当代杰出青年科学文库

分形应用中的数学基础与方法

谢和平　薛秀谦　编著

国家教委跨世纪人才专项基金资助项目
国家杰出青年科学基金资助项目
煤炭科学基金资助项目

科 学 出 版 社
北 京

内　容　简　介

分形理论是研究非线性问题的一门新学科。自从20世纪70年代,曼德尔布罗特首先提出分形以来,这门学科无论是在其数学基础还是在其它学科的应用方面都得到了迅速发展。本书详细介绍了分形应用中的数学基础和方法,主要内容有:集合与度量空间,分形空间,自相似分形与自仿射分形,勒贝格测度与豪斯道夫测度,分形维数与多重维数,分形的结构与迭代函数系,分形上的动力系统与居里叶集和曼德尔布罗特集,随机分形与分形集上的随机过程,分形插值法与分形逼近法,分形边界上的狄利克雷问题,最后介绍了分形空间上的力学问题。各章都附有一定数量的例子和练习。

本书的编写注意了分形理论中数学基础的系统性和方法的实用性,可供从事于分形研究的科技人员使用,也可以作为高等院校的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

分形应用中的数学基础与方法/谢和平,薛秀谦编著.—北京:科学出版社,1997

(当代杰出青年科学文库)

ISBN 7-03-005703-1

Ⅰ.分…　Ⅱ.①谢…②薛…　Ⅲ.分形学-应用-数学基础　Ⅳ.O19

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第25661号

责任编辑:林　鹏　范庆奎

责任印制:钱玉芬/封面设计:王　浩

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

1997年3月第　一　版　　开本:850×1168　1/32

2005年3月第一次印刷　　印张:6 3/4

印数:3 801—5 800　　字数:176 000

定价:28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

分形理论是现代非线性科学研究中十分活跃的一个数学分支,在物理、地质、材料科学以及工程技术中都有着广泛的应用。特别是随着电子计算机的迅速发展和广泛应用,分形的思想和方法在模式识别、自然图象的模拟、信息讯号的处理以及艺术的制作等领域都取得了极大的成功。分形理论的研究对象是自然界和非线性系统中出现的不光滑和不规则的几何形体;分形应用中的数学基础是分形几何学。

我们编写本书的目的是想为从事分形应用的科技工作者和对分形理论有兴趣的研究人员提供一本实用读物。本书既注意到分形理论中数学基础的系统性和方法的实用性,又尽量注意不使其成为抽象数学推导的汇集。因此,在给出每个精确结论的同时,对于其证明过程,有些仅叙述了证明大意,有些没有给出证明过程。书后列出了一些参考文献,以便有兴趣的读者做进一步的了解。

全书共分六章。第一章介绍了与分形有关的数学的基本概念,内容有集合与集合序列的极限集、代数结构与波雷尔集、空间与度量、完备度量空间与分形空间、自相似分形与自仿射分形;第二章介绍了勒贝格测度的基本理论、豪斯道夫测度与豪斯道夫维数、分形维数与多重分形维数,给出了自相似分形维数的计算公式;第三章讨论了分形的结构性质,介绍了度量空间上的迭代函数系与动力系统、居里叶集、曼德尔布罗特集,给出了几个利用计算机绘制分形图形的算法;第四章讨论了随机分形,内容有概率空间与稳定分布、随机分形模型、布朗运动以及分形集上的随机过程;第五章讨论了分形数值方法,在介绍经典的多项式插值与样条插值的基础上,详细讨论了近年来发展起来的分形插值理论与方法、分形空间中的有限元方法与分形逼近法;第六章讨论了分形边界

上的狄利克雷问题,并利用索伯列夫空间的理论探讨了分形空间中的一些力学问题。在每章之后,给出了一定数量的练习题,这些练习是为了理解有关的概念、定理与方法而设计的。由于我们水平有限,错误与不当之处,恭请读者批评指正。

本书的出版得到首届国家杰出青年科学基金和首批国家教委跨世纪人才专项基金以及煤炭部科教司的资助。

谢和平　薛秀谦

1996.9.16

目　录

绪　　论

分形理论是非线性科学研究中十分活跃的一个分支,它的研究对象是自然界和非线性系统中出现的不光滑和不规则的几何形体[1-15],分形理论的数学基础是分形几何[1-8]。

分形理论的发展大致可分为三个阶段[17]。下面简要回顾一下分形理论在这三个历史阶段的发展过程。

第一阶段为1875年至1925年,在此阶段,人们已认识到几类典型的分形集,并且力图对这类集合与经典几何的差别进行描述、分类和刻画。19世纪,尽管人们已能区别连续与可微的曲线,但是普遍认为连续而不可微的情形是极为例外的,并且在理论研究中应排除这类“怪物”,而且特别认为一条连续曲线上不可微的点应当是极少的。在1872年,维尔斯特拉斯(Weierstrass)证明了一种连续函数(称为维尔斯特拉斯型函数图,0.1)在任意一点均不具有有限或无限导数。这一结果在当时曾引起了极大的震动;但是人们认为维尔斯特拉斯型的函数是极为“病态”的例子。即使如此,人们仍从不同方面推广了上述函数,并对这类函数的奇异性质作了深入的研究,获得了丰富的结果。冯·科赫(Von Koch)于1904年通过初等方法构造了如今被称为冯·科赫曲线(图0.2)的处处不可微的连续曲线,并且讨论了该曲线的性质。由于该曲线的构造极为简单,从而改变了人们认为连续不可微曲线的构造一定非常复杂的看法。特别重要的是,该曲线是第一个人为构造的具有局部与整体相似的结构的例子,它被称为自相似结构。

