模糊数学及其应用

梁保松　曹殿立　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了模糊数学方法及其应用，共分 7 章．主要内容有模糊子集、模糊关系与模糊矩阵、模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊决策、模糊关系方程等及其在工程技术、经济管理等方面的应用．

本书结构严谨，逻辑清晰，通俗易学，应用实例多．可作为本科高年级学生及农科、工科硕士研究生的教材，也可作为各类工程技术人员、管理人员、大专院校师生的参考书和实用工具书．

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学及其应用／梁保松，曹殿立主编．—北京：科学出版社，2007.12
ISBN 978-7-03-020791-3

Ⅰ．模…　Ⅱ．①梁…②曹…　Ⅲ．模糊数学-高等学校-研究　Ⅳ．O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 203427 号

责任编辑：姚莉丽　李晓鹏／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007 年 12 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2007 年 12 月第一次印刷　印张：12
印数：1—4 000　字数：220 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

主　编　梁保松　曹殿立
副主编　叶耀军　陈　振　王丽娟
参　编　胡丽萍　王建平　郝建丽　王亚伟
　　　　白洪远　侯贤敏

前　言

在生产实践和日常生活中,人们遇到的需要解决的实际问题大体可以分为两类:确定性问题与不确定性问题.例如,导线内的电流与电压之间,气体体积、压强、温度之间存在着确定性关系,属于确定性问题.解决确定性问题可用经典数学(代数、微分方程等)方法进行分析研究.但对于某些确定对象的长度、面积、体积的测量误差的估计;由多种元件组成的系统寿命的预测;胖与瘦、美与丑、高与低、好与坏、阴与晴等的划分都未必有某种完全确定性,这些属于不确定性问题.解决不确定性问题用经典数学方法一般难以取得满意的结果.

不确定性问题可以分为两类:随机不确定性问题与模糊不确定性问题.随机不确定性是指事物的发生摆脱了"一因一果"的确定性,反映出了事物"一因多果"的随机性.例如,观测误差主要与观测手段(如观测仪器先进与否)、观测环境(如气温、湿度、海拔高度等)等因素有关;多元件组成系统的寿命与各元件的制作材料、工艺、操作技术、组合方式等诸多因素有关,且这些因素很难一一枚举,更难定量地说明各自对结果造成了多大影响,从而在因果律上存在破缺,属随机不确定性一类.模糊不确定性是指事物本身所固有的不精确状况,摆脱了非此即彼的精确性,反映了事物之间由于差异的中间过渡性所引起的划分上的不确定,而导致了概念的外延不分明性,也就是"亦此亦彼"的模糊性.例如,对某种服装,若式样新颖、质地优良、价格低廉,就被列入好的一类;若式样陈旧、质地低劣、价格昂贵,则被列入差的一类.然而,人们也常对某种服装作出较好或较差的评价,这说明好与差之间还存在较好、较差等中间状态,又如,人们常听医生对某个病人的病情作出诸如"重感冒"、"较重感冒"、"较轻感冒"、"轻感冒"等结论,这说明重、轻感冒之间,也有较重、较轻等中间状态.即在排中律上存在破缺,属模糊不确定性一类.

研究随机不确定性问题的主要数学工具是概率论与数理统计.研究模糊不确定性问题的工具是由美国控制论专家 L.A.Zadeh 创立的模糊数学.1965 年 L.A.Zadeh 发表了开创性论文"模糊集合"(Fuzzy Sets,Information Control),标志着模糊数学的诞生.40 年来,模糊数学获得了蓬勃发展,其触角遍及自然科学、社会科学、横断交叉学科.在数学理论(如拓扑学、逻辑学、测度论等)、应用方法(如控制论、聚类分析、模式识别、综合评估等)、实际应用(如中长期气象预报、成矿预测、良种选择、故障诊断等)、人文系统(如经济系统、政治系统、决策系统、教育系统)诸多方面都取得了很多有价值的成果.国内创办了《模糊系统与数学》杂志,国际上创办了 Fuzzy sets and systems 杂志,模糊数学正在向各个领域渗透.

国内模糊数学的研究始于 20 世纪 70 年代，作者于 20 世纪 80 年代开始接触模糊数学，并于 1984 年编写了《模糊数学讲义》，在校内作为教材使用．本书是在原讲义的基础上修改和补充后编写而成的，书中大部分内容是作者长期教学和科学研究成果的汇编，同时吸收了国内外有关著作、杂志和会议论文集上发表的论文及应用实例．

本书概念清楚，文字通俗，深入浅出，注重模糊概念与定理的直观描述，以加深读者对模糊概念的理解；并且特别关注模糊数学方法及其应用，每一章都以一定的篇幅安排模糊数学方法应用的内容，以培养学生应用模糊数学解决实际问题的能力．本书可作为农科、工科硕士研究生及本科高年级学生的教材，也可作为各类工程技术人员、管理人员、大专院校师生的参考书和实用工具书．

本书由梁保松、曹殿立同志任主编，叶耀军、陈振、王丽娟同志任副主编．参加编写的有梁保松、曹殿立、叶耀军、陈振、王丽娟、胡丽萍、王建平、郝建丽、王亚伟、白洪远、侯贤敏．

本书引用了诸多文献资料，同时还引用了一些同志的研究成果，在此谨向作者们表示衷心感谢．

由于水平所限，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2007 年 11 月

目　　录

第1章　普通集合与普通关系

19世纪末,Cantor首创集合论,并迅速渗透到各个数学分支,成为数学的基础.1965年美国控制论专家L.A.Zadeh发表了开创性论文“模糊集合”(Fuzzy Sets,Information and Control),对Cantor集合理论作了有益的推广,从而建立了模糊集合论,且在很多领域取得了卓有成效的应用.本章介绍模糊集合理论的预备知识,为了区别于模糊集合,本章所讨论的集合与关系称为普通集合与普通关系.

1.1　普通集合的概念与运算

1.1.1　集合的概念

Cantor对“集合”作了如下描述:“把一定的并且彼此可以明确识别的东西——可以是直观的对象,也可以是思维的对象——放在一起叫做集合.”组成集合的每一个对象,称为该集合的元素.

考虑一个确定的集合,使其在过程中所涉及的一切集合都是这个集合的元素,这样的集合叫做论域或空间,常用大写字母 U、X 等表示.如考虑的是部分正整数的集合,则论域就可以取全体自然数组成的集合:$\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$.如研究的是 xOy 平面上的点集 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,$y=\Phi(x)\}$,则由 xOy 平面上一切点组成的集合

$$U=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

就可以作为论域,这时恒有 $A\subseteq U$.

