 $\delta\varepsilon_{ij}$；

(4)把 $\sigma_{ij}^k$, $\delta u_i$ 和 $\delta\varepsilon_{ij}$代入虚位移原理式(1.2.10),按各位移参数的变分并项,令各位移参数变分的系数分别等于零,得到一组虚功方程,其实质是得到用位移参数表示的近似平衡方程；

(5)由虚功方程解出待定位移参数,代回 $u_i^k$ 和 $\sigma_{ij}^k$的表达式就得到所求问题的近似解,解的精度与第(1)步中所选的 $u_i^k$ 表达式有关.

在上面的虚位移原理中,对材料的本构关系没有作假设,所以它不受材料行为的限制.

弹性系统的总势能是应变能 $V_\varepsilon$ 和外力势之和，即

$$\Pi_p = U_\varepsilon + V_f, \tag{1.2.13}$$

式中 $U_\varepsilon$ 在公式(1.2.1)中已有定义.外力势 $V_f$ 为

$$V_f = -\int_V f_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S \tag{1.2.14}$$

因此总势能为

$$\Pi_p(u_i) = \int_V W_\varepsilon \mathrm{d}V - \int_V f_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S \tag{1.2.15}$$

式中位移是泛函变量，对上式取位移的一次变分可得

$$\delta\Pi_p = \int_V (\partial W_\varepsilon/\partial \varepsilon_{ij})\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V - \int_V f_i\delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i\delta u_i \mathrm{d}S$$

根据虚位移原理的公式(1.2.7)可得到

$$\delta\Pi_p = 0. \tag{1.2.16}$$

现在来分析总势能的二阶变分，根据式(1.2.4)，系统在发生虚位移后的应变能密度为

$$W'_\varepsilon = (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})/2, \tag{1.2.17}$$

式中 $\delta\sigma_{ij}$和 $\delta\varepsilon_{ij}$分别为发生虚位移时产生的虚应力和虚应变.展开式(1.2.17)可得

$$W'_\varepsilon = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2 + \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}/2 = W_\varepsilon + \delta W_\varepsilon + W(\delta\varepsilon_{ij}), \tag{1.2.18}$$

式中

$$W(\delta\varepsilon_{ij}) = \delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}/2 = D_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}/2, \tag{1.2.19}$$

虚位移后的总势能 $\Pi'_p$ 可以写为

$$\begin{aligned}
\Pi'_p &= \int_V W'_\varepsilon \mathrm{d}V - \int_V f_i(u_i + \delta u_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i(u_i + \delta u_i)\mathrm{d}S \\
&= \int_V W_\varepsilon \mathrm{d}V - \int_V f_i u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S + \int_V \delta W_\varepsilon \mathrm{d}V \\
&\quad - \int_V f_i\delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i \mathrm{d}S + \int_V W(\delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V \\
&= \Pi_p + \delta\Pi_p + \delta^2\Pi_p,
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

式中

$$\delta^2\Pi_p = \int_V W(\delta\varepsilon_{ij})dV. \qquad (1.2.21)$$

由(1.2.19)可见，$W(\delta\varepsilon_{ij})$是应变分量的二次式的正定函数,因此

$$\delta^2\Pi_p \geqslant 0, \qquad (1.2.22)$$

从而有

$$\Pi'_p \geqslant \Pi_p. \qquad (1.2.23)$$

公式(1.1.16)和(1.2.23)表明,系统的总势能不但是极值($\delta\Pi_p=0$)，而且是最小值.这就证明了最小势能原理:在满足几何约束的各类可能位移状态中,以适合平衡方程和外力作用的实际位移所对应的总势能为最小.

### 1.2.3 虚应力原理和最小余能原理

虚应力原理或余虚功原理的叙述是:位移边界处给定位移在虚反力上所做的余虚功等于应变在虚应力上的余虚功.公式表示为

$$\int_{S_u} \bar{u}_i\delta p_i dS = \int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} dV. \qquad (1.2.24)$$

所谓虚应力 $\delta\sigma_{ij}$是满足平衡方程和力边界条件的应力的变分(即微小的变化).显然,在力边界上 $\delta\bar{p}_i=0$，但位移边界处约束反力未定,$\delta p_i\neq 0$ .