冯·科赫曲线的构造过程如图0.3,设E_0是单位长直线段,E_1是由E_0除去中间1/3的线段、而代之以底边在被除去的线段

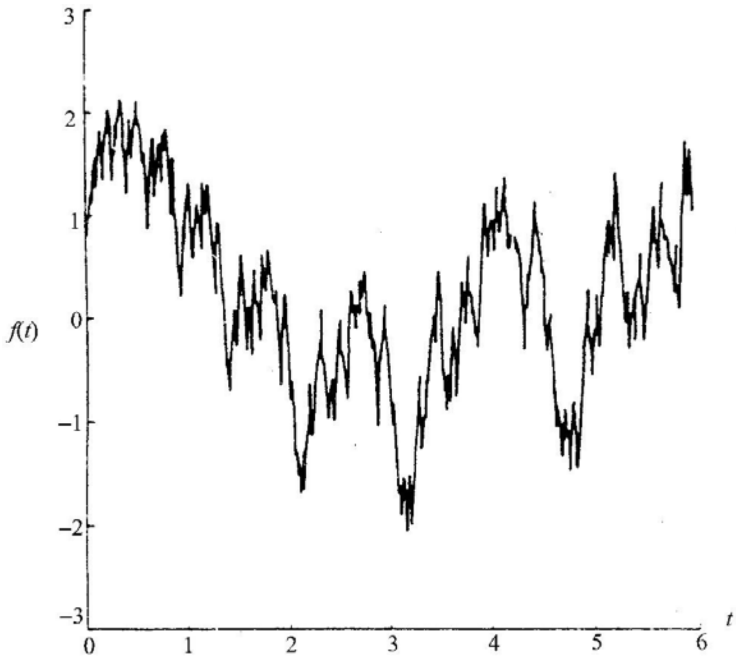

图 0.1　维尔斯特拉斯函数 $f(t)$ 的图象

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-k/2}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}t\right)$$

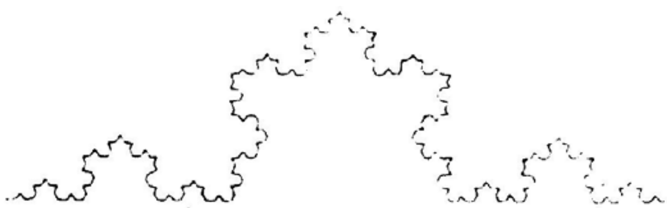

图 0.2　冯·科赫曲线

上的等边三角形的另外两条边所得到图形，它包含 4 个线段。对 E_1 的每个线段都进行同一过程来构造 E_2，依此类推。于是得到

一个曲线序列$\{E_k\}$，其中 E_k 是把 E_{k-1} 的每一个直线段中间 1/3 用等边三角形的另外两边取代而得到的；当 k 充分大时，曲线 E_k 和 E_{k-1} 只在精细的细节上不同，而当 $k\to\infty$ 时，曲线序列$\{E_k\}$趋于一个极限曲线 F，称 F 为冯·科赫曲线。

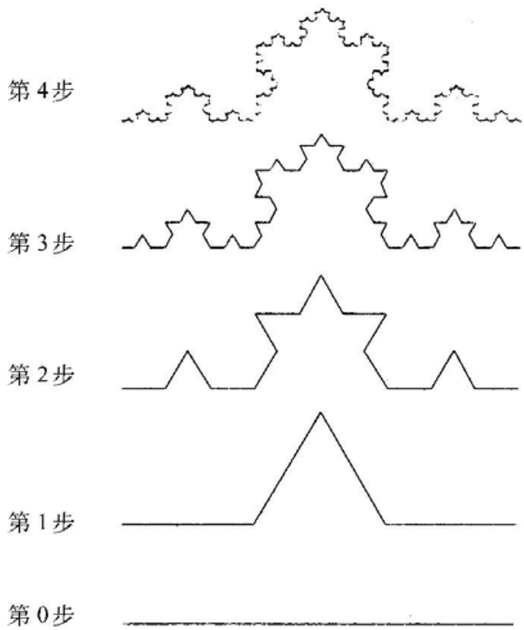

图 0.3　冯·科赫曲线之构造过程

皮亚诺(Peano)于 1890 年构造出填充平面的曲线图 0.4，这一曲线出现后，人们提出应正确考虑以往的长度与面积的概念。皮亚诺曲线以及其它的例子导致了后来拓扑维数的引入。

康托尔(Cantor)于 1872 年引入了一类全不连通的紧集 F，F 被称为康托尔三分集。康托尔三分集的构造过程为图 0.5，设 E_0 是单位长直线段，E_1 是由 E_0 除去中间 1/3 的线段所得到图形，它包含 4 个线段。对 E_1 的每个线段都进行同一过程来构造 E_2，依此类推。于是得到一个曲线序列$\{E_k\}$，其中 E_k 是把 E_{k-1} 的每一

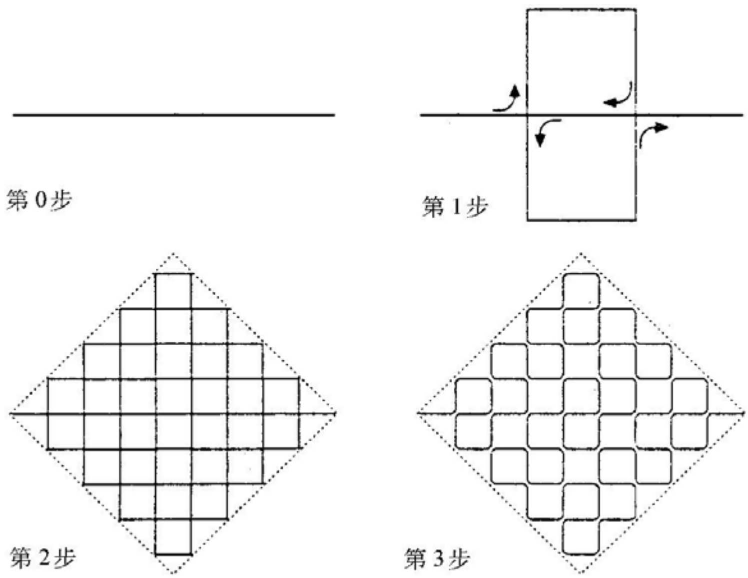

图 0.4　皮亚诺曲线

个直线段中间 1/3 除去而得到的；当 k 充分大时，曲线 E_k 和 E_{k-1} 只在精细的细节上不同，而当 $k\to\infty$ 时，曲线序列 $\{E_k\}$ 趋于一个极限曲线 F，称 F 为康托尔三分集。在当时，人们认为这类集合在传统的研究中是可以忽略的。但是进一步的研究结果表明，这类集合在象三角级数的唯一性这样重要问题的研究中不仅不能忽略，而且起着非常重要的作用。

一类极为典型的随机分形集，即布朗(Brown)运动，在那时已经受到物理学家的重视。珀瑞(Perrin)在 1913 年对布朗运动的轨迹图 0.6 进行了深入的研究，明确指出布朗运动作为运动曲线不具有导数。他的这些论述在 1920 年左右使年轻的维纳(Wiener)受到震动，并促使他建立了很多布朗运动的概率模型。为了表明自然混乱的极端形式，维纳采用了“混沌”(Chaos)一词。珀瑞曾经注意到：一方面，自然界的几何是混乱的，不能用通常形式