论域 U 中的任一元素 x,对于某一确定的集合 A,要么 $x\in A$,要么 $x\notin A$,二者必居其一且仅居其一,这是普通集合论的基本要求.

Cantor集合论是以形式逻辑的同一律、矛盾律和排中律为基础的,“任何事物要么具有性质 p,要么不具有性质 p,非此即彼”.Cantor集合论提供了数学研究的普遍工具,每一个数学概念都反映了具有特殊性质的对象的集合;每一个判断都反映了集合之间的某种关系;每一步数学推理都反映了集合之间的某种运算.

集合可以表述概念,一个概念有它的内涵和外延.符合某概念的对象的全体构成此概念的外延;一个概念所包含的那些区别于其他概念的全体本质属性就是这一概念的内涵.比如“人”这个概念的外延就是世界上所有人的全体;而内涵就是区别于其他动物的那些本质属性的全体,如“会思维”、“能制造和使用工具进行劳动”

等.用集合论的观点来看,一个概念的外延就是一个集合.

1.1.2　集合的关系与运算

集合间的关系有:

包含　$A\subseteq B$:$\forall x\in A$ 都有 $x\in B$,并称 A 为 B 的子集.若 $A\subseteq B$,但 $A\neq B$,称 A 为 B 的真子集,记为 $A\subset B$(其中"$\forall$"表示"任意",后同).

相等　$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$(其中"$\Leftrightarrow$"表示"充分必要",后同).

集合和元素是两个不同的概念.如将论域 U 中的每一个子集(包括空集)都看作新的元素,则由 U 中的全部子集组成新的集合,即集合的集合(集合类),称为 U 的**幂集**,记为 $P(U)$.例如,$U=\{1,2,3\}$,则

$$P(U)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

集合间的运算有:

并运算　$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

交运算　$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$,也记为 AB.一般地,设 $A_t(t\in T)$是 U 的子集,所有 A_t 的并集为

$$\bigcup A_t=\{x\mid \exists t\in T, x\in A_t, x\in U\};$$

而所有 A_t 的交集为

$$\bigcap A_t=\{x\mid \forall t\in T, x\in A_t, x\in U\}.$$

其中,T 是集 A_t 的所有下标组成的集,称为指标集("$\exists$"表示"存在",后同).

差运算　$A-B=\{x\mid x\in A, x\notin B\}$.

余运算　$A^c=\{x\mid x\notin A, x\in U\}$.

集合的运算满足如下运算规律:

幂等律　$A\cup A=A$,　$A\cap A=A$.

交换律　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$.

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

吸收律　$(A\cap B)\cup B=B$,　$(A\cup B)\cap B=B$.

两极律　$A\cup U=U$,　$A\cap U=A$,　$A\cup\varnothing=A$,　$A\cap\varnothing=\varnothing$.

还原律　$(A^c)^c=A$.

互补律　$A\cup A^c=U$,　$A\cap A^c=\varnothing$.

De-Morgan 律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

一般地,设 $A_t\in P(U)$,$t\in T$,则

$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^c=\bigcap_{t\in T}A_t^c;$$

$$\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t\in T} A_t^c.$$

1.1.3　映射与扩张

1. 映射

定义 1-1　设 X 与 Y 都是集合，若存在对应关系 f，使 $\forall\, x\in X$，都有唯一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是映 X 入 Y 的映射，记为

$$f: X\to Y,\quad x\mapsto y = f(x),$$

读作 f 映 X 入 Y（映入）. y 称为 x 在映射 f 下的像，x 称为原像.

$f: X\to Y$，且对任意 $x_1, x_2\in X$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射，也称 f 为一一的.

$f: X\to Y$，且对任意 $y\in Y$，都有 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$，则称 f 为满射，也称 f 映 X 到 Y 上（映上）.

定义 1-2　设有三个非空集合 U、V、W，映射 $f: U\to V$，映射 $g: V\to W$，由 f、g 确定的 U 到 W 的映射 $h: U\to W$，称为映射 f、g 的合成映射，记为 $h=g\circ f$（图 1-1）.

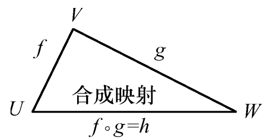


图 1-1

而 $h(x)=g(f(x))$，$\forall\, x\in U$.

可以验证合成映射满足结合律：

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f.$$

若 $f: X\to Y$ 是一一的满射，称 f 为双射，双射也称为一一对应.

若 $f: X\to Y$，令 $f(X)=\{y \mid \exists\, x\in X, 使得\ y=f(x)\}$，则称 $f(X)$ 是 f 的值域.

显然，若 $f: X\to Y$，且 $f(X)=Y$，则 f 是满射，若 f 还是一一的，则 f 是双射.

例 1-1　设 $f:[0,1]\to[0,2]$，且 $f(x)=x^2$，则 f 是一一的，但不是映上而是映入；设 $f:[-1,1]\to[0,1]$，且 $f(x)=x^2$，则 f 是映上的，但不是一一的；设 $f:[0,1]\to[0,1]$，且 $f(x)=x^2$，则 f 是一一的满射（双射）.

2. 集合的特征函数

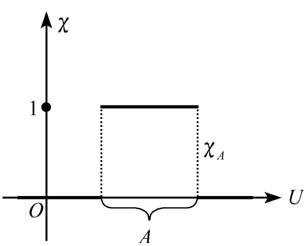


图 1-2

定义 1-3　设 A 是论域 U 中的一个子集，称映射

$$\chi_A: U\to\{0,1\},$$

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & 当\ u\in A;\\ 0, & 当\ u\notin A\end{cases}$$

为集合 A 的特征函数（图 1-2）.

例如，设 U 为自然数集，$A=\{1,2,3\}$，则 A 的特征函数为

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } u=1,2,3 \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } u \text{ 为其他自然数时}.\end{cases}$$

因此,只要给出论域 U 的一个子集 A,就唯一地确定一个 A 的特征函数. 反过来,给定一个从 U 到$\{0,1\}$的映射(也称 U 中的一个特征函数)χ,也就唯一地确定一个 U 的子集 A.

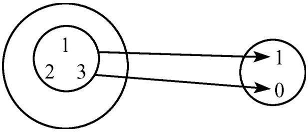


图 1-3

例如,设 U 是全体自然数组成的集合,按图 1-3 作一个从 U 到$\{0,1\}$的映射χ.

这里取以 1 为像的所有 U 中元素作成子集 A,显见,$A=\{1,2,3\}$,此时$\chi_A=\chi$.

所以,只要给出论域 U 中的一个特征函数就等于给定了一个 U 的子集,它由 U 中以 1 为像的一切元素所组成.这样,U 的子集和它的特征函数之间建立了一一对应关系.从这种意义上说"子集就是特征函数".

