

# 数字信号处理的 MATLAB 实现

万永革 编著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书介绍了数字信号处理的基本概念、理论及其 MATLAB 实现,并给出了具体应用实例。全书共分为 10 章。由于数字信号处理主要是针对振动信号的处理,因此第 1 章介绍振动的基础知识;第 2 章介绍基本信号及其运算、信号采样,为后续信号处理学习打下基础;第 3 章介绍 Fourier 变换及其性质;第 4 章介绍系统的概念;第 5 章介绍模拟滤波器设计及其应用;第 6 章和第 7 章分别介绍 IIR 滤波器和 FIR 滤波器设计及其应用;第 8 章介绍参数化建模;第 9 章介绍随机信号分析;第 10 章针对数字信号处理的几个前沿问题进行简单介绍,以扩展读者的知识面。

本书结合大量实例和程序阐述如何将数字信号处理知识用于实际问题中。本书配有光盘,内含本书的所有例题的应用程序及所用数据,将这些程序作简单修改就可用于相应的实际问题中。因此适合于数理基础比较薄弱、着重动手能力的读者学习信号处理技术,也可作为本科生、研究生和工程技术人员学习数字信号处理的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理的 MATLAB 实现/万永革编著. —北京:科学出版社,2007  
ISBN 978-7-03-018128-2

I. 数… II. 万… III. 数字信号—信号处理—计算机辅助计算—软件包, MATLAB IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 120103 号

责任编辑:罗 吉 杨 然 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:钱玉芬 / 封面设计:王 浩

**科 学 出 版 社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2007 年 4 月 第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2007 年 4 月 第一次印刷 印张: 20 3/4

印数: 1—2 500 字数: 411 000

定价: 45.00 元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

## 序

数字信号处理是 20 世纪 60 年代中期随着数字电子计算机和大规模集成电路技术的不断发展,而迅速发展起来的一门新兴学科。近年来,数字信号处理的理论、算法及实现手段获得了飞速的发展,它已广泛应用于雷达、通信、语音、图像、地震、地质勘探、航空航天、生物医学工程等各个领域,并已成为这些领域的一种重要的现代化工具。

目前关于数字信号处理已有许多优秀的著作,但是“传统”的数字信号处理著作大多专注于算法的理论及其推导,较少涉及实现方法及其应用,目前结合具体软件作数字信号处理,并以此帮助读者澄清基本概念和理解理论进而掌握处理技术的著作还很少。近年来功能强大、交互性好的 MATLAB 软件的引入使得通过实践掌握数字信号处理技术的学习方式变得非常容易。

《数字信号处理的 MATLAB 实现》是作者结合数字信号处理理论和 MATLAB 操作技术提供给读者的一本实践性很强的工具书。这本书在介绍数字信号处理基本原理的同时,非常重视信号处理的实现问题,对所有例题都给出了具体实现的 MATLAB 程序,读者通过上机实践可以形象生动地加深对理论问题的理解。把理论与仿真实验结合在一起,既突出了理论的物理概念,又使读者能在实践中掌握数字信号处理的基本概念、基本方法和基本应用,达到学以致用目的,起到事半功倍的效果。

作者结合他在地球物理领域的研究,编制了采用数字信号处理技术处理地球物理信号的大量实例,如地震波与地形变数据的频谱分析与滤波、地球自由振荡振型的提取、地面运动的恢复与地震仪仿真、运用小波方法分析地震活动的周期性等。读者只要对这些实例做适当修改即可应用于解决其感兴趣的问题。因此,这本书是从事地球物理信号分析与台站观测人员的一本非常实用的参考书。

当然,由于这本书侧重于数字信号处理技术的应用,相应地淡化了数字信号处理理论。不过,对于希望更多地了解信号处理理论的读者可以通过参阅目前已出版的浩若瀚海的有关数字信号处理理论的参考书予以弥补,而对于注重信号处理技术应用的读者,这本书不失为一本很有裨益的参考书。我衷心地祝贺《数字信号处理的 MATLAB 实现》出版并很高兴地将它推荐给读者,希望它能成为读者学习和应用数字信号处理技术的一件得心应手的工具。

陈运泰

中国科学院院士、发展中国家科学院院士

# 前 言

数字信号处理课程涉及较深的数学功底,其内容以 Fourier 变换、Laplace 变换、 $z$  变换、复变函数的环路积分为数学基础,这些内容对数学基础比较薄弱的读者来说掌握起来有一定困难。为了使读者既能掌握足够的数字信号处理技能,又不致陷入繁琐的数学推导之中,真正体现以“必须够用为度”的原则,作者认为以大量的数字信号处理实例训练他们数字信号处理的技能是一种可行的思路。这样就避免了“学院式”的理论推导,重点放在数字信号处理方法和技能的掌握。这本小册子采用 MATLAB 作为我们的数字信号处理实验室对信号处理技能进行训练。之所以选择 MATLAB 作为我们的数字信号处理实验室,是因为 MATLAB 是一种面向科学和工程计算的高级语言,现在已成为国际公认的最优秀的科技应用软件,在世界范围内广为流传和使用。该软件的特点是:强大的计算功能、计算结果和编程可视化一体及较高的编程效率。这是该语言无与伦比之处。MATLAB 汲取了当今信号处理的小波变换、神经网络等一系列最新研究成果,已经成为从事科学研究和工程设计不可缺少的工具软件。今天在欧美高等院校内,MATLAB 已成为大学生、研究生和教师必备的基本技能,广泛应用于科学研究、工程计算、教学等方面。

本书力求达到的特点是:理论知识以必须够用为度,力求使读者从实验中总结信号处理的基本概念和规律、尽量避免繁琐的数学推导。知识讲授和实习演练紧密衔接。例题中给出的 MATLAB 原码粘贴到 MATLAB 命令窗口,即可运行并看到结果,因此适用于多媒体教学。另外,课后备有作业题以供读者上机实习之用。

作者一直担心,这样一本数字信号处理讲稿的付印是否有些为时过早。确实目前运用 MATLAB 处理数字信号的教学研究正方兴未艾,然而为大多数人所接受的传授知识的方式和实例的形成通常需要较长时间的“沉淀”。实际上,对已有的运用 MATLAB 进行数字信号处理的实例加以总结和系统化也是一项重要的、艰苦的、富有创造性的工作。以作者的学识水平和能力要胜任这项工作几乎是不可能的。但面对目前技术应用类数字信号处理教材的奇缺使得作者不得不冒着风险将这份讲稿呈献给读者。由于本人水平有限,加之时间仓促,“突击”出来的这份教材肯定存在很多问题,殷切希望同行和广大读者提出宝贵意见。

欲掌握数字信号处理技术,应该与实际工作结合,这正是职业技术教育的最终目标。因此本书采用了作者所熟悉的地震学和地球物理学中的实例来展示信号处理的技巧和效果。不过这些例子很容易移植到其他学科中去。

本书的编写得到防灾科技学院防灾技术系孟晓春主任的鼓励和支持。全国地震台台长及岗位培训班的学员们给予了大力支持,本书很多实例原型来自于这些培训班的实训,武晔和韩秋莹在文字编辑上提供了帮助,谨向他们表示衷心感谢。虽然本书所述及的数字信号处理技术为较成熟的技术,然而,本书所设计的程序是作者费了一定心血编出来的,如用到这些程序,请注明引自本书。

感谢陈运泰院士在百忙之中审阅本书原稿并作序。本书的出版得到国家重点基础研究发展规划项目(2001CB711005)和国家自然科学基金(40374012)的资助。

万永革

2006年6月25日

# 目 录

序

前言

|                                  |       |
|----------------------------------|-------|
| 第 1 章 振动的基础知识 .....              | (1)   |
| 1.1 振动概述 .....                   | (1)   |
| 1.2 振动的合成 .....                  | (6)   |
| 第 2 章 信号 .....                   | (16)  |
| 2.1 时间信号及采样定理 .....              | (16)  |
| 2.2 基本信号 .....                   | (21)  |
| 2.3 信号的运算 .....                  | (34)  |
| 第 3 章 Fourier 变换 .....           | (47)  |
| 3.1 Fourier 级数与 Fourier 变换 ..... | (47)  |
| 3.2 复数形式的 Fourier 级数及其应用 .....   | (57)  |
| 3.3 Fourier 变换的性质 .....          | (63)  |
| 3.4 快速 Fourier 变换(FFT)及其应用 ..... | (73)  |
| 3.5 运用 FFT 进行简单滤波 .....          | (85)  |
| 3.6 FFT 在地球物理数据分析中的应用举例 .....    | (89)  |
| 第 4 章 系统 .....                   | (100) |
| 4.1 线性连续时间系统 .....               | (100) |
| 4.2 离散时间系统 .....                 | (103) |
| 4.3 在 MATLAB 系统下表示离散系统 .....     | (104) |
| 第 5 章 模拟滤波器设计 .....              | (110) |
| 5.1 滤波器的基本概念 .....               | (110) |
| 5.2 模拟滤波器的设计原理 .....             | (112) |
| 5.3 模拟原型滤波器 .....                | (114) |
| 5.4 频率变换 .....                   | (125) |
| 5.5 滤波器最小阶数选择 .....              | (131) |
| 5.6 模拟滤波器的性能测试 .....             | (134) |
| 5.7 模拟滤波器的设计 .....               | (138) |
| 第 6 章 IIR 数字滤波器的设计 .....         | (152) |
| 6.1 概述 .....                     | (152) |