的欧氏几何或微积分中那种完美的序表现出来;另一方面,它能使人们想到数学的复杂性。

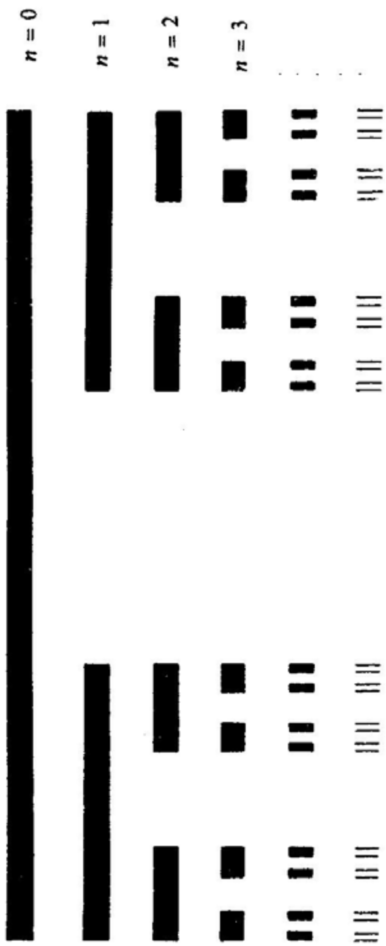

图 0.5 康托尔三分集

曼德尔布罗特(Mandelbrot)在回顾珀瑞及维纳的工作以及分形几何的发展历史时指出,分形几何以下面两种选择为其特征:一是在自然界的混沌中选择问题,因为描述整个混沌是既无意义又

图 0.6 R^2 上的布朗运动

无可能的主张;二是在数学中选择工具。这两种选择逐渐成熟并引发出了新东西,在无序混沌与欧氏几何过分的有序之间,产生了一个具有分形序的新领域。由于非常“复杂”的集合的引入,而且长度、面积等概念必须重新认识。为了测量这些集合,同时为了更一般的理论,闵可夫斯基(Minkowski)于 1901 年引入了闵可夫斯基容度。进而,豪斯道夫(Hausdorff)于 1919 年引入了豪斯道夫测度和豪斯道夫维数。这些概念实际上指出了为了测量一个几何对象,必须依赖于测量方式以及测量所采取的尺度。

总之,在分形理论发展的第一阶段,人们已经提出了典型的分形对象及其相关问题并为讨论这些问题提供了最基本的工具。

第二阶段大致为 1926 年到 1975 年,在这半个世纪里,人们实际上对分形集的性质做了深入的研究,特别是维数理论的研究已获得了丰富的成果。可以说第二阶段更为系统、深入的研究深化了第一阶段的思想,不仅逐渐形成理论,而且将研究范围扩大到数学的许多分支中。贝西柯维奇(Besicovitch)及其他学者的研究工作贯穿了第二阶段。他们研究了曲线的维数、分形集的局部性质、分形集的结构、S-集的分析与几何性质、以及在数论、调和分析、几何测度论中的应用。他们的研究结果极大地丰富了分形几何理论。在此期间,维数理论得到了进一步发展并日臻成熟。Bouligand 于 1928 年引入了 Bouligand 维数，Poutrjagin 与 Schnirelman 于 1932 年引入覆盖维数，柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）与 Tikomirov 于 1959 年引入熵维数。另外，刻画集合“大小”的容量及容量维数亦引入到分析之中。由于维数可以从不同的角度来刻画集合的复杂性，从而起了重要的作用。在这一阶段，列维（Levy）在下面两个方面的工作极为重要，其一，他第一个系统地研究了自相似集，我们如今研究的许多自相似集的性质可追溯到他的工作；其二，他建立了分数布朗运动的理论，实际上，他是随机分形理论系统研究的最重要的先驱之一。以 Salem 与 Kahane 为代表的法国学派从稀薄集的研究出发，对各种类型的康托尔集及稀薄集作了系统的研究，应用了相应的理论方法与技巧，并在调和分析理论中得到了重要的应用。同时，维数的乘积理论、投影理论、位势方法、网测度技巧、随机技巧均先后建立并成熟，这已使分形几何的研究具有自己的特色与方法。

尽管在此阶段分形的研究取得了许多重要的结果，并使这一学科在理论上初见雏形，但是绝大部分从事这一领域工作的人主要局限于纯数学理论的研究，而未与其它学科发生联系。另一方面，物理、地质、天文学和工程学等等学科已产生了大量与分形几何有关的问题，迫切需要新的思想与有力的工具来处理。正是在这种形势下，曼德尔布罗特以其独特的思想，自 60 年代以来，系统、深入、创造性地研究了海岸线的结构、具强噪声干扰的电子通讯、月球的表面、银河系中星体的分布、地貌的生成的几何性质等等典型的自然界中的分形现象，并取得了一系列令人瞩目的成功。

第三阶段为 1975 年至今，是分形几何在各个领域的应用取得全面发展，并形成独立学科的阶段。曼德尔布罗特将前人的结果进行总结，集其大成，于 1975 年以“分形：形状、机遇和维数”为名发表了他的划时代的专著。此专著中，第一次系统地阐述了分形几何的思想、内容、意义和方法。此专著的发表标志着分形几何作为一个独立的学科正式诞生，从而把分形理论推进到一个更为迅猛发展的新阶段。

自 1975 年以来,分形理论无论是在数学基础还是在应用方面都有快速发展。由于分形几何极强的应用性,它在物理的相变理论,材料的结构与控制,力学中的断裂与破坏,高分子链的聚合,模式识别,自然图形的模拟,酶的生长等领域取得令人瞩目的成功。由于应用学科和计算机制图的刺激与推动,分形的数学理论也得以迅速发展,并且目的更明确,思想更深入。近年来,在维数的估计与算法,分形集的生成结构,分形的随机理论,动力系统的吸引子理论与分形的局部结构已获得较深入的结果,其势方兴未艾。在此期间,有关专著纷纷问世,研究工作的数量以几何级数增长,国际专题会议此起彼伏,特别是在 80 年代中期,令人感到了雷霆万钧之势。为此,有人曾经指出:19 世纪后半期似乎是科学与数学变得更加专门化的时期。令人注目的是,在近 10 年中,非线性动力学与分形使上述趋势得以逆转:两者均已被应用到对一系列深层次的交叉学科的研究中。

另外,自 80 年代以来,随着分形的发展,分形自身的一些基本问题,诸如:分形几何的形的刻画,维数的本质,维数的封闭性等已十分尖锐地摆在人们的面前,这些问题已直接影响到分形的实质性的、深入的研究。因此,这些基本问题将是分形理论研究的焦点。