系统的总余能 $\Pi_c$ 为应变余能 $U_\sigma$ 与余势 $V_c$ 之和:

$$\Pi_c = U_\sigma + V_c, \qquad (1.2.25)$$

式中 $V_c$ 的表达式为

$$V_c = -\int_{S_u} \bar{u}_i p_i dS. \qquad (1.2.26)$$

根据公式(1.2.1)和(1.2.6)应变余能 $U_\sigma$ 为

$$U_\sigma = (1/2)\int_V C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} dV = \int_V W_\sigma dV, \qquad (1.2.27)$$

由(1.2.25)可得系统的总余能为

$$\Pi_c(\sigma_{ij}) = (1/2)\int_V C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,dV - \int_{S_u} \bar{u}_i p_i\,dS, \quad (1.2.28)$$

式中应力是泛函变量，总余能的变分为

$$\delta\Pi_c = \delta U_\sigma + \delta V_c = \int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\,dV - \int_{S_u} \bar{u}_i\delta p_i\,dS, \quad (1.2.29)$$

根据余虚功原理的公式(1.2.24) 可得到

$$\delta\Pi_c = 0. \quad (1.2.30)$$

由式(1.2.29)和(1.2.30)可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_c &= \int_V (\varepsilon_{ij} - u_{i,j})\delta\sigma_{ij}\,dV + \int_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}\,dV - \int_{S_u} \bar{u}_i\delta p_i\,dS \\ &= \int_V (\varepsilon_{ij} - u_{i,j})\delta\sigma_{ij}\,dV + \int_V (u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}\,dV \\ &\quad - \int_V u_i(\delta\sigma_{ij})_{,j}\,dV - \int_{S_u} \bar{u}_i\delta p_i\,dS \\ &= \int_V \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\,dV \\ &\quad + \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta p_i\,dS = 0, \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

由式(1.2.31)可得

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \qquad \text{在域 } V \text{ 内},$$

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{在 } S_u \text{ 上}.$$

这就是说,余能的一阶变分等于零相当于弹性力学中的应变位移关系和位移边界条件.

用前面最小势能原理相同的办法可以证明总余能的二阶变分 $\delta^2\Pi_c \geqslant 0$,因此最小余能原理可以叙述为:在一切静力可能状态中，真实状态的总余能最小.在一些著作中(例如文献[1]、[3])用余能原理导出应变协调方程，推导过程要复杂一些.实际上,这里用最小余能原理导出了应变位移关系,由这些关系就能导出应变协调方程.在用假设应力的最小余能原理来求解位移和应变时,

应变位移关系或应变协调方程是近似满足的.所以,后面将要介绍的从最小余能原理出发的有限元称为非协调元.

在数学上,通常把问题用微分方程表示称为强形式(strong form),而把问题用泛函的极值来表示时称为弱形式(weak form).泛函的变分所导得的微分方程称为欧拉(Euler)方程,得到的边界条件称为自然边界条件.

### 1.2.4 Hellinger-Reissner 变分原理

上节分别介绍了最小势能原理和最小余能原理.在应用最小势能原理求解问题时,原理本身严格满足了平衡条件,在选取位移函数上,可作一些简化假设,因而可求得问题的近似解.在应用最小余能原理求解问题时,原理已严格体现了变形连续条件,在选取应力函数时,可作一些简化假设,从而求得问题的近似解.这两条原理在求解时分别以位移和应力作为变量,因此又称为一类变量变分原理,而且变量位移和应力都是有约束条件的.对最小势能原理,其约束条件为域内的几何方程与位移边界条件;对最小余能原理,其约束条件为域内的平衡方程和力的边界条件.上述一类变量变分原理也称为泛函的条件极值原理.下面将要讨论的广义变分原理,就是把一类变量变分原理的条件极值化为无条件的驻值.在力学中有三类变量,即位移、应力和应变.因此,这就产生了两类变量广义变分原理和三类变量广义变分原理.

两类变量广义变分原理最早是由 Hellinger 于 1914 年提出的,后来由 Reissner[4] 于 1950 年加以完善.因此,通常称为 Hellinger-Reissner 变分原理,亦称混合变分原理.两类变量变分原理可以通过 Lagrange 乘子法将最小余能原理中的两个变分约束关系(即平衡方程和外力已知条件)解除而建立起来.