|   |                                  |              |
|---|----------------------------------|--------------|
| 6.2   | 模拟滤波器到数字滤波器的转换 .....             | (154)        |
| 6.3   | 滤波器特性及使用函数 .....                 | (157)        |
| 6.4   | 经典设计法 .....                      | (161)        |
| 6.5   | IIR 滤波器的完全设计函数 .....             | (167)        |
| 6.6   | IIR 滤波器直接设计 .....                | (176)        |
| 6.7   | IIR 数字滤波器在地震数据分析中的应用举例 .....     | (179)        |
| <b>第 7 章</b>                                  | <b>FIR 滤波器设计</b> .....           | <b>(187)</b> |
| 7.1   | FIR 滤波器原理概述及滤波函数 .....           | (187)        |
| 7.2   | FIR 滤波器的窗函数设计 .....              | (188)        |
| 7.3   | 最优 FIR 滤波器设计 .....               | (212)        |
| 7.4   | 有限冲激响应数字滤波器的应用举例 .....           | (223)        |
| 7.5   | 无限冲激响应数字滤波器和有限冲激响应数字滤波器的比较 ..... | (234)        |
| <b>第 8 章</b>                                  | <b>参数化建模</b> .....               | <b>(236)</b> |
| 8.1   | 时间域建模 .....                      | (236)        |
| 8.2   | 频率域建模 .....                      | (240)        |
| <b>第 9 章</b>                                  | <b>随机信号分析</b> .....              | <b>(244)</b> |
| 9.1   | 随机信号的数字特征 .....                  | (244)        |
| 9.2   | 相关函数和协方差 .....                   | (247)        |
| 9.3   | 功率谱估计 .....                      | (252)        |
| 9.4   | 传递函数估计 .....                     | (269)        |
| 9.5   | 相干函数 .....                       | (271)        |
| 9.6   | 运用功率谱提取地球自由振荡信息 .....            | (273)        |
| <b>第 10 章</b>                                 | <b>数字信号处理的几个前沿课题</b> .....       | <b>(280)</b> |
| 10.1  | 时谱(倒谱)分析 .....                   | (280)        |
| 10.2  | 地震观测系统的仿真和地面运动的恢复 .....          | (282)        |
| 10.3  | 小波分析举例 .....                     | (294)        |
| <b>主要参考文献</b> .....                           |                                  | <b>(302)</b> |
| <b>附录 1 MATLAB 使用简介</b> .....                 |                                  | <b>(303)</b> |
| <b>附录 2 MATLAB 信号处理工具箱函数</b> .....            |                                  | <b>(311)</b> |
| <b>附录 3 利用 EDSP-IAS 软件导出数据(文本文件)的步骤</b> ..... |                                  | <b>(326)</b> |

# 第 1 章 振动的基础知识

## 1.1 振动概述

人类生活在振动的世界里。地面有汽车、火车、拖拉机；天空有飞机；海洋里有轮船，等等；就连茫茫宇宙中，也有电磁波在不停地发射和传播。可以说，它们都在不停地振动着。就人体本身来说，心脏的跳动、肺部的呼吸等在某种意义上来说，也都是一种振动。所以说在自然界中振动现象比比皆是。在某种情况下，振动往往占有突出的地位。两千多年前，人们就利用振动把衣服上的尘埃抖掉。到 1673 年，惠更斯首次提出物理摆理论，才使振动的研究走向正规。

物体在一定位置附近来回重复的运动称为振动。它是机械运动的一种很普遍的形式。同时它还是波的基础，因为任何波都是振动的传播过程。

振动理论是声学、地震学、光学和无线电等学科的基础知识。机械振动的特征及基本规律很多都适用于其他形式的振动。

简谐振动是最基本的振动，是介质中形成波的基本根源。在第 3 章中将说明任何振动都可表示为简谐振动的合成。在此，我们首先分析弹簧振子的振动来研究简谐振动的特性，然后在此基础上研究机械振动的合成。

在我们周围发生的各种机械运动中，机械振动现象是经常可以看到的。例如，固定弹簧的上端，把挂在它下端的砝码向下一拉，再松开手，砝码就上下往复地运动，这是物理上最简单的振动现象，称为弹簧振子；又如钟摆的运动、一切发声的运动，都有类似的特点。

由观察知，这些物体运动的共同特征是：物体沿着直线或弧线，在一定位置（平衡位置）附近做来回重复的运动，我们把这种运动叫机械振动，简称振动。

振动的特性可用一些物理量来描述，其中振动位移  $x$  是一个矢量，若以平衡位置为始点，它的大小等于振动物体在某一时刻的位置与平衡位置间的距离，它的方向是从平衡位置指向物体所在的位置。如图 1-1，一物体  $M$  系于一弹簧的自由端，弹簧的另一端固定，物体  $M$  放在光滑的水平台面上，这样的系统成为弹簧振子。当物体  $M$  处于  $O$  点时，弹簧呈松弛状态，物体不受力，这点称为平衡位置。将物体自平衡位置  $O$  向右拉开少许至  $B$  点，然后释放，物体就左右振动起来。



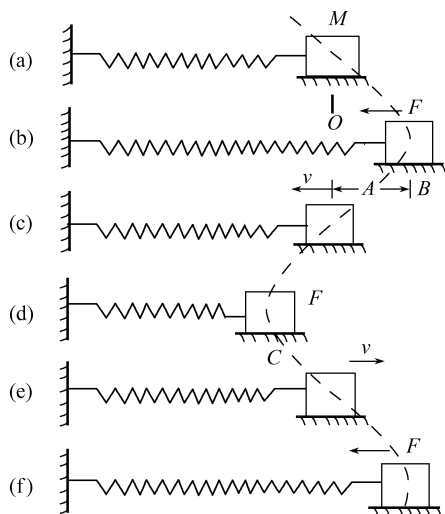


图 1-1 弹簧振子示意图

物体  $M$  为什么会振动呢? 原来, 向右方拉物体  $M$  的时候, 我们把弹簧拉长, 弹簧就产生一个指向左方 (即指向平衡位置  $O$ ) 的收缩弹性力。放开后, 物体  $M$  就在这个弹性力的作用下向左做加速运动。当球回到平衡位置  $O$  的时候, 它已具有了一定的速度。因此, 虽然这时弹簧已没有伸长, 球已不再受弹簧的拉力, 但是由于惯性的作用, 继续向左运动而没有停下来。球在通过平衡位置  $O$  向左运动中要压缩弹簧, 被压缩的弹簧就产生一个指向右方 (即指向平衡位置  $O$ ) 的弹性力, 从而阻碍物体  $M$  的运动。于是物体  $M$  减速运动到某一位置  $A$  就不再向左运动了。然后, 在被压缩的弹簧作用下, 又向右做加速运动。与前面所说的情形相似, 物体  $M$  并不停止在它的平衡位置上, 而是通过这个平衡位置再次到位置  $B$ , 这样就完成了一次全振动。以后的运动将是上述过程的重复。

因此, 维持物体振动的条件是振动物体离开平衡位置后, 要能受到使它回到平衡位置的力的作用, 在这个力的作用下, 物体才能在其平衡位置附近做往复运动, 我们称使物体回到平衡位置的力为回复力。所以, 物体振动的条件是当物体离开平衡位置后必须有作用在物体上的回复力存在。

现在, 我们来确定物体  $M$  离开原点的位移为  $x$  时所受到的弹性力。根据胡克定律, 弹簧的弹性力与弹簧的伸长量成正比, 即与物体  $M$  离开平衡位置的距离成正比, 而力的方向总是指向平衡位置。当物体  $M$  在  $O$  点右方时, 弹性力指向左方, 反之亦然。因为弹性力总是与离开原点的位移  $x$  符号相反, 因此弹性力

$$F = -kx \quad (1-1)$$

若球的质量为  $m$ , 根据牛顿第二定律, 振动物体的加速度应是

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = -\frac{k}{m}x \quad (1-2)$$

因为其中的  $k$ 、 $m$  都是正值常数,故其比值可用一恒量的平方来表示。设  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ,则有  $a = -\omega^2 x$ 。由微分的知识我们知道,物体的加速度可用其位移的二阶微商来表示,即  $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$ 。所以上述等式写成微分方程的形式为:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \text{ 即}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1-3)$$

对于上述微分方程,其特征方程为

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad (1-4)$$

其特征根为  $r = \pm j\omega$ ,根据微分方程理论知  $x_1 = e^{j\omega t}$ 、 $x_2 = e^{-j\omega t}$  是上述微分方程的两个线性无关特解。但这两个解均含有复数,不便于应用。为了得到微分方程不含复数的解,可以利用欧拉公式:  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ 。由于  $x_1$ 、 $x_2$  之间呈共轭关系,因此取它们的和再除以 2 就得到它们的实部;取它们的差,再除以 2 就得到它们的虚部,即

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(\cos\omega t + j\sin\omega t + \cos\omega t - j\sin\omega t) = \cos\omega t \quad (1-5)$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}(\cos\omega t + j\sin\omega t - \cos\omega t + j\sin\omega t) = \sin\omega t \quad (1-6)$$