什么是分形呢? 事实上,目前对分形还没有严格的数学定义,只能给出描述性的定义。粗略地说,分形是对没有特征长度(所谓特征长度,是指所考虑的集合对象所含有的各种长度的代表者,例如一个球,可用它的半径作为它的特征长度。)但具有一定意义下的自相似图形和结构的总称。曼德尔布罗特最先引入分形(fractal)一词,意为破碎的,不规则的,并且曾建议将分形定义为整体与局部在某种意义下的对称性的集合,或者具有某种意义下的自相似集合;他也曾给出一个尝试性的定量刻画,说分形是其豪斯道夫维数严格大于其拓扑维数的集合。但是所有这些定义都不够精确、不够全面。英国数学家 Falconer 在其所著《分形几何的数学基础及应用》一书中认为,分形的定义应该以生物学家给出“生命”

定义的类似方法给出,即不寻求分形的确切简明的定义,而是寻求分形的特性,将分形看作具有如下所列性质的集合 F:

1. F 具有精细结构,即在任意小的比例尺度内包含整体。

2. F 是不规则的,以致于不能用传统的几何语言来描述。

3. F 通常具有某种自相似性,或许是近似的或许是统计意义下的。

4. F 在某种方式下定义的“分维数”通常大于 F 的拓扑维数。

5. F 的定义常常是非常简单的,或许是递归的。

例如,冯·科赫曲线及康托尔三分集被看作分形的典型例子。他的这些观点已为多数人所接受。

人们用分维数来刻画分形集的复杂性,正如用整数维数来刻画欧氏几何中的对象一样。众所周知,点是零维的,直线是一维的,平面是二维的。当我们测量几何图形的长度和面积时,分别用单位长线段与单位面积的正方形来度量,因为线段与正方形的欧氏维数分别是 1 和 2 。若用线段来测量正方形,其结果为无穷,说明所用的尺度太“细”;反之,若用正方形为尺度来度量线段,所得的结果为 0,说明所用的尺度太“粗”。因此在测量集合时,其测量结果与所采用的尺度有关。特别是,经典几何对象的测量只容许整数维的尺度。对于分形曲线比如冯·科赫曲线,1 维尺度太细而 2 维尺度太粗,即在 1 维尺度下,它的长度为无限,而在 2 维尺度下,它的面积为 0。因此,可将冯·科赫曲线看成是一个介于 1 维与 2 维之间的几何对象,用非整数维的尺度来测量它可能正合适,恰好能定量地表现冯·科赫曲线的复杂程度。因此,分数维可用于定量描述分形集的复杂性。由于分形集的复杂性,对于不同的测量对象需用不同的测量方法。关于分维数已有多种定义。豪斯道夫维数是基于豪斯道夫测度而建立起来的一种分形维数,它是分形几何的维数理论的基础;但是,计算一个分形的豪斯道夫维数往往是复杂而又困难的,这种计算上的困难极大地限制了豪斯道夫维数的应用。盒维数或称盒计数维数是一个具有广泛应用的

维数，计算一个分形的盒维数是相对简单的，计算过程主要依据观察和估计；比如，设 F 是一个平面上的有界分形图形，要计算 F 的盒维数，可以用一个尺度为 δ 的盒子来覆盖 F，令 $N_\delta(F)$ 是与 F 相交的盒子数，考察对数比

$$D = \frac{\ln N_\delta(F)}{\ln \delta}$$

当 δ 充分小时，对数比 D 可以近似地看成分形 F 的盒维数。盒维数具有维数的基本性质，它也常常被称为柯尔莫哥洛夫熵、熵维数、容量维数、对数维数和信息维数。在许多情形下，一个分形集的盒维数常常等于它的豪斯道夫维数。但是，上述定义的盒维数有一个严重的不足，即它可能使得一个“小”的点集（比如可数点集）具有一个非零的维数，从而使维数的概念陷入混乱，这就严格地限制了盒维数的应用。

目前还没有对于所有分形都适用的维数定义，统称那些取非整数值的维数为分维数，或称为分形维数。大多数分形维数的定义是基于“尺度 δ 下的度量”这一思想。设 F 是一个分形集，对于每个 $\delta>0$，忽略尺度小于 δ 的不规则性，并且考察测量值 $M_\delta(F)$ 在 $\delta\to 0$ 时的状况。如果存在两个非负常数 c 和 s，使得 $M_\delta(F)$ 满足幂定律

$$M_\delta(F) \sim c\delta^{-s}$$

则称 F 具有“维数” s，而 c 可以看作集 F 的 s 维长度。

分形是人们在自然界和社会实践活动中所遇到的不规则事物的一种数学抽象。人们对于分形的兴趣是由于可以用它来描述和解决一些实际问题，正如历史上人们对于欧氏几何与微积分的应用一样，这种描述和应用允许在一定尺度下的近似性。同样，在利用分形来描述海岸线、云层的边界、地表的形状、岩石的裂缝、流体的湍流以及一些经济现象时，也具有一定意义下近似性。实际上，现实世界中没有真正的分形，正如曼德尔布罗特所强调的那样，自然界的分形与我们数学中讨论的分形是有区别的。

分形理论的发展是迅猛的，分形的思想和方法正日益影响着

现代社会的生活和活动,随着分形的广泛应用,一些新的数学方法和数学工具被不断提出,所有这些都显示了分形理论的强大生命力。

第一章　集合、分形与空间

集合与空间是分形理论中的两个最基本的数学概念。许多分形可以看作度量空间中一组特殊的函数——迭代函数系的不变集。分形空间是一种特殊的度量空间。本章讨论与分形有关的集合、映射和度量空间的一些性质，介绍集合序列的极限集、度量空间中的紧集、完备度量空间以及分形空间等概念。

第一节　集合与分形

所谓集合是指具有某种共同特性的元素的全体。在分形理论中，人们往往在 n 维欧氏空间 R^n 中讨论问题，因而提到的集合常常与 R^n 有关，或者就是 R^n 的子集，除非特别声明。

集合常用大写字母表示。在本书中，限定 R 表示全体实数的集合，即实直线，R^2 表示 2 维实平面，R^n 表示 n 维欧氏空间。Z 表示全体整数集，Q 表示全体有理数集，R^+ 表示正实数集，Z^+ 表示正整数集，C 表示全体复数 $a+bi$ 的集合，其中 a,b 是任意给定的实数，$i^2=-1$；$\hat{C}=C\cup\{\infty\}$，$\varnothing$表示不含有任意元素的空集，用形式$\{x$:条件$\}$表示由满足“条件”的所有元素构成的集合。例如，R^n 的一个中心在 x，半径为 r 的闭球，记为 $B(x,r)$或 $B_r(x)$，可以写成

$$B_r(x)=\{y\in R^n:|y-x|\leqslant r\}$$

R^n 的一个中心在 x，边长为 $2r$ 的超立方体可以写成 $V=\{y\in R^n:|y_i-x_i|\leqslant r, i=1,2,\cdots,n\}$，其中