引入特征函数的好处是可以把集合转化为函数,特征函数与集合间有如下关系:

(1) $A=U\Leftrightarrow\chi_A(u)\equiv1$,　$A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(u)\equiv0$, $\forall\ u\in U$;

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A(u)\leqslant\chi_B(u)$, $\forall\ u\in U$;

(3) $A=B\Leftrightarrow\chi_A(u)=\chi_B(u)$, $\forall\ u\in U$;

(4) $\chi_{A\cup B}(u)=\chi_A(u)\vee\chi_B(u)$, $\forall\ u\in U$;

(5) $\chi_{A\cap B}(u)=\chi_A(u)\wedge\chi_B(u)$, $\forall\ u\in U$;

(6) $\chi_{A^c}(u)=1-\chi_A(u)$, $\forall\ u\in U$.

这里$\vee$、$\wedge$分别表示 sup 及 inf(取上、下确界),在有限个成员之间,它们表示 max 及 min(取最大、最小值).与图 1-2 相对照的图形见图 1-4.

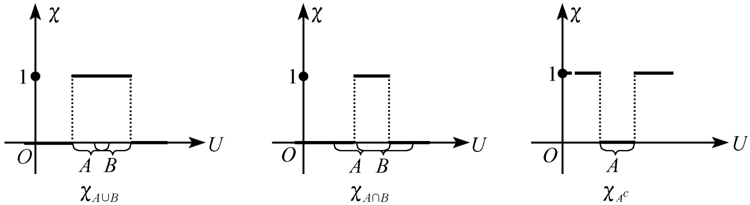


图 1-4

例 1-2　$A=[2,8]$,$B=[3,5]$,

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8],\end{cases}\qquad \chi_B(x)=\begin{cases}1, & x\in[3,5],\\ 0, & x\notin[3,5],\end{cases}$$

则

$$\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}=\begin{cases}1, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8],\end{cases}$$

而 $A\cup B=[2,8]$, $\chi_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & x\in[2,8],\\ 0, & x\notin[2,8],\end{cases}$可见

$$\chi_{A\cup B}(x)=\max\{\chi_A(x),\chi_B(x)\}.$$

为了便于引入模糊集 A,也称 A 的特征函数χ_A 为 A 的隶属函数,χ_A 在 u 上的值叫做 u 对 A 的隶属度.当 $u\in A$ 时,u 的隶属度$\chi_A(u)=1$,表示 u 绝对隶属于 A;当 $u\notin A$ 时,u 的隶属度$\chi_A(u)=0$,表示 u 绝对不隶属于 A.

3. 映射的扩张

定义 1-4　设 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)$,则称映射 $f: X\to P(Y), x\mapsto f(x)=B\in P(Y)$为从 X 到 Y 的点集映射(图 1-5).

定义 1-5　设 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)$,则称映射 $T: P(X)\to P(Y), A\mapsto T(A)$为从 X 到 Y 的集合变换(图 1-5).

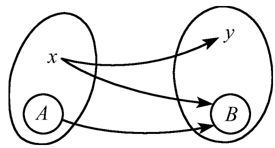


图 1-5

例 1-3　设 $X=\{a,b\}, Y=\{c,d,e\}$,则

$$P(X)=\{\varnothing, X,\{a\},\{b\}\},$$
$$P(Y)=\{\varnothing, Y,\{c\},\{d\},\{e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}\}.$$

令 $f: a\mapsto\{c\}, b\mapsto\{d,e\}$;

$$T:\varnothing\mapsto\varnothing,\{a\}\mapsto\{c,d\},\{b\}\mapsto\{c\}, X\mapsto Y.$$

则 f 是从 X 到 Y 的点集映射,而 T 是从 X 到 Y 的集合变换.

定义 1-6(经典扩张原理)　设映射 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)=y$, $\forall A\in P(X)$,令 $f(A)=\{y\in Y\mid y=f(x), x\in A\}$,则集合 $f(A)\in P(Y)$称为集 A 在 f 下的像;$\forall B\in P(Y)$,令 $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$,则集合 $f^{-1}(B)\in P(X)$称为集 B 在 f 下的原像.于是,映射 $f: X\to Y, x\mapsto f(x)=y$ 诱导出映射

$$f: P(X)\to P(Y),\quad A\mapsto f(A)\in P(Y);$$
$$f^{-1}: P(Y)\to P(X),\quad B\mapsto f^{-1}(B)\in P(X).$$

其特征函数分别为

$$\chi_{f(A)}(y)=\bigvee_{f(x)=y}\chi_A(x),\qquad \chi_{f^{-1}(B)}(x)=\chi_B(f(x)).$$

这就是扩张原理,它实际上是一个定义.

例 1-4　设 $X=\{1,2\}, Y=\{1,3,4\}$,映射 $f: X\to Y$ 定义为 $f(x)=x^2$,则

$$P(X)=\{\varnothing,\{1\},\{2\}, X\},$$
$$P(Y)=\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}, Y\}.$$

在映射 f 下的扩张原理为

$$f: P(X)\to P(Y),$$
$$A\mapsto f(A)=\{y\mid y=f(x)=x^2, x\in A\}.$$

例如，$\{x\} \mapsto f(\{x\}) = \{y \mid y = f(x) = x^2, x \in \{x\}\} = \{f(x)\} = \{x^2\}$，

$f(\varnothing) = \varnothing$，$f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{1\}$，

$f(\{2\}) = \{f(2)\} = \{4\}$，$f(X) = \{f(1), f(2)\} = \{1,4\} \in P(Y)$.

$f^{-1}: P(Y) \to P(X)$，

$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$，$f^{-1}(\{1\}) = \{f^{-1}(1)\} = \{1\}$，

$f^{-1}(\{4\}) = \{f^{-1}(4)\} = \{2\}$，$f^{-1}(\{1,4\}) = \{1,2\} = X$，

但 $f^{-1}(\{3\})$，$f^{-1}(\{3,4\})$，$f^{-1}(\{1,3\})$，$f^{-1}(Y)$在 f 下没有原像，因此当 $B=\{3\}$，$\{1,3\}$，$\{3,4\}$，Y 时，f^{-1} 均不是 B 到 $f^{-1}(B)$的映射.

1.2 普通关系

1.2.1 直积(Descartes 乘积)

定义 1-7 设 U、V 是两个集合，称 $U \times V = \{(u,v) \mid u \in U, v \in V\}$为 U 和 V 的直积或笛卡儿(Descartes)乘积.

直积 $U \times V$ 是一个新的集合，其元素由 U 中的元素与 V 中的元素无约束的任意搭配起来的序偶(x,y)(或序对)构成.