根据微分方程知识,我们知道  $\cos\omega t$ 、 $\sin\omega t$  仍是微分方程的解,又由于  $\frac{\cos\omega t}{\sin\omega t} = \cot\omega t \neq \text{常数}$ ,所以它们是线性无关的。由此得到微分方程的通解为  $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ 。该解通常表示为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ 或 } x = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (1-7)$$

(1-7)式为一简谐振动,其中,  $A_1 = A_2 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\varphi_1 = -\arctan \frac{C_2}{C_1}$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{C_2}{C_1}。$$

由此可见简谐振动是一种周期运动,其运动形式可以用三角函数来描述。通常用下面三个物理量来表征:

(1) 振动的振幅  $A$ : 振动物体离开平衡位置的最大距离叫做振动的振幅 (amplitude)。如图 1-1 中的  $OA$  或  $OB$ ,它是表示振动强弱的物理量。

(2) 振动的周期  $T$ : 物体完成一次全振动所需的时间叫做振动周期。在图 1-1 中,物体  $M$  由位置  $B$  经过位置  $O$  到  $C$ ,再经过位置  $O$  回到  $B$ ;或者物体  $M$  由位置  $O$  到  $C$ ,再经  $O$  到  $B$ ,再回到  $O$ ,都是一次全振动。它们所需的时间都等于周期,它是

表示振动快慢的物理量。

(3) 振动的频率  $f$ : 振动物体在 1s 内振动的次数叫做振动的频率 (frequency)。频率的单位是赫兹 (Hz), 将 1s 内完成一次全振动的频率规定为频率的单位, 叫做 1Hz。它也是表示振动快慢的物理量。

振动周期和频率的关系为  $T = \frac{1}{f}$ ,  $f = \frac{1}{T}$ , 即振动频率和周期互为倒数。由于三角函数周期为  $2\pi$ , 故有  $\omega T = 2\pi$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ ,  $\omega$  为角频率, 角频率表示振动物体在  $2\pi$  秒内振动的次数, 或说是每秒转过的弧度。因此可以得到

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1-8)$$

对于频率相同的两个简谐振动来说, 它们的振动量  $y$  的最大值一般不在同一时间出现。一个先出现, 另一个要再过一段时间才出现。为了表示它们的时间差, 就有必要引入相位这个重要的概念。所谓简谐振动在任一瞬时  $t$  的相位, 是从选定一个起始时刻  $t_0$  算起到时刻  $t$  内所振动了的周期数  $\frac{t-t_0}{T}$ 。如果设简谐振动的数学形式是

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-9)$$

选择  $y$  到达 0 值的时刻作为  $t_0$ , 则

$$(\omega t_0 + \varphi) = 0, \quad t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} \quad (1-10)$$

而简谐振动在任一瞬时  $t$  的相位为

$$\left[ \frac{t - t_0}{T} \right] = \frac{\omega t + \varphi}{\omega T} = \frac{\omega t + \varphi}{2\pi} \quad (1-11)$$

因为  $\omega t + \varphi$  角决定了  $t$  时刻的相位, 故称为相位角。初相位角为初始位置的時刻到  $y$  为最大值的時刻之间的时间差与角频率的乘积, 见图 1-2。

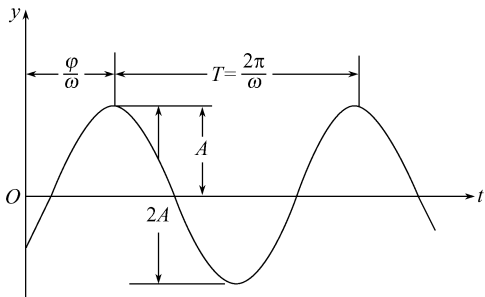


图 1-2 振动图像上的相位角与时间的关系

对于频率相同相位角不同的两个简谐振动

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (1-12)$$

其图像表示如下

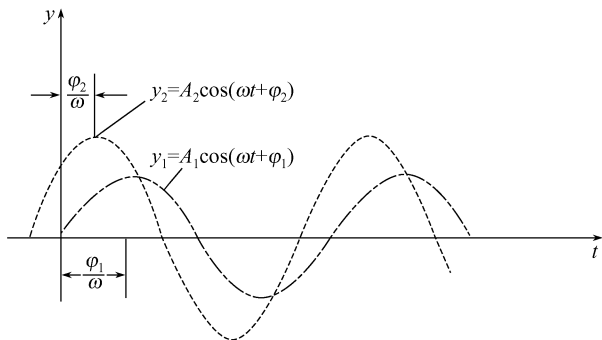


图 1-3 两个振动图像上的相位角

这两个振动图像有不同的初相位角  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 但这两个图像有不变的相位差  $\varphi_1 - \varphi_2$  (图 1-3), 它表明这两个简谐振动的平衡位置不是同时到达的, 其中一个振动落后于另一个振动  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\omega}$  秒。当相位差  $\varphi_1 - \varphi_2$  为  $\pi$  的奇数倍时, 两个简谐振动则相差半个周期, 即一个在增大时, 另一个在减小, 一个到达极大值时, 另一个降至极小值, 这种情况称为反相。当  $\varphi_1 - \varphi_2$  为零或  $2\pi$  的整数倍时, 两个简谐振动完全一致, 称为同相。

对于不同频率 (圆频率为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ) 的两个简谐振动来说, 它们的相位差角将为

$$(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1-13)$$

这个相位角不是恒定的而是随时间改变的, 表现为两个简谐振动时而同相、时而反相。由此可见, 相位差角对于非周期运动就没有度量意义了。

通过以上讨论, 可知简谐振动的特性完全决定于振幅、频率和初相位角, 人们称这三个物理量为振动三要素。只要知道物体作简谐振动的三要素, 振动的规律、特点和现象就完全清楚了。

下面运用 MATLAB 来说明振幅、频率和相位的概念。

**例 1-1** 运用 MATLAB 模拟频率为 3Hz、采样间隔为 0.02s 的振动。振动的振幅为 0.5, 初相为 1, 采样长度为 5s。绘出振动图, 分别改变振动频率、振幅和初相位, 观察图形有哪些变化。

我们可以用下列 MATLAB 程序模拟:

```
% Samp1_1
```

```
dt=0.02;    % 采样间隔
f=3;        % 频率为 3Hz
t=0:dt:5;   % 振动持续时间
x=0.5 * sin(2 * pi * f * t + 1); % 信号
plot(t,x)   % 绘出信号图
xlabel('时间/s') % 给出横坐标标记
ylabel('振幅') % 给出纵坐标标记
```

运行上述程序得到图 1-4,可见上下振动的幅度为 0.5,即振幅为 0.5;频率为 3Hz,即在 1s 内有 3 个周期的振动。改变这些值可以得到相应的改变。

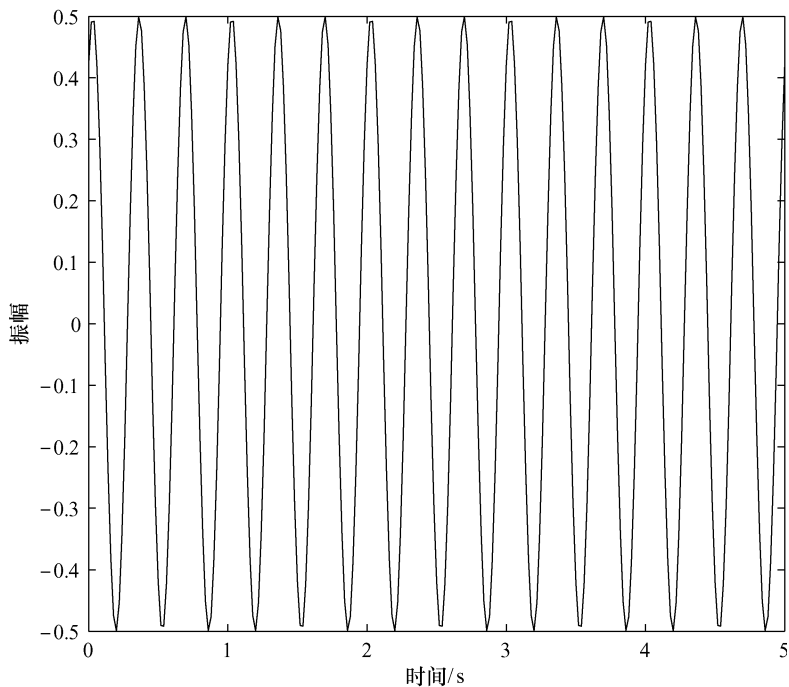


图 1-4 例 1-1 给出的振动图像

## 1.2 振动的合成

1.1 节介绍了振动的基本概念,实际上单个振动在生产实践中很少遇到,实际遇到的大多数振动是两个或两个以上的振动合成。本节以两个简谐振动合成为例介绍简单振动合成复杂振动的情况。

## 1.2.1 频率相同的两个简谐振动的合成

若某质点同时参与两个在同一直线上、频率相同的简谐振动,分别表示为

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \quad (1-14)$$

当振幅  $A_1$  与  $A_2$ 、初相位角  $\varphi_1$  与  $\varphi_2$  均不相等时,两个振动合成以后将会如何振动呢? 由于这两个振动都发生在同一直线上,因此合成以后的位移  $y$  应该等于各个振动位移  $y_1$  和  $y_2$  的代数和,即