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

$$|y - x| = \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{1/2}$$

显然,R 中的超立方体是闭区间$[x - r, x + r]$;R^2 中的超立方体是一个正方形区域。

如果 x 是集合 A 的元素,则称 x 属于 A,记作 $x \in A$;否则称 x 不属于 A,记为 $x \notin A$。如果集合 B 是由集合 A 的部分元素组成的集合,则称 B 是 A 的一个子集,记为 $B \subset A$。规定空集$\varnothing$是任意一个集合的子集。给定两个集合 A, B,如果 $B \subset A$ 并且 $A \subset B$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$。

在实直线 R 中,常见的子集是区间,区间有以下几种形式:

开区间$(\alpha,\beta) = \{x: \alpha < x < \beta\}$;

闭区间$[\alpha,\beta] = \{x: \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$;

半开半闭区间$(\alpha,\beta] = \{x: \alpha < x \leqslant \beta\}$;

或$[\alpha,\beta) = \{x: \alpha \leqslant x < \beta\}$;

其中α,β 可以是实数,也可以是正无穷大 $+\infty$ 或负无穷大 $-\infty$。并且当α,β 为 $-\infty$ 或 $+\infty$ 时,“$\leqslant$”理解为“$<$”。

给定一个基本集 X, X 的全体子集组成的集合记为 2^X,称 2^X 为 X 的子集族。在 2^X 中,定义集合的运算如下:设 A, B 是基本集合 X 的任意两个子集,定义

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

$$A \backslash B = \{x: x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}$$

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \text{ 并且 } y \in B\}$$

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

称 $A \cup B$ 是 A 与 B 的并集,$A \cap B$ 是 A 与 B 的交集,$A \backslash B$ 是 A 减去 B 的差集,有时也用 $A - B$ 表示 $A \backslash B$。$A \times B$ 是 A 与 B 的积集,它是由 A 与 B 的二元有序对组成的集。例如 $R^2 = R \times R$, $A \triangle B$ 称为 A 与 B 的对称差集(图 1. 1)。特别地,如果 $A \cap B = \varphi$,则 A 与 B 的并集也称为 A 与 B 的和集,记为 $A + B = A \cup B$;称

差集 $X\backslash A$ 为 A 的余集,记为 $A^c = X\backslash A$,即余集 A^c 是从基本集 X 中去掉 A 中所有元素所剩余的元素的集合。

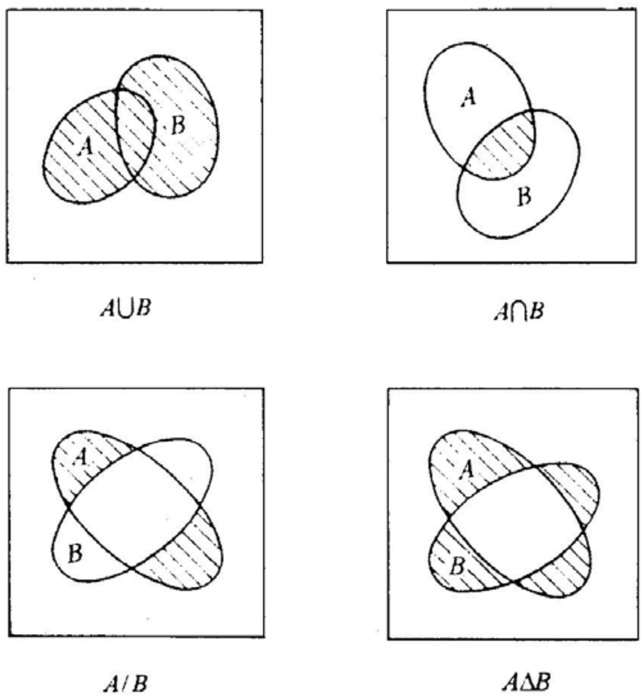

图 1.1　集合 A 与 B 的并、交、差的运算

一般地,给定一个指标集 I 及 X 的一个子集类$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$,定义

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x: 存在某个\alpha\in I,使\ x\in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x: 对所有\alpha\in I, x\in A_\alpha\}$$

可以证明集合的并、交运算具有下列性质

1.并、交的幂等性　$A\cup A = A, A\cap A = A$。

2.空集是加法的零元　$A\cup\varnothing = A$。

3.并、交的交换律　$A\cup B = B\cup A, A\cap B = B\cap A$。

4.并、交的结合律　$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$。

5.分配律　$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$。

6.并、交的单调性　如果 $A\subset B$,则对于任意的集 C, $A\cup C\subset B\cup C$, $A\cap C\subset B\cap C$。

余运算或称减法运算具有下列性质:

7.如果 $A\subset B$,则 $A-B=\varnothing$。

8.余分配律　$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$。

9.$(C-A)-B = C-(A\cup B)$。

10.如果 $A\subset C$, $B\subset C$,则 $A-B = A\cap(C-B)$。

11.德·摩根律　设 S 是任意一个集,$\{A_n: n\in N\}$ 是 S 中的一个集族,则

$$S-\bigcup_{n\in N}A_n=\bigcap_{n\in N}(S-A_n)$$

$$S-\bigcap_{n\in N}A_n=\bigcup_{n\in N}(S-A_n)$$

即并集的余集等于每个集的余集的交集,而交集的余集等于每个集的余集的并集。

现在仅证 11 的第一式。记 $S-\bigcup_{n\in N}A_n$ 为 P,记 $\bigcap_{n\in N}(S-A_n)$ 为 Q,只证 $P=Q$。设 $x\in P$,按定义有 $x\in S$ 而且 $x\notin\bigcup_{n\in N}A_n$。因此,对于每个 $n\in N$, $x\notin A_n$,因而 $x\in S-A_n$,即 $x\in Q$ 这就是说,凡 P 中的元素属于 Q,所以 $P\subset Q$。

反之,设 $x\in Q$,则对于任何 n,有 $x\in S-A_n$,即 $x\in S$,而且 $x\notin A_n$,因此 $x\notin\bigcup_{n\in N}A_n$,所以 $x\in S-\bigcup_{n\in N}A_n = P$,这就是说凡 Q 中的元素必属于 P,所以 $P\subset Q$。