例 1-5 设 $U=\{1,2,3,4\}$，$V=\{5,6\}$，

$U \times V = \{(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$，

$V \times U = \{(5,1),(5,2)(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4)\}$.

显然 $U \times V \neq V \times U$，可见序偶和顺序是有关的.当 $U = V$ 时，$U \times U = U^2$，称为 U 上的直积.直积的定义可推广到多个集合上去：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \triangleq \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

例如，设 $\mathbf{R}$ 为实数集，则

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,y,z) \mid -\infty < x,y,z < +\infty\},$$

又称为三维 Eucild 空间.

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid -\infty < x_i < +\infty, i = 1,2,\cdots,n\},$$

又称为 n 维 Euclid 空间.

1.2.2 二元关系

直积是两集合元素之间的无约束搭配，若给搭配以约束，便形成了一种特殊关系.关系的内容包含于搭配的限制之中，接受约束的序对形成直积的一个子集，这个子集便表现了所说的关系.

例 1-6 U、V 均为男子的集合，则 $U \times V = \{(u,v) \mid u \in U, v \in V\}$为任意两个男子组成的序对集合.

现对这种搭配加以限制，如限制"父子"才能搭配. 它体现了"男子"与"男子"之间的一种特殊关系，并非任何两个男子都具有"父子"关系，只有父亲和儿子才能成为"父子"，因此，"父子"关系是 $U\times V$ 的一个子集，即

$$R=\{(u,v)\mid u\in U,v\in V,u\text{ 是 }v\text{ 的父亲}\},\quad R\subseteq U\times V.$$

关系是一个集合，它是直积的一个子集.

定义 1-8 设 U、V 是两个非空集合，$U\times V$ 的子集 R 称为 U 到 V 的二元关系，记为

$$U\xrightarrow{R}V.$$

当 $(u,v)\in R$ 时，称 u 与 v 有关系 R，记为 uRv；当 $(u,v)\notin R$ 时，称 u 与 v 没有关系 R，记为 $u\overline{R}v$. 特别当 $U=V$ 时，称 $U\times V$ 的子集 R 为 U 上的二元关系. 以后把二元关系简称为关系.

二元关系可推广到 n 元关系，一般地，$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{个}}$ 的子集 R 称为 A 上的 n 元关系. 二元关系的许多结论可推广到多元关系中.

例 1-7 设 $U=V=\mathbf{R}$（实数集），则

$$S=\{(u,v)\mid u=\mathrm{e}^v-3,u\in U,v\in V\}$$

是 U 到 V 的一个关系. 对任意 $(u,v)\in U\times V$，当 $u=\mathrm{e}^v-3$ 时，$(u,v)\in S$，此时 u 与 v 有关系 S；当 $u\neq\mathrm{e}^v-3$ 时，$(u,v)\notin S$，此时 u 与 v 没有关系 S.

例 1-8 设 $X=\{1,4,7,8\}$，$Y=\{2,3,6\}$，

$$R=\{(1,2),(1,3),(1,6),(4,6)\},$$

则 R 是 X 到 Y 的"小于"关系.

例 1-9 设 $U=R$，

$$R_1=\{(u,v)\mid(u,v)\in R\times R,u=v\}$$

是 R 上元素间的"相等"关系；

$$R_2=\{(u,v)\mid(u,v)\in R\times R,u\geqslant v\}$$

是 R 上元素间的"大于或等于"关系.

关系 R 是 $U\times V$ 的子集，即 $R\subseteq U\times V$. 对任意 $(u,v)\in U\times V$，u 与 v 有关系 R 或 u 与 v 没有关系 R，二者必居其一，且仅居其一. 因此关系 R 也可用特征函数表示：

$$\chi_R(u,v)=\begin{cases}1, & (u,v)\in R;\\ 0, & (u,v)\notin R.\end{cases}$$

于是关系 R 可以看作是从 $U\times V$ 到 $\{0,1\}$ 上的一个映射.

1.2.3 关系的矩阵表示

关系除了用直积的子集表示外，对于有限论域情形，用矩阵表示在运算上更为

方便.

定义 1-9 设两个有限集 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$R$ 是从 X 到 Y 的二元关系，即

R	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
x_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

其中，$r_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ x_i R y_j; \\ 0, & 当\ x_i \overline{R} y_j.\end{cases}$记

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{mn}$ 为关系 $\boldsymbol{R}$ 的关系矩阵.

由定义可知，关系矩阵中的元素或是 0 或是 1. 在数学上把元素只是 0 或 1 的矩阵称为 Boole 矩阵，因此，任何关系矩阵都是 Boole 矩阵.

例 1-10 例 1-8 中"<"关系的关系矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2.4 关系的合成

定义 1-10 设 R_1 是 X 到 Y 的关系，R_2 是 Y 到 Z 的关系，R 是 X 到 Z 的关系. 若 $(x,z)\in R \Leftrightarrow$ 存在 $y\in Y$，使得 $(x,y)\in R_1$，且 $(y,z)\in R_2$，则称关系 R 是关系 R_1 与关系 R_2 的合成，记为 $R=R_1\circ R_2$. 即

$$R=R_1\circ R_2=\{(x,z)\mid \exists\, y\in Y, 使(x,y)\in R_1, (y,z)\in R_2\}.$$

$R_1\circ R_2$ 的特征函数为

$$\chi_{R_1\circ R_2}(x,z)=\bigvee_{y\in Y}(\chi_{R_1}(x,y)\wedge(\chi_{R_2}(y,z))).$$

如果 $X=Y=Z=U$，称 $R=R_1\circ R_2$ 是 U 上的两个关系的合成.

例 1-11 设人群为论域 U，"姐妹"和"母女"分别是 U 上的两个关系 R_1 和 R_2，"姨侄女"R 也是 U 上的关系，则 $R=R_1\circ R_2$. 因为在 R、R_1、R_2 之间存在这样的

联系：

x 是 z 的姨侄女$\Leftrightarrow$至少存在一个 $y\in U$，使 y 是 z 的姐妹又是 x 的母亲.

例 1-12 设 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{2,3,4\}$，$Z=\{1,2,3\}$，R_1 是从 X 到 Y 的关系，$R_1=\{(x,y)\mid x+y=6\}=\{(2,4),(3,3),(4,2)\}$；$R_2$ 是从 Y 到 Z 的关系，$R_2=\{(y,z)\mid y-z=1\}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$，则 R_1 与 R_2 的合成

$$R_1\circ R_2=\{(2,3),(3,2),(4,1)\}.$$

关系的合成也可以用矩阵来表示.