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (1-15)$$

根据三角公式,将上式展开、整理得

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-16)$$

式中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \quad (1-17)$$

如果相位差  $\varphi_1 - \varphi_2$  取某些特殊值,合成振动的振幅  $A$  将有对应的值。

下面用图解的方法考察同频率振动的合成结果。

**例 1-2** 运用 MATLAB 模拟两个振动频率均为 3Hz、采样间隔为 0.02s 的 200 个时间点的振动合成。第一个振动的振幅为 0.5,初相为 1,第二个振动的振幅为 0.3,初相为 2.2。绘出原始两个振动和合成振动随时间的变化。

我们可以用下列 MATLAB 程序模拟

```
% Samp1_2
N = 200; dt = 0.02; f1 = 3; f2 = 3; % 采样点数、间隔和两个振动的频率
n = 0:N - 1; t = n * dt; % 定义时间离散值
x1 = 0.5 * sin(2 * pi * f1 * t + 1); % 第一个振动
x2 = 0.3 * sin(2 * pi * f2 * t + 2.2); % 第二个振动
subplot(3,1,1), plot(t,x1); ylim([-1 1]);
title('第一个振动') % 第一个振动绘图
subplot(3,1,2), plot(t,x2); ylim([-1 1]);
title('第二个振动') % 第二个振动绘图
subplot(3,1,3), plot(t,x1 + x2); ylim([-1 1]);
title('合成振动') % 合成振动绘图
xlabel('时间/s')
```

运行结果为图 1-5。可以看到,两个频率相同的振动合成后频率不变,不管其振幅、相位如何。

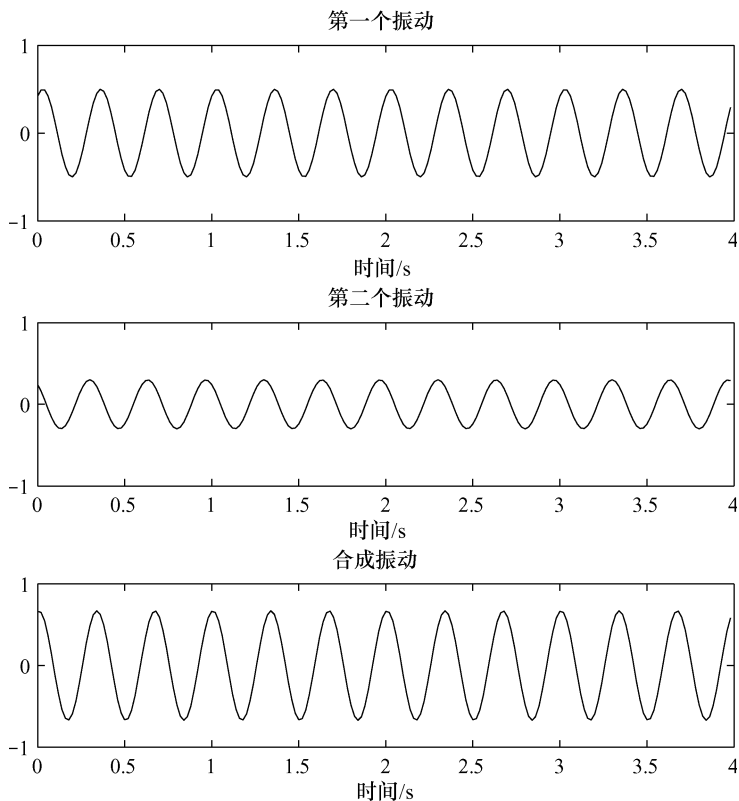


图 1-5 两个频率相同的简谐振动合成的例子

图中横轴为时间,单位为秒,用  $s$  表示。上图:第一个振动的图像;中图:第二个振动的图像;  
下图:合成振动图像

前面我们在模拟中没有考虑两个相同频率振动的初相位,其实,初相位也是相当重要的因素。下面,我们首先在理论上分析初相的不同会引起振动的哪些变化,然后运用 MATLAB 进行模拟,观看与理论分析的对应情况。

当  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0, 2\pi, 4\pi, \dots = 2k\pi$  时,这里  $k$  是整数,两个振动同相,于是

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \quad (1-18)$$

即

$$A = A_1 + A_2 \quad (1-19)$$

对 Samp1\_2 程序稍加修改,将表述第二个振动的语句改为  $x_2 = 0.3 * \sin(2 * \pi * f_1 * t + 1 + 2 * \pi)$ ,则可以看到合成振动为一振幅增加的振动,频率与输入振动相同,振幅为两个振动振幅之和。

当  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots = (2k + 1)\pi$  时,两个振动的相位角反相,于是

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1 \quad (1-20)$$

即

$$A = A_1 - A_2 \quad (1-21)$$

表示一个振动抵消了另一个振动的一部分。

修改 Samp1\_2 程序,将描述第二个振动语句改为  $x_2 = 0.3 * \sin(2 * \text{pi} * 3 * t + 1 + \text{pi})$ ,则可以看到运行结果为一振幅减小的简谐振动。频率不变,振幅为两个振动振幅之差。特别地,如果我们令这两个输入振动振幅相同,则合成振动为一条直线。大家自己可以模拟这个结果。

### 1.2.2 同一直线上不同频率的两个简谐振动的合成

若某质点在一条直线上的两个简谐振动分别表示为

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (1-22)$$

若要求合成以后的振动是周期振动,其周期为  $T$ ,则必须满足:  $T = nT_1, T = mT_2$ , 式中  $m, n$  为整数,也就是说两个成比例的正弦波加起来,才组成一个周期运动。这样的理论分析较为复杂,下面用 MATLAB 模拟研究两个简谐振动合成的情况。

**例 1-3** 运用 MATLAB 模拟频率为 1Hz 和 9Hz、振幅为 0.5 和 0.3、初相位分别为 1 和 2.2 的两个简谐振动的合成情况。采样间隔为 0.02s,共 200 个时间点。绘出原始两个振动和合成振动随时间的变化。

```
% Samp1_3
```

```
N = 200; dt = 0.02; f1 = 1; f2 = 9; % 采样点数、间隔和两个振动的频率
```

```
n = 0; N - 1; t = n * dt; % 定义时间离散值
```

```
x1 = 0.5 * sin(2 * pi * f1 * t + 1); % 第一个振动
```

```
x2 = 0.3 * sin(2 * pi * f2 * t + 2.2); % 第二个振动
```

```
subplot(3,1,1), plot(t,x1);
```

```
title('第一个振动') % 第一个振动绘图
```

```
subplot(3,1,2), plot(t,x2);
```

```
title('第二个振动') % 第二个振动绘图
```

```
subplot(3,1,3), plot(t,x1 + x2);
```

```
title('合成振动') % 合成振动绘图
```

```
xlabel('时间/s')
```

运行结果见图 1-6。可以看到,高频小振幅的振动与低频大振幅的振动叠加后,振动的总体趋势表现为大振幅低频振动。改变程序中振动的振幅和频率进行模拟,只要是低频大振幅和低频小振幅叠加,均可以看到上面的效果,请大家多设计几组数据进行试验。



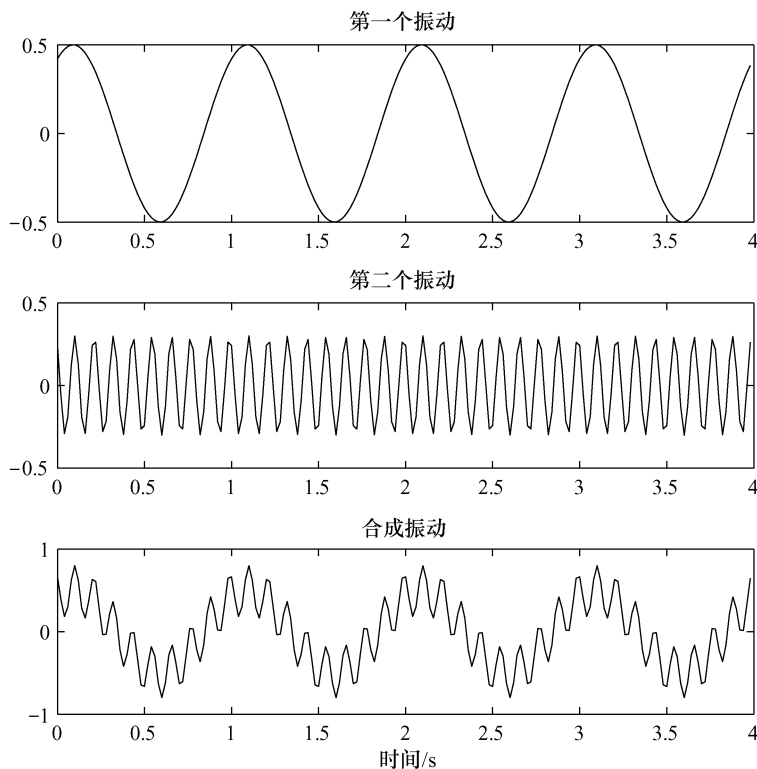


图 1-6 两个不同频率振动合成的例子

图中横轴为时间,单位为 s。上图:频率为 1Hz,振幅为 0.5 的振动图像;中图:频率为 9Hz,振幅为 0.3 的振动;下图:合成振动图像

上面的例子虽然运用两个频率不同的振动叠加,但叠加后仍能看出原始振动的频率成分。但如果采用频率相近、振幅也相差不多的两个简谐振动叠加,会出现较为复杂的振动形式,大家可以将 Samp1\_2 进行简单的修改,会出现较为复杂的形式,有时合成振动不是简谐振动,“拍”的就是其中的一种特例。