综上所述,得到 $P=Q$。

在分形集的构造中,常常需要集合序列的极限的概念。下面叙述这个概念。

给定基本集 X,例如 X 就是实直线 R 或实平面 R^2。设$\{A_n: n\in Z^+\}$ 是 X 的一个集合序列。定义这个集合序列的上限集是由属于这个集合序列的无限个集合的那些元素的全体所组成的集合,记为$\overline{\lim_n} A_n$ 或$\lim_n \sup A_n$;定义其下限集为由属于该集合序列

中从某个集合以后所有集合的那些元素的全体组成的集合,记为 $\underline{\lim}_{n} A_n$ 或 $\liminf_{n} A_n$。容易得出

$$\underline{\lim}_{n} A_n \subset \overline{\lim}_{n} A_n$$

并且可以证明

$$\overline{\lim}_{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

$$\underline{\lim}_{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

现在证明第一式。记 $P = \overline{\lim}_{n} A_n$, $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$。对于 P 中的任何元素 x,由上限集的定义,x 属于$\{A_n\}$中的无限个集,不妨设 x 同时属于集 $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots, n_k < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$。因此,对于任何自然数 n,当 $n_k > n$ 时,$x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$,所以 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$,从而 $P \subset Q$。反之,在 Q 中任意取一个元素 y,现证在$\{A_n\}$中必有无限个集同时含有 y。事实上,取 $n = 1$,因为 $y \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$,所以必存在自然数 n_1,使得 $y \in A_{n_1}$;其次,因为 $y \in \bigcup_{m=n_1+1}^{\infty} A_m$,所以必存在自然数 $n_2 > n_1$,使得 $y \in A_{n_2}$;这样的过程一直进行下去,得到一列自然数$\{n_k\}$,$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$,而集 $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_1}, \cdots$都含有元素 y。因此 $y \in P$,从而 $Q \subset P$。综上所述得,$P = Q$。

如果集合序列$\{A_n : n \in Z^+\}$的上限集和下限集相等,

$$\underline{\lim}_{n} A_n = \overline{\lim}_{n} A_n$$

则称集合序列$\{A_n : n \in Z^+\}$收敛于 A,称集合 A 为集合序列$\{A_n : n \in Z^+\}$的极限集,记为 $A = \lim_{n \to \infty} A_n$。

例如,在 R 中,取 $A_n = [0, 1 + 1/n]$, $n \in Z^+$,则 $\overline{\lim}_{n} A_n = \underline{\lim}_{n} A_n = [0, 1]$;从而闭区间$[0,1]$是闭区间序列 $A_n = [0, 1 + 1/n]$, $n \in Z^+$ 的极限集。

称集合序列$\{A_n : n \in Z^+\}$是单调增加(减少)序列,如果对每个

n,成立

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ 或 } A_{n+1} \subset A_n$$

定理 1.1.1[11] 单调集列是收敛的。并且,

若$\{A_n : n \in Z^+\}$是单调增加集列,则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若$\{A_n : n \in Z^+\}$是单调减少集列,则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

例 1.1.1 康托尔(Cantor)三分集的构造。

设 X 是实直线 R 上的一个单位闭区间$[0,1]$。对 X 三等分,去掉开区间 $I^{(1)} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$得 $A_1 = X \setminus I^{(1)} = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$。再对 A_1 的两个区间分别三等分,去掉开区间 $I_1^{(2)} = \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$与 $I_2^{(2)} = \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$得 $A_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$,依次进行下去,第 n次三等分去掉的开区间为 $I_1^{(n)} = \left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right)$ $I_2^{(n)} = \left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right)$,…,$I_{2^{n-1}}^{(n)} = \left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$得 A_n。从而得到一个单调减少集列$\{A_n, n = 1,2,\cdots\}$,因此有一个极限集 $F = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,称 F 为康托尔三分集(图 1.2)。它是一个分形,并且是自相似的。

在分形理论或其它自然科学研究中,人们要通过集合或元素的相互联系去认识事物的规律性,因此往往要求对某些运算封闭的集类。下面讨论一种特殊的集合,即 σ 代数或称为波雷尔(Borel)体;它在测度理论中占有重要的作用。

设 X 是一个基本集,例如设 X 为 n 维欧氏空间 R^n。令 $\mathscr{L}$是由 X 的某些子集组成的一个非空集类。

定义 $\mathscr{L}$为 X 的一个半集代数,如果满足

(1) $X \in \mathscr{L}, \varphi \in \mathscr{L}$;

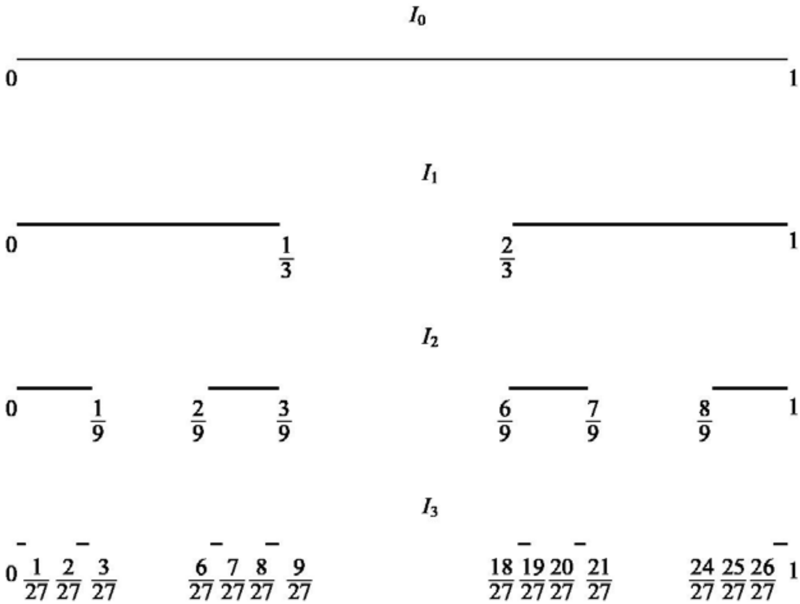

图 1.2　康托尔三分集的构造

(2)　若 $A, B\in\mathscr{L}$，则 $A\cap B\in\mathscr{L}$；

(3)　若 $A, A_1\in\mathscr{L}$，$A_1\subset A$，则存在 n 及 $A_2, \cdots, A_n\in\mathscr{L}$ 两两不交并且满足 $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$。