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_s\}$，从 X 到 Y 的关系 R_1 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1=(r_{ij})_{m\times n}$，从 Y 到 Z 的关系 R_2 的关系矩阵 $\boldsymbol{R}_2=(p_{kj})_{n\times s}$，则 X 到 Z 的关系 $R=R_1\circ R_2$ 的关系矩阵

$$\boldsymbol{R}_1\circ\boldsymbol{R}_2=(c_{ij})_{m\times s},$$

其中，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}(r_{ik}\cdot p_{kj})$，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,s$.

1.2.5 等价关系与划分

等价关系是二元关系中的一个重要关系，也是将一个集合元素分类的重要依据.

定义 1-11 设 R 是 U 上的一个关系.

(1) 若 $\forall u\in U$，都有 $\chi_R(u,u)=1$，则称 R 具有自反性.自反关系 R 的矩阵的主对角线上的元素均为 $1(r_{ii}=1)$.

(2) $\forall u,v\in U$，若 $\chi_R(u,v)=1$，恒有 $\chi_R(v,u)=1$，则称 R 具有对称性.对称关系矩阵必为对称矩阵$(r_{ij}=r_{ji})$.

(3) $\forall u,v,w\in U$，若 $\chi_R(u,v)=1$，$\chi_R(v,w)=1$，恒有 $\chi_R(u,w)=1$，则称 R 具有传递性.

例 1-13 在集合 $A=\{1,2,3\}$上的关系

$$R=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3)\}$$

是自反的，但非对称.

例 1-14 自然数集 $\mathbf{N}$ 上的相等关系“$=$”是对称的；关系“$\leqslant$”、“$<$”均是非对称的.

例 1-15 实数集上的关系“$=$”为自反、对称、传递的；关系“$\leqslant$”为自反、传递的，但非对称的；关系“$<$”是传递的，非自反、非对称的.

例 1-16 任意非空集 A 的幂集 $P(A)$上的包含关系“$\subseteq$”为自反的、非对称的、传递的.

定义 1-12 U 上的一个关系 R 叫做等价关系，指的是 R 具有自反性、对称性和传递性.等价关系常用记号“$\sim$”代替.

例 1-17　设在整数集 $\mathbf{Z}$ 上的关系 R 为“两数之差为偶数”，则 R 为 $\mathbf{Z}$ 上的等价关系.

证　(1) 任意 $x\in\mathbf{Z}$ 有 $x-x=0$(自反)；

(2) 对任意 $x,y\in\mathbf{Z}$，若 $x-y=2a$，则 $y-x=-2a$(对称)；

(3) 对任意 $x,y,z\in\mathbf{Z}$，若 $x-y=2a$，$y-z=2b$，则

$$x-z=(x-y)+(y-z)=2(a+b)(\text{传递}).$$

定义 1-13　设 R 是集合 A 上的等价关系，对任意 $x\in A$，在 A 中一切与 x 有等价关系 R 的元素组成的集合，称为“由 x 产生关于 R 的等价类”，简称“x 的等价类”，记为 $[x]_R$，即

$$[x]_R=\{y\mid y\in A,(x,y)\in R\}.$$

例 1-18　考虑自然数集 $\mathbf{N}$ 上的同余关系 $\equiv(\mathrm{mod}\ 3)$ 的等价类.因为任何自然数除以 3，其余数只能是 0、1、2，所以在集合 $\mathbf{N}$ 上只有由 0、1、2 产生关于 $\equiv(\mathrm{mod}\ 3)$ 的 3 个等价类(约定 $0\in\mathbf{N}$)：

$$[0]_{\equiv(\mathrm{mod}\ 3)}=\{y\mid y\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\}=\{0,3,6,9,\cdots\};$$

$$[1]_{\equiv(\mathrm{mod}\ 3)}=\{y\mid y\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)\}=\{1,4,7,\cdots\};$$

$$[2]_{\equiv(\mathrm{mod}\ 3)}=\{y\mid y\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\}=\{2,5,8,\cdots\}.$$

这 3 个等价类满足：

(1) $[0]\cup[1]\cup[2]=\mathbf{N}$(省略了 $\equiv(\mathrm{mod}\ 3)$)；

(2) $[n_i]\cap[n_j]=\varnothing(n_i\neq n_j;n_i,n_j=0,1,2)$.

这就是说 3 个等价类——$\mathbf{N}$ 的 3 个子集，它们的并就是 $\mathbf{N}$，且任何两个子集都无公共元素.称这 3 个子集所组成的集合为 $\mathbf{N}$ 的一个划分.一般有：

定义 1-14　设 A 是一个非空集，而 A_i，$i\in K$(指标集 K 可以是有限的，也可以是无限的)是集合 A 的某些非空子集，如果

(1) $\bigcup\limits_{i\in K}A_i=A$；

(2) $A_i\cap A_j=\varnothing,(i\neq j)$，

则称集合 $\{A_i\}_{i\in K}$ 为集合 A 的一个划分，每个集合 A_i 叫做这个划分的一个类.

定理 1-1　设 R 是集合上的等价关系，则等价类的集合 $\{[a]_R\mid a\in A\}$ 构成 A 的一个划分.

证　(1) 因 R 为等价关系，所以任意 $a\in A$ 必有 $(a,a)\in R$，即 $a\in[a]_R$，故 $[a]_R$ 不空.

(2) 若 $[a]_R$ 及 $[b]_R$ 为两不同等价类，则必有 $[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$.用反证法，假设 $[a]_R$ 及 $[b]_R$ 不是同一等价类，但有 $[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$，则 $[a]_R$、$[b]_R$ 必有公共元素 $c\in A$，使得 $(a,c)\in R$，$(c,b)\in R$.由 R 的传递性得 $(a,b)\in R$，于是 $[a]_R$ 及 $[b]_R$ 为同一等价类，与假设矛盾.

(3) 证明 $\bigcup_{a\in A}[a]_R=A$.显然,对所有 $a\in A$,$\bigcup_{a\in A}[a]_R\subseteq A$;其次对所有 $x\in A$ 有 $x\in[x]_R$,而$[x]_R\subseteq\bigcup_{a\in A}[a]_R$,所以 $x\in\bigcup_{a\in A}[a]_R$,从而 $A\subseteq\bigcup_{a\in A}[a]_R$,故$\bigcup_{a\in A}[a]_R=A$.

1.2.6 序关系

等价关系是集合论中的一个重要概念,排序关系是集合论中的另一个重要概念.比如在实数集合中关系"$\leqslant$",就是把全体实数按照大小排成了一个顺序;英语 26 个字母组成的集合上的"前后"关系;集合 A 的幂集上的"$\subseteq$"关系,都将集合中的元素排成了一种顺序,人们把这样的关系统称为序关系.在序关系中,有的能将集合中一切元素都排成序,有的序关系则只存在于部分元素之中.