若两个振幅相同( $A_0 = A_1 = A_2$ ),初相位也相等( $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ),而频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  相差很少(比较接近)的两个简谐振动相叠加时,就会产生非简谐振动。下面首先用理论分析方法得到“拍”的非周期简谐振动,然后用模拟方法加以验证。对于这种情况,运动表示为

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A \sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right] \quad (1-23)$$

式中

$$A = 2A_0 \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right] \quad (1-24)$$

可以看到振幅  $A$  也是以非常低的频率〔角频率为  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ 〕进行的振动,这表现为高频振动〔角频率为  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 〕振幅包络线随时间而周期变化,这种现象就是物理学中的“拍”。振幅的振动频率  $f_b$  等于两个振动频率之差的一半。但由于振幅为负与振幅为正只是相位相反,振幅并无变化,因此看上去振幅的频率似乎为两个频率之差。振动频率是两个分振动频率的平均值。振动的最大振幅与最小振幅分别等于两个振动振幅之和与差。特殊地,若参与合成的两个振动振幅相等,则拍的最大振幅为单个波振幅的两倍,最小振幅为 0,即

$$A_{\max} = A_1 + A_2 = 2A, A_{\min} = |A_1 - A_2| = 0 \quad (1-25)$$

拍的现象在乐器中常常加以利用,将两个固有频率比较接近的振动叠加起来发出的音调将更加悦耳。另外在发电机开动时也可以听到声音一会儿高一会儿低的拍的振动。人们听见的嗡嗡之声就反映了合成振动的时强时弱。下面我们采用实例来模拟拍的现象。

**例 1-4** 运用 MATLAB 模拟频率为 10Hz 和 9Hz、振幅为 0.3、初相位为 1 的两个简谐振动的合成情况。采样间隔为 0.01s,共 400 个时间点。绘出原始两个振动和合成振动随时间的变化图像。

```
% Samp1_4
```

```
N = 400; dt = 0.01; f1 = 10; f2 = 9; % 采样点数、间隔和两个振动的频率
```

```
n = 0; N - 1; t = n * dt; % 定义时间离散值
```

```
x1 = 0.3 * sin(2 * pi * f1 * t + 1); % 第一个振动
```

```
x2 = 0.3 * sin(2 * pi * f2 * t + 1); % 第二个振动
```

```
subplot(3,1,1), plot(t,x1);
```

```
title('第一个振动') % 第一个振动绘图
```

```
subplot(3,1,2), plot(t,x2);
```

```
title('第二个振动') % 第二个振动绘图
```

```
subplot(3,1,3), plot(t,x1 + x2);
```

```
title('合成振动') % 合成振动绘图
```

```
xlabel('时间/s')
```

运行该程序,可以看到合成后的振动具有明显的拍现象(图 1-7)。

如果改变第二振动  $x_2$  的初相位,使得这两个波的初相位差有变化,能发现哪些现象呢?

**例 1-5** 改变例 1-4 的第二个振动的初相位分别为 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 分别观察拍周期和拍频率及包络线形状的变化,并填写表 1-1

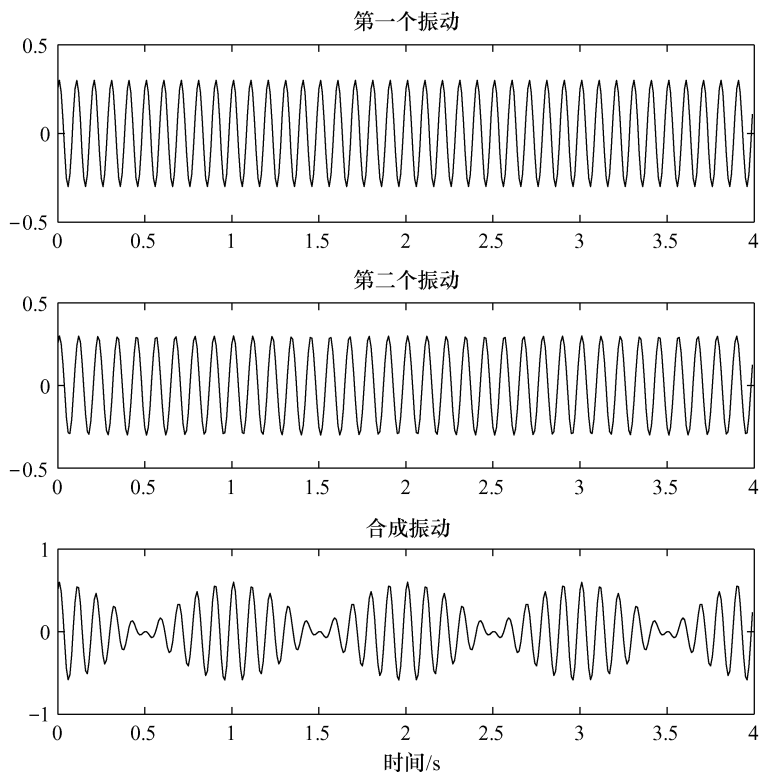


图 1-7 振幅为 0.3,初相位为 1、频率分别为 9Hz 和 10Hz 的两个简谐振动合成图中横轴为时间,单位为 s。上图:频率为 10Hz 的振动图像;中图:频率为 9Hz 的振动图像;下图:合成振动图像

表 1-1 拍现象中初相位变化导致的变化情况

| 第一个振动初相 | 第二个振动初相 | 拍周期/s | 拍频率/Hz | 包络线形状 |
|---------|---------|-------|--------|-------|
| 1       | 0.5     | 2     | 0.5    | 右移    |
| 1       | 1       | 2     | 0.5    |       |
| 1       | 1.5     | 2     | 0.5    |       |
| 1       | 2.0     | 2     | 0.5    |       |
| 1       | 2.5     | 2     | 0.5    |       |
| 1       | 3.0     | 2     | 0.5    |       |

上述试验的程序如下

```
% Samp1_5
```

```
N = 400; dt = 0.01; f1 = 10; f2 = 9; % 采样点数、间隔和两个振动的频率
n = 0:N - 1; t = n * dt; % 定义时间离散值
```

```

x1 = .3 * sin(2 * pi * f1 * t + 1); % 第一个振动
for ii = 1:6
x2 = .3 * sin(2 * pi * f2 * t + ii * 0.5); % 逐渐改变第二个振动的初相
posplot = [ '6,1, 'num2str(ii) ];
% 将数字 ii 转换为字符串,与'6,1,'合并并赋给 posplot。
subplot(posplot); plot(t, x1 + x2); % 在给定位置绘出图形
end
xlabel('时间/s')

```

输出结果为图 1-8。可以看到拍的最大值的位置有变化, 包络线逐渐右移。但拍的周期不变, 均为 2s (频率为 0.5Hz)。

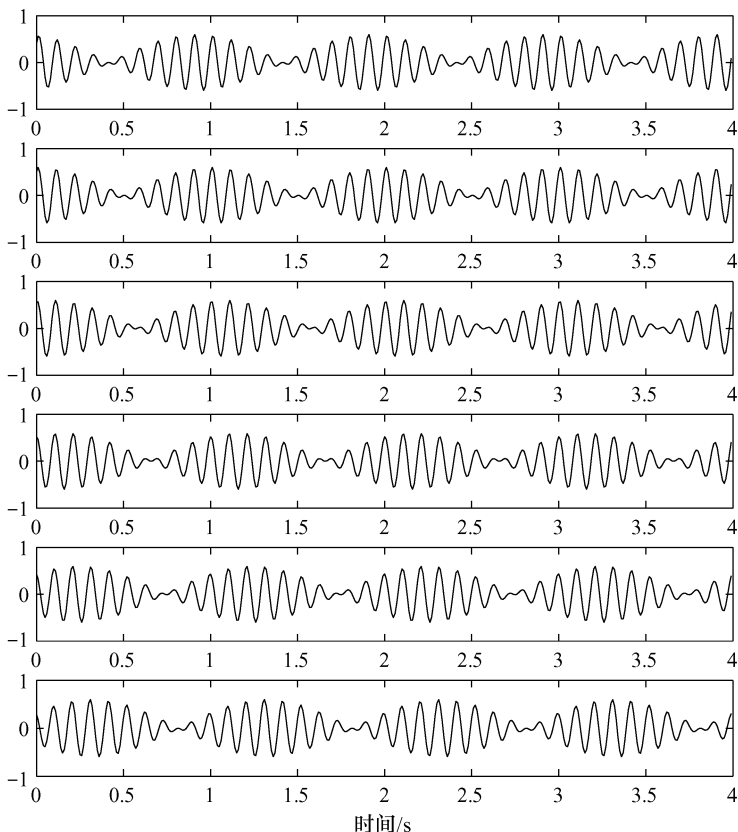


图 1-8 改变第二个信号初相位导致的拍信号右移

如果保持第一个振动的频率不变, 改变第二个振动的频率, 包络线形状会有哪些变化? 请看下面的例题:

**例 1-6** 改变例 1-4 的第二个振动的频率分别为 9.9, 9.5, 9.0, 8.5, 8.0, 7.5, 然后观察拍周期和拍频率及包络线形状的变化, 按照表 1-2 进行试验并填写观察结果。

**表 1-2** 拍现象中初相位变化导致的变化情况

| 第一个振动频率 | 第二个振动频率 | 拍周期/s | 拍频率/Hz |
|---------|---------|-------|--------|
| 10      | 9.9     | 20    | 0.05   |
| 10      | 9.5     | 4     | 0.25   |
| 10      | 9.0     | 2     | 0.5    |
| 10      | 8.5     | 1.5   | 0.75   |
| 10      | 8.0     | 1     | 1      |
| 10      | 7.5     | 0.8   | 1.25   |

试验程序如下:

```
% Samp1_6
N = 400; dt = 0.01; f1 = 10; f2 = 9.9;
% 采样点数、间隔和两个振动的频率
n = 0; N - 1; t = n * dt; % 定义时间离散值
x1 = .3 * sin(2 * pi * f1 * t + 1); % 第一个振动
x2 = .3 * sin(2 * pi * f2 * t + 1); % 第二个振动
subplot(6, 1, 1), plot(t, x1 + x2);
for ii = 1:5
posplot = [ '6,1, 'num2str(ii + 1) ];
% 将数字 ii 转换为字符串, 与'6,1,'合并并赋给 posplot。
x2 = .3 * sin(2 * pi * (10 - ii * 0.5) * t + 1);
% 逐渐改变第二个振动的频率
subplot(posplot); plot(t, x1 + x2); % 在给定位置绘出图形
end
xlabel('时间/s')
```

试验程序运行结果为图 1-9。可以看到:两个波的频率相差越小,拍的周期越大;反之,频率相差越大,拍的周期越小。拍的周期可表示为:  $\left| \frac{2}{f_2 - f_1} \right|$ , 频率可表示为  $\left| \frac{f_2 - f_1}{2} \right|$ 。多个振动合成的图像更加复杂,大家可以自己修改上面振动合成程序进行体会。

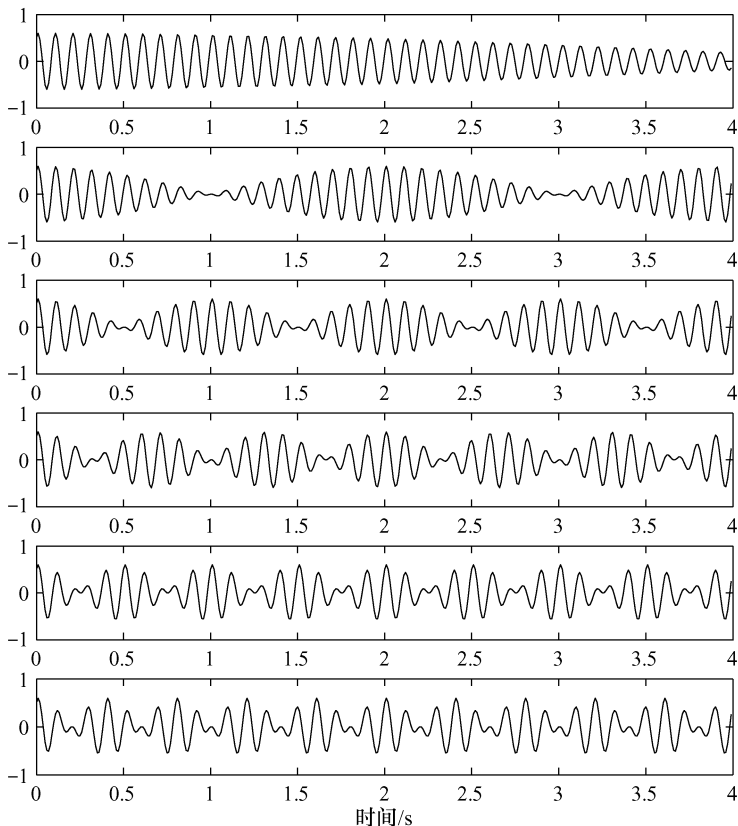


图 1-9 改变第二个信号频率得到的拍频率的变化

## 习 题

1. 振幅是表示振动\_\_\_\_\_的物理量,周期和频率是表示\_\_\_\_\_的物理量。
2. 两个振动物体的振动周期分别为 2.5s 和 10s, 它们的振动频率分别是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。
3. 若一弹簧振子在平衡位置 O 左右各 10cm 范围内做简谐运动,若其运动周期为 0.5s, 振动初相位为 0, 求其频率和运动方程。
4. 自己设计两个不同频率的振动, 在计算机上模拟拍的现象。
5. 在计算机上模拟得出以下三种振动的合成图:
 
$$x = 0.8 * \sin(2 * \pi * t + 1.3)$$

$$x = 0.8 * \sin(2 * \pi * 5 * t + 0.2)$$

$$x = 0.8 * \sin(2 * \pi * 20 * t + 0.3)$$
 能否从合成图形中看出其中有这三种频率的正弦波?
6. 写出 5 题中三种波的周期、频率、角频率、初相位。
7. 拍的振幅、频率和周期与原始振动有何关系?

## 第 2 章 信 号

本章首先介绍连续时间信号和离散时间信号转换时应该遵循的基本规律——采样定理;然后介绍信号处理课程中的基本信号,这些基本信号是构造复杂信号的基本单元,分析复杂信号时通常要将其分解为基本信号,因此了解基本信号的性质是掌握信号处理的基础;最后介绍信号的运算,通过信号运算,可以将简单信号合成为复杂信号,也可以对信号进行处理。

### 2.1 时间信号及采样定理

#### 2.1.1 时间信号及其表示

时间信号分为连续时间信号和离散时间信号。

连续时间信号是指在所讨论的时间间隔内,对于任意时间值(除若干个不连续点之外)都可以给出确定的函数值。

离散时间信号是指只在某些离散的瞬时给出函数值,而在其他处无定义。离散时间信号是时间上不连续按先后顺序排列的一组数的集合,故称为时间序列。一个时间序列通常表示为  $\{x(n)\}$  ( $-\infty < n < +\infty$ ),或具体写成

$$\{x(n)\} = \{x(-\infty), \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots, x(+\infty)\} \quad (2-1)$$

这里  $x(n)$  仅对整数  $n$  才有意义。序列值  $x(n)$  与位置  $n$  有关,正如  $x(t)$  与时间  $t$  有关一样。

应该注意,离散序列  $\{x(n)\}$  可由连续信号  $x(t)$  在  $nT$  时刻采样得到,  $T$  为采样周期。实际应用中,序列为有限的。即一个信号序列表示为:  $\{x(n)\}$ ,  $n$  应满足条件:  $N_1 \leq n \leq N_2$ ,  $N_1$ 、 $N_2$  均为正整数。

MATLAB 中采用向量表示序列。由于 MATLAB 矢量的第一个元素位置为  $x(1)$ ,因此为了清楚地表示序列  $\{x(n)\}$  要用到两个向量,一个向量  $n$  表示序列元素的位置(我们可称之为序号序列),而另一个向量  $x$  表示序列值(称为值序列)。为了在图形中表示这些向量,在 MATLAB 中经常用 stem 函数和 plot 函数。下面举例说明这两个函数表示的序列。

**例 2-1** 设一个信号值为  $\{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ -3 \ -4 \ -5 \ 1 \ 2\}$ ,序号自  $-3$  到  $10$ ,试用 MATLAB 中的 stem 函数和 plot 函数表示这个信号,其中信号的采样间隔假定为  $1\text{s}$ 。

程序如下

```

% Samp2_1
N = [ -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ];      % 为序号序列
X = [ 0 1 2 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 1 2 ];    % 为值序列
subplot(2,1,1),stem(N,X);                    % 绘出离散值图
hold on;plot(N,zeros(1,length(X)), 'k')
% 绘出横轴,zeros(1,N)为产生1行N列元素值为零的数组
set(gca,'box','on'); % 将坐标轴设在方框上
xlabel('序列号');ylabel('序列值');
title('stem 例子');
dt = 1;t = N * dt; % 给出时间间隔和时间序列
subplot(2,1,2),plot(t,X);                    % 绘出随时间的变化
hold on;plot(t,zeros(1,length(X)), 'k') % 绘出横轴
xlabel('时间/s');ylabel('函数值');title('plot 例子');