例 1.1.2　设 $X=R$，令 $\mathscr{L}^1=\{A: A=R$ 或 $[a, b)$ 或 $(-\infty, b)$ 或 $[a, +\infty)$；$a, b\in R\}$，则 $\mathscr{L}^1$ 是 R 上的半集代数。

例 1.1.3　设 $X=R^2$，令 $\mathscr{L}^2=\{A=[a, b): a=(a_1, a_2)$；$a_1, a_2\in R$ 或 $=-\infty$；$b=(b_1, b_2)$，$b_1, b_2\in R$ 或 $=+\infty\}$，其中 $[a, b)=\{(x, y): a_1\leqq x<b_1, a_2\leqq y<b_2\}$；当 a_1 或 $a_2=-\infty$ 时，$\leqq$ 理解成 $<$，则 $\mathscr{L}^2$ 是 R^2 上的半集代数。

半集代数是从实直线上的区间类、实平面上矩形类抽象出来的一种集类，有时也称为半布尔代数或半环。

性质 1.1.1　若 $\mathscr{L}$ 是半集代数，$A\in\mathscr{L}$，则存在两两不交的 $A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{L}$，使得 $A^c=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$。

证明　设 $A\in\mathscr{L}$，则 $A\subset X\in\mathscr{L}$，因而存在 $A_1, A_2, \cdots, A_n\in\mathscr{L}$，

$A, A_1, \cdots, A_n$ 两两不交且 $X = A + \bigcup_{k=1}^{n} A_k$,于是 $A^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$。

设 $\mathscr{F}$是由基本集 X 组成的一个非空集类。定义 $\mathscr{F}$是 X 的一个集代数或称为布尔代数,如果 $\mathscr{F}$满足

(1) $X \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A, B \in \mathscr{F}$则 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A \in \mathscr{F}$则 $A^c \in \mathscr{F}$。

例 1.1.4 设 $\mathscr{L}^1$ 是 R 上的形同例 1.1.2 所定义的半集代数,令 $\mathscr{F} = \{ A: A \subset R$,存在 $\mathscr{L}^1$ 中的两两不交的区间 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,使得 $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \}$,则 $\mathscr{F}$是 R 上的集代数。

一般地,成立下面的结论:

定理 1.1.2 如果 $\mathscr{L}$是 X 的一个半集代数,则

$$\mathscr{F} = \{ A: A \subset X, A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k ; n > 1, A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 是 } \mathscr{L} \text{的两两不交的集合} \}$$

是集代数;并且 $\mathscr{F}$是包含 $\mathscr{L}$的最小集代数。即若 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{L}$, $\mathscr{F}'$是集代数,则 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$。记包含 $\mathscr{L}$的最小集代数为 $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathscr{L})$。

证明 由于集代数对有限并运算封闭,故若 $\mathscr{F}$是包含 $\mathscr{L}$的集代数,则必有 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$。因此如果 $\mathscr{F}$是集代数,则 $\mathscr{F}$必是包含 $\mathscr{L}$的最小集代数,现只证 $\mathscr{F}$是集代数。

由于 $X \in \mathscr{L} \subset \mathscr{F}$,以及性质知要证 $\mathscr{F}$是集代数,只需要证:若 $A, B \in \mathscr{F}$,则 $A \cap B, A^c \in \mathscr{F}$。事实上,如果 $A, B \in \mathscr{F}$则由 $\mathscr{F}$的定义可知,存在 $\mathscr{L}$的两两不交的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_m$,使得

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

由于

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j$$

由半集代数定义知 $A_i \cap B_j \in \mathscr{L}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, m$ 且两两不交,从而 $A \cap B \in \mathscr{F}$,即 $\mathscr{F}$对有限交封闭。而

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

由性质 1.1.1 知道 A_i^c 是 $\mathscr{L}$ 中有限个两两不交集的并,故 $A_i^c \in \mathscr{F}$,再由 $\mathscr{F}$ 对有限交运算封闭即知 $A^c \in \mathscr{F}$。

从而半集代数与集代数有着密切的关系。集代数是对有限并、有限交封闭的集类。下面再定义一种对可数运算封闭的集类。

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个非空子集类。定义 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个σ 代数,如果 $\mathscr{A}$ 满足

(1) $X \in \mathscr{A}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{A}$,则 $A^c \in \mathscr{A}$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$,则 $\bigcup_{k=1}^{n} \in \mathscr{A}$。

可以证明[11],X 的任意一个非空子集族都可以扩张成为 X 的一个σ 代数。

例 1.1.5 R 的σ 代数的构造。设 $\mathscr{L}$ 是例 1.1.2 中的半集代数,则由 $\mathscr{L}$ 扩张而成的最小的σ 代数,记为 $\mathscr{B}$,叫做 R 上的波雷尔(Borel)体,$\mathscr{B}$ 中的元称为 R 上的波雷尔集。

R 上的波雷尔体 $\mathscr{B}$ 也可以通过 R 上的有限半开半闭区间的集类

$$\mathscr{P} = \{ \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] : -\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < +\infty, n = 1, 2, \cdots \}$$

来生成,其中 $(a, a] \triangleq \varphi$。

波雷尔体 $\mathscr{B}$ 具有性质:

$$(-\infty, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n] \in \mathscr{B}$$

$$\{a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, a] \in \mathscr{B}$$

$$(a, b) = (a, b] - \{b\} \in \mathscr{B}$$

$$[a, b] = (a, b] \cup \{a\} \in \mathscr{B}$$

$$[a, b) = ((a, b] \cup \{a\}) \setminus \{b\}$$

若 $E \subset R$ 是无限区间,如 $(-\infty, b)$,$(a, +\infty)$;由于

$$E = E \cap R = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) \right)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap (-n, n)) \in \mathscr{B}$$

其中 $E \cap (-n, n)$ 为有限区间。因此,由半区间集类 $\mathscr{P}$ 生成的波雷尔体几乎包含了 R 的所有的常见点集,在 $\mathscr{B}$ 中可以对集合进行有限或可列的交、并运算。

如果 $X = R^n$,令

$$\mathscr{P} = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} (a^k, b^k] : a^k = (a_1^k, a_2^k, \cdots, a_n^k) \in R^n, \right.$$
$$\left. b^k = (b_1^k, b_2^k, \cdots, b_n^k) \in R^n \right\}$$

其中 $(a^k, b^k] = x^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) : a_i^k < x_i^k \leqslant b_i^k, i = 1, 2, \cdots, n$,则由 $\mathscr{P}$ 生成的 R^n 的最小σ 代数 $\mathscr{B}$ 称为 n 维波雷尔体,$\mathscr{B}$ 中的元素称为波雷尔集。