最小余能原理的变分约束条件是:

(1)平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内}; \tag{a}$$

(2)外力边界条件

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \qquad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}. \tag{b}$$

现在引用两个待定的拉格朗乘子 $\lambda_i$ 和 $\eta_i$,便可解除变分的约束条件(a)和(b),这样最小余能原理的泛函式(1.2.28)可写为

$$\Pi_{c2} = \int_V W_\sigma \mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i)\lambda_i \mathrm{d}V - \int_{S_u} \bar{u}_i p_i \mathrm{d}S - \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)\eta_i \mathrm{d}S, \tag{1.2.32}$$

现在将此式对 $\sigma_{ij}$, $\lambda_i$, $\eta_i$ 进行变分，当 $\Pi_{c2}$ 达到驻值时，有 $\delta\Pi_{c2} = 0$，即

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{c2} = &\int_V \frac{\partial W_\sigma}{\partial \sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i)\delta\lambda_i \mathrm{d}V + \int_V \lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\mathrm{d}V \\ &- \int_{S_\sigma} \bar{u}_i\delta p_i \mathrm{d}S - \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)\delta\eta_i \mathrm{d}S \\ &- \int_{S_\sigma} \eta_i\delta(\sigma_{ij}n_j)\mathrm{d}S = 0.\end{aligned} \tag{1.2.33}$$

利用格林公式(散度定理)

$$\begin{aligned}\int_V (\lambda_i\delta\sigma_{ij})_{,j}\mathrm{d}V &= \int_V \lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_V \lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\mathrm{d}V \\ &= \int_{S_u} \lambda_i\delta(\sigma_{ij}n_j)\mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} \lambda_i\delta(\sigma_{ij}n_j)\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

将上式代入式(1.2.33)后可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{c2} = &\int_V (\partial W_\sigma/\partial \sigma_{ij} - \lambda_{i,j})\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i)\delta\lambda_i \mathrm{d}V \\ &+ \int_{S_u} (\lambda_i - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}S + \int_{S_\sigma} (\lambda_i - \eta_i)\delta\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}S \\ &- \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)\delta\eta_i \mathrm{d}S = 0.\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

因为变分 $\delta\sigma_{ij}$,$\delta\lambda_i$,在域内，$\delta\eta_i$ 在 $S_\sigma$ 上都是独立的，因此有

$$\partial W_\sigma/\partial \sigma_{ij} = (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i})/2 \qquad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{a}$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{b}$$

$$\lambda_i - \eta_i = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{c}$$

$$\lambda_i = \bar{u}_i \qquad \text{在 } S_u \text{ 上}, \tag{d}$$

$$\sigma_{ij}n_j = p_i = \bar{p}_i \qquad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}. \tag{e}$$

从方程(c)、(d)可以看出，$\eta_i$ 与 $\lambda_i$ 相同，就是位移，将方程(1.2.32)中的拉格朗日乘子改为位移就得到两类变量的泛函：

$$\Pi_{c2}(u_i,\sigma_{ij}) = \int_V W_\sigma \mathrm{d}V + \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i)u_i \mathrm{d}V - \int_{S_u} \bar{u}_i p_i \mathrm{d}S - \int_{S_\sigma} (\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i)u_i \mathrm{d}S. \tag{1.2.35}$$

它是一个以位移和应力为变量的两类变量的泛函，它的变分可以导出四个方程：

$$\partial W_\sigma / \partial \sigma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \qquad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{1.2.36a}$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{1.2.36b}$$

$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{在 } S_u \text{ 上}, \tag{1.2.36c}$$

$$p_i = \bar{p}_i \qquad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}. \tag{1.2.36d}$$

方程(1.2.36b)相当于平衡方程，方程(1.2.36c)相当 $S_u$ 上的位移边界条件，方程(1.2.36d)相当 $S_\sigma$ 上力的边界条件.而方程(1.2.36a)可以有两种力学解释:第一种解释是把方程的左边看作应变，也即已经满足了应力应变关系，则方程(1.2.36a)就是几何方程，这是原来的最小余能理的解释；另一种解释是把方程的右边看作应变，也即已经满足应变位移关系，那么此方程就是应力应变关系.