定义 1-15 设 A 是非空集合,R 是 A 上的关系,且满足条件:

(1) 自反性:$\forall x\in A$,都有 xRx;

(2) 反对称性:$\forall x,y\in A$,若 xRy 且 yRx,则 $x=y$;

(3) 传递性:$\forall x,y,z\in A$,若 xRy 且 yRz,则 xRz;

则称 R 是集合 A 上的偏序关系.

偏序关系一般记为"$\leqslant$"(或$\prec$).若 $x,y\in A$ 有偏序关系$\leqslant$,通常记为 $x\leqslant y$,称为 x 在 y 的前面.

集合 A 与偏序关系"$\leqslant$"组成的二元结构$(A,\leqslant)$称为偏序集,偏序集有时也简记为 A.

例 1-19 设 $X=\{1,2,3\}$,则

$$P(X)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},X,\varnothing\}$$

上的包含关系"$\subseteq$"是一个偏序关系,据定义 1-15 请读者自己验证.但在 $P(X)$中并非所有元素都满足$\subseteq$关系.

例 1-20 建立在自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$ 及实数集 $\mathbf{R}$ 上的通常的不等关系"$\leqslant$"都是这些集合上的偏序关系.对所有 $a,b,c\in\mathbf{N}$,显然有:

(1) $a\leqslant a$;

(2) $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a\Rightarrow a=b$;

(3) $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$.

定义 1-16 设在集合 A 上已建立了偏序关系"$\leqslant$".若$\forall a,b\in A$,$a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$ 总有一个成立,称这种偏序关系为全序关系或线序关系.

集合 A 与全序关系$\leqslant$组成的二元结构$(A,\leqslant)$称为全序集.全序集有时也简记为 A,上面例 1-20 中$(\mathbf{N},\leqslant)$、$(\mathbf{Z},\leqslant)$、$(\mathbf{Q},\leqslant)$、$(\mathbf{R},\leqslant)$均为全序集.

定义 1-17 设$(A,\leqslant)$为一偏序集.

(1) 若存在一个元素 $a'\in A$,使所有 $a\in A$ 均有 $a\leqslant a'$,则称 a'为偏序集 A 的最大元;若对于所有 $a\in A$ 均有 $a'\leqslant a$,则称 a'为偏序集 A 的最小元.

(2) 若存在一个元素 $a\in A$,在 A 中不存在这样的元素 a',使得 $a\neq a'$而有 $a\leqslant a'$(即 $\forall a'\in A$ 只要 $a\neq a'$必有 $a\leqslant a'$不成立),称 a 为偏序集 A 的极大元;若 A 中不存在这样的元素 a',使得 $a\neq a'$而有 $a'\leqslant a$,称 a 为偏序集 A 的极小元.

显然,最大元、最小元若存在,它们都是唯一的,极大元、极小元却不一定是唯一的.

例 1-21　集合 $A=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$上的包含关系"$\subseteq$"与集合 A 组成一个偏序集$(A,\subseteq)$,其中$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$均为 A 的极小元,无最小元(这是因为除了它们自身外,A 中没有任何元素包含在它们之中).$\{a,b,c\}$是 A 中的最大元,也是极大元(因为 A 中一切元素均为$\{a,b,c\}$的子集).

定义 1-18　设 A 是偏序集$(X,\leqslant)$的子集,若对于一切 $a\in A$ 有 $a\leqslant x$ 成立,则称 x 为 A 的一个上界;若均有 $a\geqslant x$ 成立,则称 x 为 A 的一个下界.

如果 $x\in X$ 是 A 的上界,且对每个 A 的上界 $x'\in X$ 均有 $x\leqslant x'$(上界集的最小元),则称 x 为 A 的上确界,记为 $x=\mathrm{Sup}\,A$;若 $x\in X$ 是 A 的下界,且对每个 A 的下界 $x'\in X$ 均有 $x'\leqslant x$(下界中的最大元),则称 x 为 A 的下确界,记为 $x=\mathrm{Inf}\,A$.

例 1-22　集合$\{1,2,3\}$的幂集

$$P(X)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\varnothing\},$$

则$(P(X),\subseteq)$为一偏序集.令 $A=\{\{2\},\{3\}\}\subset P(X)$,则 A 无最大元,极大元为$\{2\}$、$\{3\}$,上界是$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$,上确界为$\{2,3\}$;A 无最小元,极小元为$\{2\}$、$\{3\}$,下界和下确界都是$\varnothing$.

例 1-23　在偏序集$(\mathbf{R},\leqslant)$中,$A=\{0,1\}\subset\mathbf{R}$,则 3、2、1 等均为 A 的上界,而 1 是 A 的上确界,即 $1=\mathrm{Sup}\,A$(其他情形请读者自己讨论).

1.2.7　格

1. 格的概念

定义 1-19　设在集合 L 中规定了两种运算"$\vee$"与"$\wedge$";$a\vee b=\mathrm{Sup}\{a,b\}$,$a\wedge b=\mathrm{Inf}\{a,b\}$,并满足下列运算性质:

(1) 幂等律　$a\vee a=a$,　$a\wedge a=a$;

(2) 交换律　$a\vee b=b\vee a$,　$a\wedge b=b\wedge a$;

(3) 结合律　$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$,

$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$;

(4) 吸收律　$(a\vee b)\wedge a=a$,　$(a\wedge b)\vee a=a$.

则称 L 是一个格,记为$(L,\vee,\wedge)$.

定义 1-20　设$(L,\vee,\wedge)$是一个格,如果它还满足如下运算性质:

(5) 分配律 $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$,

$$(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c);$$

则称$(L,\vee,\wedge)$为分配格.

若格$(L,\vee,\wedge)$满足:

(6) 0-1 律 在 L 中存在两个元素 0 与 1,且

$$a\vee 0=a,\quad a\wedge 0=0,\quad a\vee 1=1,\quad a\wedge 1=a,$$

则称$(L,\vee,\wedge)$有最小元 0 与最大元 1,此时又称$(L,\vee,\wedge)$为完全格.

若在具有最小元 0 与最大元 1 的分配格$(L,\vee,\wedge)$中规定一种余运算 c,满足:

(7) 复原律 $(a^c)^c=a$;

(8) 互余律 $a\vee a^c=1$, $a\wedge a^c=0$,则称$(L,\vee,\wedge,c)$为一个 Boole 代数.

若在具有最小元 0 与最大元 1 的分配格$(L,\vee,\wedge)$中规定一种余运算 c,满足:

(9) 复原律 $(a^c)^c=a$;

(10) 对偶律 $(a\vee b)^c=a^c\wedge b^c$, $(a\wedge b)^c=a^c\vee b^c$,

则称$(L,\vee,\wedge,c)$为一个软代数.模糊集的运算就是在软代数中进行的.