第二节　映射与函数

映射与函数是分形理论中最基础的概念。许多分形可以作为一组特殊函数——迭代函数系的不变集,因此,在分形的研究与应用中,实直线 R、实平面 R^2、复平面 C 和超复平面 $\mathbb{C}$ 上的一些基本函数及其公式,尤其是定义在集合族上的映射或函数是非常重要的。

函数本质上是一个对应关系。1837 年,狄利克雷(Dirichlet)提出:对于实直线中某一区间上的每一个确定的 x 值,都有一个或多个确定的 y 值与之对应,则称 y 为 x 的一个函数。函数概念描述了数学中及实际应用中一种变量对另一种变量的依存关系。人们普遍认为:数集到数集的单值对应为函数,而一般的集合到集合的单值对应为映射。

设 X, Y 是两个非空集合,若有一个法则 f,使得对于每个 $x \in X$,都有一个确定的 $y \in Y$ 与之对应,则称 f 是一个从 X 到 Y 中的映射,记为 $f: X \to Y$ 或者 $f: x \in X \to y \in Y$。记 $y = f(x), x \in X$;并

称 y 为 x 在映射 f 下的象，x 是 y 关于映射 f 的原象。称集合 X 是映射 f 的定义域；Y 的子集 $f(X)=\{y\in Y: y=f(x), x\in X\}$ 为 f 的值域。有时 $f(X)$ 也称为 f 的象。当 X, Y 都是实数集时，映射 $f: X\to Y$ 也称为函数。如果 X 是数集，Y 是一个抽象集合，例如函数集合，矩阵集合，数列集合等，则称 f 是泛函数。与映射具有相同意义的术语还有变换、对应、算子等等。

设 $f: X\to Y$ 是一个映射。如果对于任意两个 $x_1, x_2\in X, x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是一个单值映射，简称为单射。如果 f 的值域等于 Y，即 $Y=f(X)$，也就是说 Y 中的每个元素 y 都是 X 中的某个元素 x 在映射 f 下的象，则称 f 是一个满射。如果既是满射又是单射，则称是一一对应，或称是一个双射。

显然，当 $f: X\to Y$ 是一一对应时，对于任意一个 $y\in Y$，都存在唯一确定的 $x\in X$，使得 $y=f(x)$；由此也给出了一个从 Y 到 X 的映射 $f^{-1}: Y\to X$，并称 f^{-1} 是 f 的逆映射。当 f 是一个函数时，f^{-1} 也称为反函数。

利用集合论的语言也可以描述映射的概念。设 $f\subset X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$，如果 f 满足对任意 $x\in X$，只要 $(x, y_1)\in f, (x, y_2)\in f$，就有 $y_1=y_2$。则称 f 是 X 到 Y 的一个映射。定义 $G(f)=\{(x,y): y=f(x), x\in X\}$ 为映射 f 的图象。

例 1.2.1　实直线 R 上的一元线性函数 $y=ax+b, x\in R$；其中 a, b 是两个给定的实常数。它的图象是实平面 R^2 上的一条直线。一元线性函数也称为 R 上的仿射变换。一般地，一元实函数的图象是 R^2 上的一条曲线。

例 1.2.2　一元多项式，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实数，$a_n\neq 0$；称 $a_i\ (0\leqslant i\leqslant n)$ 为多项式 $f(x)$ 的系数，n 称为多项式的次数。

例 1.2.3　线性分式函数：

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\qquad a, b, c, d\in R, ad\neq bc$$

有时也称 $f(x)$ 为莫比斯(Mobius)变换。规定:若 $c\neq0$,则 $f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$;若 $c=0$,则 $f(\infty)=\infty$。

一般地,称 $f(z):\bar{C}\to\bar{C}$:

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\qquad a,b,c,d\in C,ad\neq bc$$

为莫比斯(Mobius)变换,$\bar{C}=C\cup\{\infty\}$。

规定:若 $c\neq0$,则 $f\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty$,$f(\infty)=\frac{a}{c}$;若 $c=0$,则 $f(\infty)=\infty$。

例 1.2.4 Weierstrass 正弦函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{k}{2}}\sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k}x\right),x\in R$$

的图象是 R^2 上的一条分形曲线。

接着讨论 R^n 上的一些特殊的函数。

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 是 R^n 的任意两个 n 维向量,定义 x,y 的欧氏距离为

$$|x-y|=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

设 $\Omega\subset R^n$ 是一个非空集合,$f:\Omega\to R^n$ 是一个函数。如果存在一个非负数 c,使得对所有的 $x,y\in\Omega$ 成立

$$|f(x)-f(y)|=c|x-y|$$

则称 f 是一个相似函数;c 称为 f 的相似比。特别地,若 $c=1$,即对任意 $x,y\in\Omega$,成立

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

则称 f 是一个保距变换。

例 1.2.5 设 $\Omega=[0,1]$,$f_1(x)$与 $f_2(x)$都是相似函数,即

$$f_1(x)=\frac{x}{3},f_2(x)=\frac{2+x}{3},x\in[0,1]$$

相似比为$\frac{1}{3}$,显然 $f_1([0,1])=\left[0,\frac{1}{3}\right]$,$f_2([0,1])=\left[\frac{2}{3},1\right]$。

一般地,相似函数 $f:\Omega\to R^n$ 把 Ω 变换成一个与 Ω 几何相似的集 $f(\Omega)$。

函数 $f:\Omega\to R^n$ 称为线性函数,如果对任意的 $x, y\in\Omega$,成立 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,并且 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$,其中 λ 是任何一个实数。

线性函数 $f:R^n\to R^n$ 可以利用矩阵表示,即存在一个 n 阶方阵 A,使得 $f(x)=Ax,\quad x\in R^n$。写成方程组为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

例 1.2.6　在 R^2 中,关于原点(0,0)的反射为

$$\begin{cases} y_1 = (-1)x_1 + 0x_2 \\ y_2 = 0x_1 + (-1)x_2 \end{cases}$$

记 $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 2 阶单位阵,则其矩阵形式为 $y=-Ix$,即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

函数 $f:R^n\to R^n$ 称为仿射变换,如果存在一个 n 阶方阵 A 以及一个 n 维向量 b,使得

$$f(x)=Ax+b,\ x\in R^n$$

例 1.2.7　在 R^2 中,给定一个向量 $b=(1,-1)^T$,则把 R^2 中的每个向量 x 平移到 $x+b$ 的变换是仿射变换。事实上,平移变换可以写成为