利用格林公式对式(1.2.35)中的第二项的第一部分进行变换，

$$\int_V \sigma_{ij,j}u_i \mathrm{d}V = \int_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j} \mathrm{d}V - \int_V \sigma_{ij}u_{i,j} \mathrm{d}V$$

$$= \int_S \sigma_{ij}n_j u_i \mathrm{d}S - \int_V [(u_{i,j} + u_{j,i})/2]\sigma_{ij} \mathrm{d}V,$$

将上式代入方程式(1.3.35)，把方程式(1.3.35)冠以负号便得到与 $-\Pi_{c2}$ 等价的泛函

$$\Pi_{p2}(u_i, \sigma_{ij}) = \int_V [-W_\sigma - f_i u_i + \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})/2] dV$$
$$- \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i dS. \tag{1.2.37a}$$

现在将此式对 $u_i, \sigma_{ij}$进行变分,当 $\Pi_{p2}$ 达到驻值时，有

$$\delta\Pi_{p2} = 0. \tag{1.2.38}$$

由此可以得到与前面相同的四组方程(1.2.36),方程(1.2.37a)中的 $W_\sigma$ 用方程式(1.2.8)代入就是原来 Reissner 提出的形式：

$$\Pi_{HR}(u_i, \sigma_{ij}) = \int_V [-C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}/2 - f_i u_i + \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i})/2] dV$$
$$- \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) p_i dS, \tag{1.2.37b}$$

很容易证明 $\Pi_{p2}$ 和 $\Pi_{c2}$ 存在着下列关系：

$$\Pi_{p2} + \Pi_{c2} = 0. \tag{1.2.39}$$

从力学上看，$\Pi_{p2}$ 是系统的总势能的一种推广形式,可称为两类变量的广义势能；$\Pi_{c2}$ 是系统总余能的一种推广的算式,可称为两类变量的广义余能.

### 1.2.5　胡海昌-鹫津久一郎变分原理

固体力学中有三类变量 $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$，有了两类变量变分原理以后，人们很自然地就想到了三类变量变分原理.三类变量的广义变分原理是由我国学者胡海昌[5]和在美国麻省理工学院的日本学者鹫津久一郎[6]提出的.

最小势能原理的变分约束条件是

$$(u_{i,j} + u_{j,i})/2 = \varepsilon_{ij} \qquad \text{在 } V \text{ 内},$$
$$u_i = \bar{u}_i \qquad \text{在 } S_u \text{ 上}.$$

现在引入两个待定的拉格朗日乘子 $\lambda_{ij}$和 $\eta_i$，把变分约束条件式吸收到势能表达式(1.2.17)中：

$$\Pi_{p3} = \int_V \{ W_\varepsilon + [(u_{i,j} + u_{j,i})/2 - \varepsilon_{ij}] \lambda_{ij} - f_i u_i \} dV$$

$$-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i u_i \mathrm{d}S+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\eta_i \mathrm{d}S \tag{1.2.40}$$

把 $u_i$，$\varepsilon_{ij}$，$\lambda_{ij}$，$\eta_i$ 作为独立变量，$\Pi_{p3}$ 的变分驻值条件给出

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{p3}=&\int_V\left\{\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+[(u_{i,j}+u_{j,i})/2-\varepsilon_{ij}]\delta\lambda_{ij}\right.\\&\left.+[(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})/2-\delta\varepsilon_{ij}]\lambda_{ij}\right\}\mathrm{d}V-\int_V f_i\delta u_i\mathrm{d}V\\&-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S+\int_{S_u}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\eta_i+\eta_i\delta u_i]\mathrm{d}S=0,\end{aligned} \tag{1.2.41}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\int_V\frac{1}{2}\lambda_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\mathrm{d}V=\int_V\lambda_{ij}\delta u_{i,j}\mathrm{d}V\\&=\int_V(\lambda_{ij}\delta u_i)_{,j}\mathrm{d}V-\int_V\lambda_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V\\&=\int_{S_u+S_\sigma}\lambda_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}S-\int_V\lambda_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

式(1.2.41)可化为

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{p3}=&\int_V[\partial W_\varepsilon/\partial\varepsilon_{ij}-\lambda_{ij}]\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V+\int_V[(u_{i,j}+u_{j,i})/2\\&-\varepsilon_{ij}]\delta\lambda_{ij}\mathrm{d}V-\int_V(\lambda_{ij,j}+f_i)\delta u_i\mathrm{d}V\\&+\int_{S_\sigma}(\lambda_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i\mathrm{d}S\\&+\int_{S_u}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\eta_i+(\eta_i+\lambda_{ij}n_j)\delta u_i]\mathrm{d}S=0.\end{aligned} \tag{1.2.42}$$