例 1-24 任一集合 A 的幂集 $P(A)$是一个完全格,格中的最大元为 A(全集),最小元为$\varnothing$(空集).

例 1-25 记[0,1]内的有理数集为 $\mathbf{Q}$,在 $\mathbf{Q}$ 上定义有理数的大小关系“$\leqslant$”,则$(\mathbf{Q},\leqslant)$是一个格,但不是完全格.

2. 格运算$\vee$、$\wedge$的性质

定理 1-2 设 $a\leqslant b\in L$,则

$$a\leqslant a\vee b,\quad b\leqslant a\vee b;\quad a\wedge b\leqslant a,\quad a\wedge b\leqslant b.$$

这个性质表明:$a\vee b$ 是 a 与 b 的上确界,$a\wedge b$ 是 a 与 b 的下确界.

定理 1-3 设 $a,b,c,d\in L$,若 $a\leqslant b$、$c\leqslant d$,则 $a\vee c\leqslant b\vee d$;$a\wedge c\leqslant b\wedge d$.

证 因 $b\leqslant b\vee d$,$d\leqslant b\vee d$,所以由传递性知

$$a\leqslant b\leqslant b\vee d,\quad c\leqslant d\leqslant b\wedge d.$$

这个性质表明 $b\vee d$ 是 a 与 c 的一个上界,而 $a\vee c$ 是 a 与 c 的上确界(最小上界),故有 $a\vee c\leqslant b\vee d$.

类似可证 $a\wedge c\leqslant b\wedge d$.

推论 设 $a,b,c\in L$,若 $b\leqslant c$,则

$$a\vee b\leqslant a\vee c,\quad a\wedge b\leqslant a\wedge c.$$

这个性质称为格的保序性.

定理 1-4 设 $a,b\in L$,则有

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

定理 1-5　设 $a, b, c \in L$,则有

$$a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c),$$

$$a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c).$$

第 2 章　模 糊 子 集

本章讨论模糊子集的定义、模糊子集的运算、分解定理、扩张原理及隶属函数的确定.

2.1　模糊子集及其表示方法

2.1.1　模糊子集的定义

人们在认识客观事物的过程中所产生的每一个概念,都有其外延和内涵.所谓外延就是符合这个概念的一切对象所组成的集合,而内涵则是指这些对象的公共属性,即这个集合的定义条件.因此对任何一个概念,都可用一个集合来表示.经典数学中概念的特点是,对于某一具体对象或是符合这个概念,或是不符合这个概念,二者必居其一且仅居其一.对于表示这个概念的集合 A,则直接表现为论域 U 中的任一元素 $u\in U$,或是 $u\in A$ 或是 $u\notin A$,二者必居其一且仅居其一.这种概念一般称之为清晰的或分明的,表示这个概念的集合称之为清晰集合或分明集合,这就是在第 1 章所讨论过的普通集合.例如,“有理数”这个概念,它的外延是全体有理数的集合,内涵是一切有理数的公共属性,即有理数定义:

$$\text{有理数}=\left\{a \mid a=\frac{p}{q},\text{其中 } p、q \text{ 为互质整数,且 } q>0\right\}.$$

又如,“中国人”这个概念,它的外延是全体中国人组成的集合,其内涵就是中国人的定义——具有中国国籍的人.

在第 1 章中,曾用特征函数表示一个集合 A,即 $\forall\ x\in U$,

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

因为函数就是一个映射,所以一个集合的特征函数又可表示为映射的形式

$$\chi_A: U\to\{0,1\},$$

$$x\mapsto\chi_A(x)\in\{0,1\},$$

其中,$x\in U$ 的像 $\chi_A(x)$就是χ对于集合 A 的特征函数值.当 $x\in A$ 时,$\chi_A(x)=1$;当 $x\notin A$ 时,$\chi_A(x)=0$. 用特征函数表示集合,恰好体现了清晰概念非此即彼的特征.

但是,在日常生活中所遇到的概念,并不都是清晰的,还存在着大量不清晰的概念.所谓不清晰概念,指的是存在着那样的对象,人们无法说它绝对符合或绝对

不符合某概念.对用来表示这个概念的集合来说,就是在论域 U 中存在着并非绝对属于或绝对不属于某集合 A 的元素 u.例如,讨论"教室里的人"这个概念.依这个概念,在人这个论域中,有的人在教室里,有的人在教室外.除此之外,还有没有其他情况呢?有的.一个人一只脚在教室里,一只脚在教室外,你认为他是"教室里的人"还是"教室外的人"呢?显然,他不是"非此即彼",而是"亦此亦彼"的.又如,在图 2-1 所示的一系列线段中,把长的线段选出来.当然,一开始能十分自信地断言,从左数起,最后一根不算长线段,而第一根是长线段.第二根呢?也算长的.第三根呢?也可以算.如此继续下去,态度就会犹豫不决起来.这种变化,反映了线段属于"长线段集合"不是"非此即彼"的,在二者之间,还存在着各种程度的似乎属于长线段似乎又不算长线段的所谓中介状态.也就是说这个概念的外延没有明确的界限,这种概念人们称之为模糊概念.对应于这种概念的集合,在论域 U 中存在着并非绝对属于(或绝对不属于)该集合的元素,这种集合人们称为模糊集合.

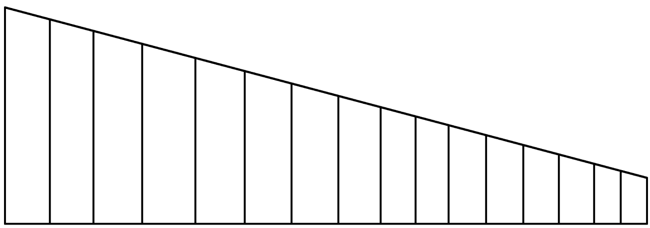


图 2-1 哪些线段算长的呢?

模糊现象或模糊概念无处不在,如"年轻人"、"高个子"、"优质产品"、"多云天气"、"健康者"等.人脑中所形成的概念几乎都是模糊的,可以认为模糊现象对于人类是一个本质的东西.特别是随着信息时代的到来,精确性与模糊性的矛盾更加突出.一方面,各门学科迫切要求数学化、定量化.但是科学的深化从另一方面讲就意味着研究对象的复杂化,而越复杂的东西就越难以精确化.显然,当系统的复杂性增长时,对系统做出精确性描述的能力将相应降低.这就意味着,复杂程度越高,有意义的精确化能力便越低,这正说明精确的相对性.过分的精确反倒模糊,适当的模糊反而精确.