```

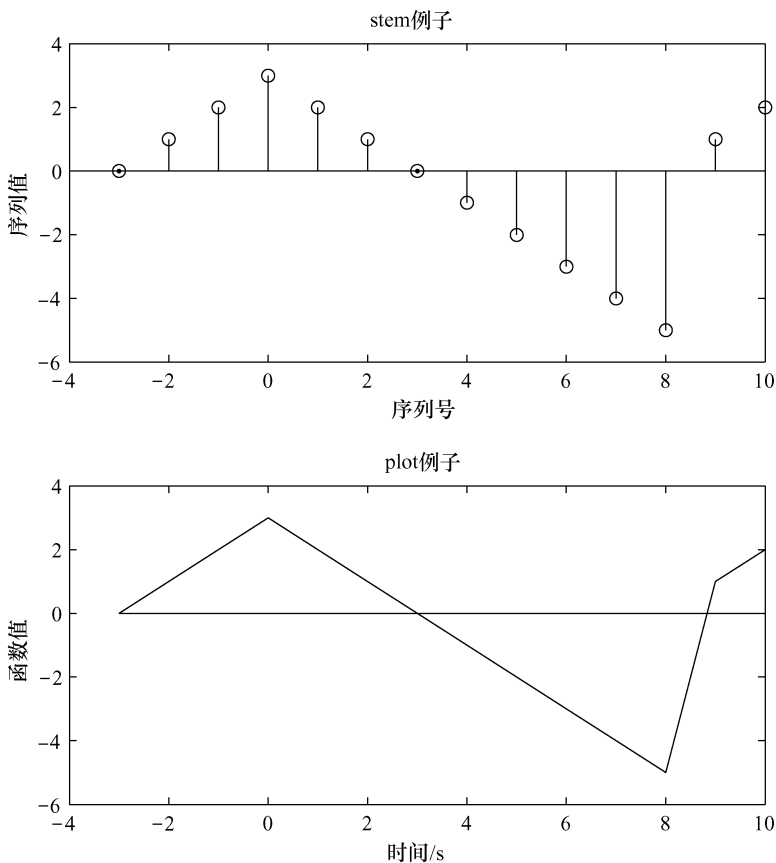


图 2-1 时间信号的表示



运行结果如图 2-1。可以看出,stem 函数清楚地表示了离散信号。用 plot 函数可以绘出数学中所讲的函数。如果样点足够多,可以清楚地反映函数的变化规律。本例中,dt 为采样间隔。在以后的例子中若不特别声明,dt 均设为 1。

对于一个连续时间信号, $x(t)$  可以每隔一定的时间间隔量取一个值,将这些值组合成一个序列,就将连续信号离散化为离散时间信号  $\{x(n)\}$ 。这样得到的离散时间信号能否不失真地反映连续时间信号呢? 这里涉及一个频率折叠和假频问题,下面我们讨论这个问题。

### 2.1.2 采样定理

后面我们将讲到,每个信号都可以分解为多个不同频率、不同振幅和不同相位的正弦或余弦函数叠加的形式。为讨论方便,我们假定要离散化的信号只有一个周期成分。

如果此信号以每周期少于两个点采样,会发生什么情况呢? 其实这个效应多少类似于频闪光照射一个高速旋转轮子时所观测到的效应。若照射的速率与轮辐通过某一参考点的速率不同,这个轮子好像以不同于真速率的速度在旋转。下面我们用 MATLAB 模拟来研究这种情况。

**例 2-2** 现有一个振幅为 1、频率为 10Hz、相位为 0.3 的模拟信号,即  $\sin(2\pi \times 10 \times t + 0.3)$ ,用 0.01s 的采样间隔(采样频率为 100Hz)来表示原始信号(实际上模拟信号不能用离散值表示,此处为了在计算机上表示,用采样率非常高的离散信号表示模拟信号)。若每秒采样 10 次,即采样间隔为 0.1s,试绘出原始信号和采样后的信号。

MATLAB 模拟程序如下:

```
% Samp2_2
dt = 0.01; n = 0:90 - 1; t = n * dt;
f = 10; % 原始信号的频率为 10Hz
x = sin(2 * pi * f * t + 0.3); % 在计算机上的原始信号
dt = 0.1; n = 0:10 - 1; t1 = n * dt;
% 以 10Hz 的采样频率采样,为取一样的时间长度
% 序号长度为原始信号序号长度的 1/10
x1 = sin(2 * pi * f * t1 + 0.3); % 采样后的信号
subplot(3,1,1), plot(t,x), ylim([-1,1]);
title('原始信号')
% 绘出模拟原始信号,为与下图统一,采样 y 轴的范围[-1 1]用 ylim 给出
subplot(3,1,2), plot(t,x,t1,x1,'o'), ylim([-1,1]);
title('采样过程')
% 绘出在模拟信号基础上的采样过程
```

```
subplot(3,1,3),plot(t1,x1),ylim([-1,1])
title('采样后信号'),xlabel('时间/s') %绘出采样后的信号
```

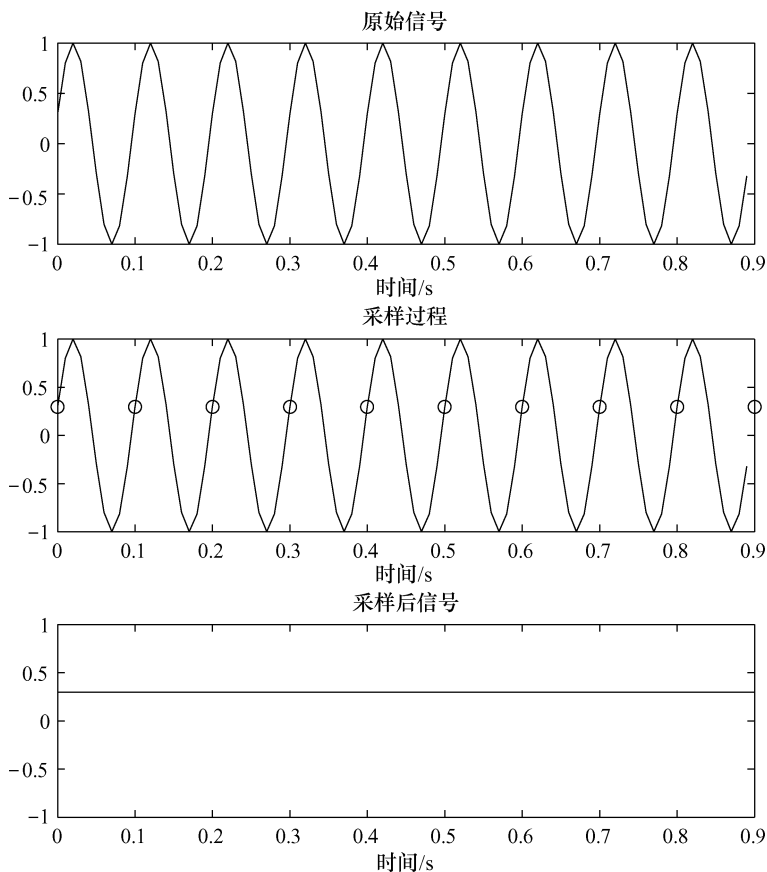


图 2-2 10Hz 的正弦信号经 10Hz 的采样频率后的表现

上图:10Hz 的模拟信号;中图:在 10Hz 的模拟信号的基础上的采样;下图:采样后绘出的信号

我们可以说,采过样的 10Hz 的信号具有“零频率”信号的外貌(图 2-2)。拿旋转的轮子来类比,闪光速率为 10Hz 的照相使得轮子看起来好像静止不动。在这个例子中,一个 10Hz 的信号表现为一个“零频率”信号,这就是采样过程造成的。我们再来考虑一个频率 9Hz 的原始正弦信号,以 0.1s 间隔的采样结果产生的信号具有 1Hz 信号的外貌(图 2-3)。这个过程可以将上述程序中的  $f=10$  改为  $f=9$ ,重新运行即可得图 2-3。这类出现与真实频率不一致的现象称为“假频”。“假频”有什么规律可循呢?如果我们按表 2-1 多做几次试验,分别观察  $f=8\text{Hz}, 7\text{Hz}, 6\text{Hz}$ , 会发现:当信号频率低于采样频率的一半时(在此处为 5Hz),采样过的信号可以反映原始信号的特征(可以修改上述程序观看效果);当信号频率超过采样频率的一半

时,就会出现数字采样过的信号与原来的信号不一致。其表现的信号频率为采样频率(此处为 $10\text{Hz}$ )减去原始信号的频率(此处为 $10\sim 9\text{Hz}$ )。这有点像我们儿时玩的折纸,即将原始信号中的频率以采样频率的一半折叠到低频中所表现的频率。当信号频率超过 $10\text{Hz}$ 时又如何呢?我们仍采用上面的 MATLAB 程序作试验,改为 $f=11, 12, 13, 14, \dots, 20$ 等值,我们会发现,这些信号采样后所表现的信号分别与 $f=1, 2, 3, 4, \dots, 10$ 所表现的频率完全一致,即出现了循环,更高的频率与此类似。