由于 $\delta\varepsilon_{ij}$，$\delta\lambda_{ij}$，$\delta u_i$ 在 V 内，$\delta u_i$ 在 $S_\sigma$ 上，$\delta\lambda_{ij}$和 $\delta u_i$ 在 $S_u$ 上都是独立的，所以得出 6 个自然条件：

$$\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial\varepsilon_{ij}}-\lambda_{ij}=0,\ \varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2,\ \lambda_{ij,j}+f_i=0,\quad \text{在 V 内；}$$

$$\lambda_{ij}n_j-\bar{p}_i=0,\quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上；}$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0,\ \eta_i + \lambda_{ij} n_j = 0,\quad \text{在 } S_u \text{ 上}.$$

由此可见，两个拉格朗日乘子为

$$\lambda_{ij} = \sigma_{ij},\quad \eta_i = -\sigma_{ij} n_j.$$

把拉格朗日乘子代回到前面的 $\Pi_{p3}$ 中，就得到以 $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 为变量的无条件的广义变分原理的泛函，

$$\begin{aligned}
&\Pi_{p3}(u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = \Pi_{HW}(u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) \\
&= \int_V \{ W_\varepsilon + \sigma_{ij}[(u_{i,j} + u_{j,i})/2 - \varepsilon_{ij}] - f_i u_i \} dV \\
&\quad - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - \bar{u}_i) dS
\end{aligned} \tag{1.2.43}$$

将上式进行变分，当达到驻值时,即

$$\delta \Pi_{p3} = 0 \tag{1.2.44a}$$

由此可得

$$\partial W_\varepsilon / \partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij},\quad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{1.2.44b}$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0,\quad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{1.2.44c}$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,\quad \text{在 } V \text{ 内}, \tag{1.2.44d}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i,\quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}, \tag{1.2.44e}$$

$$u_i = \bar{u}_i,\quad \text{在 } S_u \text{ 上}. \tag{1.2.44f}$$

这就是弹性力学的所有方程和边界条件.

采用两类变量变分原理中相同的办法,把方程(1.2.43)冠以负号,再对第二项的体积分进行变换,可得到与 $-\Pi_{p3}$ 等价的泛函

$$\begin{aligned}
\Pi_{c3}(u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) &= \int_V [\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - W_\varepsilon + (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i] dV \\
&\quad - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS - \int_{S_\sigma} (p_i - \bar{p}_i) u_i dS,
\end{aligned} \tag{1.2.45}$$

将上式进行变分，当 $\Pi_{c3}$ 达到驻值时，有 $\delta\Pi_{c3} = 0$，即

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{c3} &= \int_V \Big\{ \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} - \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} \\
&\quad + (\sigma_{ij,j} + f_i)\delta u_i + u_i \delta\sigma_{ij,j} \Big\} dV
\end{aligned}$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S-\int_{S_\sigma}[(p_i-\bar{p}_i)\delta u_i + u_i\delta p_i]\mathrm{d}S=0,$$

注意到

$$\int_V u_i\delta\sigma_{ij,j}\mathrm{d}V=\int_{S_\sigma+S_u}u_i\delta\sigma_{ij,j}n_j\mathrm{d}S-\int_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V,$$

由此可得

$$\delta\Pi_{c3}=\int_V\{(\sigma_{ij}-\partial W_\varepsilon/\partial\varepsilon_{ij})\delta\varepsilon_{ij}+[\varepsilon_{ij}-(u_{i,j}+u_{j,i})/2]\delta\sigma_{ij} + (\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i\}\mathrm{d}V+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}S - \int_{S_\sigma}(p_i-\bar{p}_i)\delta u_i\mathrm{d}S=0$$

由此也可得到弹性力学的三组方程和位移及力的边界条件，即方程(1.2.44).

用分部积分的办法,也可以证明

$$\Pi_{p3}+\Pi_{c3}=0. \tag{1.2.46}$$

钱伟长[7]把上面所述的两类变量变分原理称为不完全的广义变分原理,因为它们均有约束方程,把三类变量变分原理称为完全的变分原理.此外,他还给出了其他的各级不完全广义变分原理.胡海昌在[8]中比较全面地介绍了弹性力学变分原理,并给出了许多应用实例.

### 1.2.6 参数变分原理

前面用拉格朗日乘子法从最小余能原理推导 Hellinger-Reissner 两变量变分原理的泛函,从最小势能原理推导胡-鹫的三变量变分原理的泛函.但是,用拉格朗日乘子法却不能从最小势能原理的泛函直接得到两变量原理的泛函,也不能从最小余能原理的泛函直接导出三变量原理的泛函.为了解决这个矛盾,龙驭球[9],Liu S和 Jiang Z[10],荣廷玉[11～13],Felippa[14]先后提出了参数变分