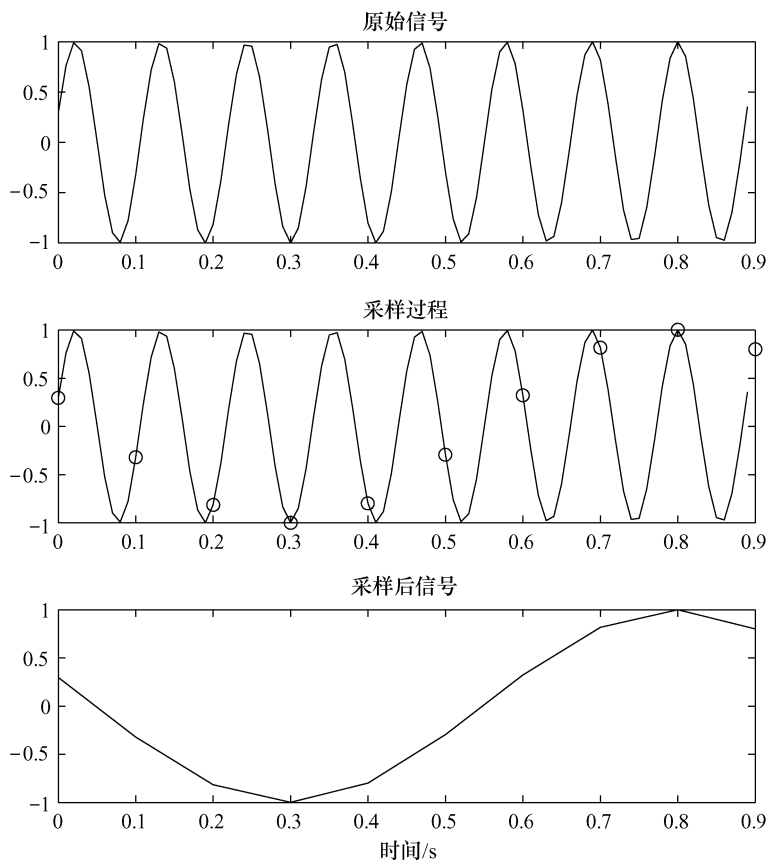


图 2-3 9Hz 的正弦信号经 10Hz 的采样频率采样后的表现

上图:9Hz 的模拟信号;中图:在 9Hz 的模拟信号基础上的采样;下图:采样后绘出的信号

表 2-1 以采样周期为 0.1s(采样频率为 10Hz)对信号采样试验

| 原信号频率/Hz | 采样频率/Hz | 采样后视频率/Hz |
|----------|---------|-----------|
| $f=10$   | 10      | 0         |
| $f=9$    | 10      | 1         |

续表

| 原信号频率/Hz | 采样频率/Hz | 采样后视频率/Hz |
|----------|---------|-----------|
| $f = 8$  | 10      | 2         |
| $f = 7$  | 10      | 3         |
| $f = 6$  | 10      | 4         |
| $f = 5$  | 10      | 5         |
| $f = 4$  | 10      | 4         |
| $f = 3$  | 10      | 3         |
| $f = 2$  | 10      | 2         |
| $f = 1$  | 10      | 1         |
| $f = 11$ | 10      | 1         |
| $f = 12$ | 10      | 2         |
| $f = 13$ | 10      | 3         |
| $f = 14$ | 10      | 4         |
| $f = 15$ | 10      | 5         |
| $f = 16$ | 10      | 4         |
| $f = 17$ | 10      | 3         |
| $f = 18$ | 10      | 2         |
| $f = 19$ | 10      | 1         |

通过上面的分析,我们可以得到:当采样频率大于信号中所含有信号最大频率的两倍时,采样后的数据可以不失真地描述信号。当采样频率不满足这个条件时,会出现频率折叠和频率重复。这就是采样定理。在数字信号处理中通常定义采样频率的一半为 Nyquist (奈奎斯特)频率。因此采样定理还可以叙述为:只有信号中的最大频率不大于 Nyquist 频率,采样后的数据才能不失真地反映信号。

## 2.2 基本信号

下面我们介绍数字信号处理中常用的几种基本信号。虽然基本信号较为简单,但所有复杂的信号均是由这些基本信号组合而成。学会分析这些信号将有助于分析各种复杂信号。

### 2.2.1 指数信号(exponential signal)

连续指数信号可表示为

$$f(t) = Ka^{cnt} \quad (2-2)$$

式中, $a$  为实数, $a > 1$ ,信号幅值随  $t$  的增加而增加,为增值函数; $0 < a < 1$ ,信号幅值随  $t$  的增加而减小,为衰减函数。实际中通常遇到的是衰减指数信号。 $c$  为常数。

离散指数信号通常表示为

$$x(n) = a^n \quad (2-3)$$

**例 2-3** 用 MATLAB 中的 stem 函数绘出  $0.5^n$  序列,  $n$  从 0 到 10。

程序如下

```
% Samp2_3
n = [0:10];           % 给出序号序列
x = (0.5).^ n;       % 给出值序列
stem(n,x)            % 以序号序列和值序列进行绘图
xlabel('n'),ylabel('x(n)');title('实指数序列');
% 必要的标记
grid on;              % 添加网格线
```

运行结果为图 2-4。可以清楚地看到,该函数为一衰减序列。跟数学中所讲的函数趋势一致。

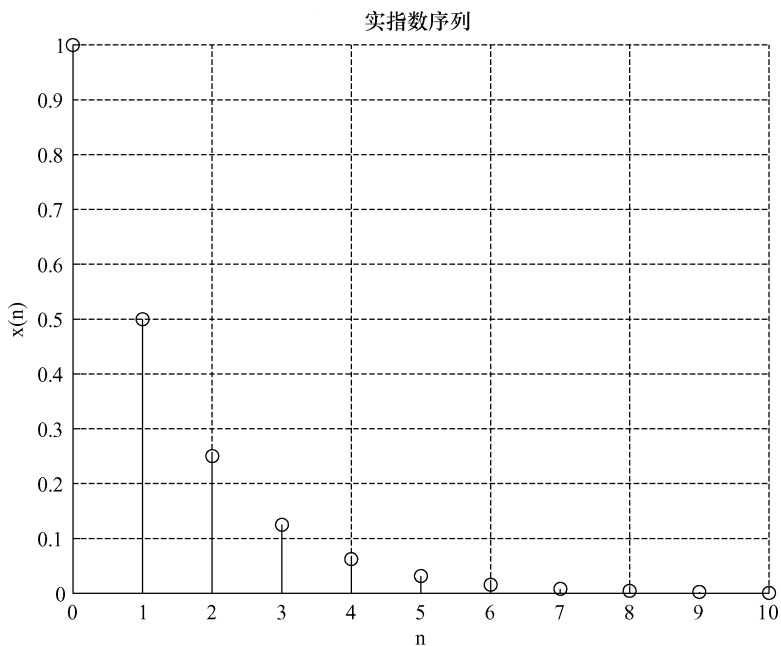


图 2-4 stem 函数绘出  $0.5^n$  序列

### 2.2.2 正弦和余弦信号 (sine and cosine signal)

正弦信号通常表示为

$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta) \quad (2-4)$$

式中,  $K$  为振幅;  $\omega$  为角频率, 单位为弧度/秒;  $\theta$  为初相位, 单位为弧度。

余弦信号和正弦信号仅在相位上差  $\pi/2$ 。正弦信号和余弦信号常借用复指数信号来表示:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos\omega t + j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos\omega t - j\sin\omega t \end{aligned} \quad (2-5)$$

离散正弦函数表示为

$$x(n) = K\sin(\omega_0 n + \theta_0) \quad (2-6)$$

下面用 MATLAB 函数来模拟正弦函数。

**例 2-4** 用 MATLAB 模拟绘制  $x(n) = 2\sin\left[0.02\pi n + \frac{\pi}{4}\right]$  函数。

程序如下:

```
% Samp2_4
n = [0:100]; % 给出序号序列
x = 2 * sin(0.02 * pi * n + pi/4); % 给出值序列
stem(n, x) % 绘值离散图
xlabel('n'); ylabel('x(n)'); title('正弦序列'); % 必要标记
grid on; % 添加网格线
```

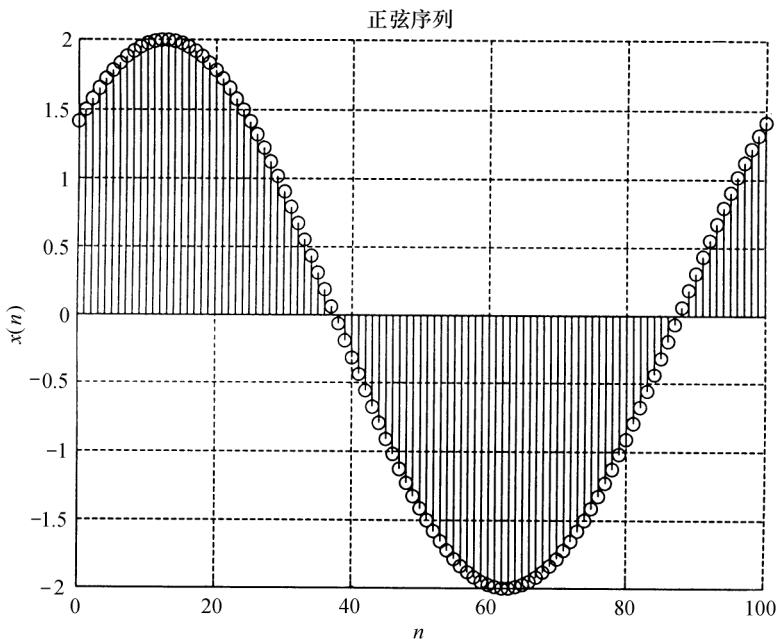


图 2-5  $x(n) = 2\sin\left[0.02\pi n + \frac{\pi}{4}\right]$  所表示的正弦函数离散序列