面对大量的模糊概念,普通集合就显得苍白无力了.为了刻画模糊概念,将特征函数表达集合的方法加以推广,将集合{0,1}改为区间[0,1],美国控制论专家 Zadeh 教授 1965 年提出了模糊集合的定义,它可以表示模糊概念.

定义 2-1 所谓给定论域 U 上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$,就是给定由论域 U 到区间[0,1]的一个映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1],$$

$$u \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \in [0,1].$$

这个映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 将任一 $u\in U$ 对应着一个确定的值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\in[0,1]$,值 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$叫做 u 对模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度,映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 叫做模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数($\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数也可以记为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 或简记为 $\underset{\sim}{A}(u)$).在一般性的讨论中,人们常将模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$的图形画成图 2-2 所示的曲线形状.

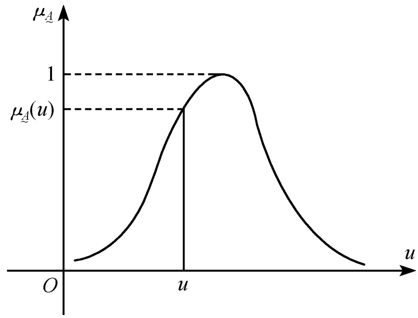


图 2-2

与普通子集完全由其特征函数所确定一样,模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所确定.特别地,当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$的值域为集合$\{0,1\}$时,模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 退化成普通子集,这时隶属函数就变成了普通子集的特征函数.由此可见,普通子集是模糊子集的特殊情形,而模糊子集则是普通子集概念的一般化.

论域 U 上的全体模糊子集所组成的集合记为 $F(U)$,称为模糊幂集,

$$F(U)=\{\underset{\sim}{A}\mid \mu_{\underset{\sim}{A}}:U\rightarrow[0,1]\}.$$

论域 U 上的模糊幂集与普通幂集有关系

$$F(U)\supset P(U).$$

普通集合论中属于"$\in$"概念是重要的基本概念之一,然而在模糊集合论中,除隶属度 1 及 0 外,属于或不属于都是没有明确含义的.但上述模糊幂集 $F(U)$以 U 上的全体模糊子集为元素,是一个普通集合,因此,表示 $\underset{\sim}{A}$ 是论域 U 上的模糊子集,通常可以简记为 $\underset{\sim}{A}\in F(U)$.若 $\underset{\sim}{A}\in F(U)$,从数学的观点看,它是 U 到$[0,1]$的一个映射,此时是毫无模糊性可言的,所以模糊现象的研究方法同经典数学一样是非常严格的,这一点读者应该明白.

例 2-1 设论域 $X=[0,100]$,模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 表示"年老",$\underset{\sim}{B}$ 表示"年轻".Zadeh 给出 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 的隶属函数分别为

$$\underset{\sim}{A}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 50;\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100.\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{B}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25;\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100.\end{cases}$$

相应的曲线如图 2-3 所示.

不难算出 $\underset{\sim}{B}(30)=0.5$,$\underset{\sim}{B}(35)=0.2$,$\underset{\sim}{A}(55)=0.5$,$\underset{\sim}{A}(60)=0.80$. 这表明,30 岁的年龄属于"年轻"的隶属度为 50%,并称点 $x=30$ 是"年轻"的过渡点.60 岁的

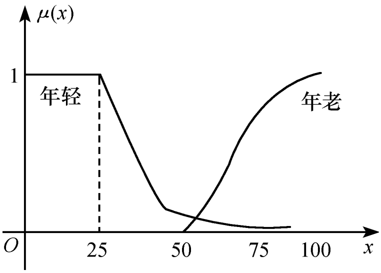


图 2-3

年龄属于"年老"的隶属度为 80％等.

例 2-2　100 人组成评比小组,对 5 种商品 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 进行评价.结果是:认为商品 x_1 质量好的有 81 人,占 81％＝0.81;认为商品 x_2 质量好的有 53 人,占 53％＝0.53;所有的人都认为 x_3 质量好,占 100％＝1;没有人认为商品 x_4 质量好,占 0％＝0;认为商品 x_5 质量好的有 24 人,占 24％＝0.24. 如取论域 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,则对其每一个元素都规定了隶属于模糊集 $\underset{\sim}{A}=\{$质量好$\}$的隶属度,即 $X\to[0,1]$的映射:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}:\quad x_1\to 0.81,\quad x_2\to 0.53,\quad x_3\to 1,\quad x_4\to 0,\quad x_5\to 0.24.$$

映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 就是模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数.

2.1.2　模糊子集

表示论域 U 上的一个模糊子集,原则上只需将每个元素 $u\in U$ 赋予该元素对模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$,然后将它们用一定形式构造在一起即可.下面是常用的几种表示方法.

论域 U 是有限集,$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$,$U$ 上的任一模糊集 $\underset{\sim}{A}$,其隶属函数为 $\{\underset{\sim}{A}(u_i)\}(i=1,2,\cdots,n)$.

1) Zadeh 表示法

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}.$$

其中,$\frac{\underset{\sim}{A}(u_i)}{u_i}$不是分数,"＋"也不表示求和,只有符号意义,它表示点 u_i 对模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度是 $\underset{\sim}{A}(u_i)$.

2) 序偶表示法

$$\underset{\sim}{A}=\{(u_1, \underset{\sim}{A}(u_1)), (u_2, \underset{\sim}{A}(u_2)), \cdots, (u_n, \underset{\sim}{A}(u_n))\}.$$

3) 向量表示法

$$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{A}(u_1), \underset{\sim}{A}(u_2), \cdots, \underset{\sim}{A}(u_n)).$$

若论域 U 为可列集 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$,则 U 上的模糊子集为

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\underset{\sim}{A}(u_i)}{u_i}.$$

例 2-3　某车间由 5 个工人组成一个工作小组作为论域 U,$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$,"技术优良"为一模糊概念,赋予每个工人属于"技术优良"的隶属度顺次为

0.75、0.50、0.98、0.66、0.84，则模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 为

$$\underset{\sim}{A}=0.75/u_1+0.50/u_2+0.98/u_3+0.66/u_4+0.84/u_5.$$

例 2-4 设 $X=\mathbf{N}=\{$自然数$\}$，$\underset{\sim}{A}\in F(X)$，且

$$\underset{\sim}{A}=0.1/7+0.5/8+0.8/9+1/10+0.8/11+0.5/12+0.1/13,$$

则 $\underset{\sim}{A}$ 表示模糊集“近似于 10.”

对于任何论域 U(尤其是无限集)，Zadeh 用积分符号将 U 上的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 统一在如下形式中：

$$\underset{\sim}{A}=\int_{u\in U}\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}.$$

其中，$\dfrac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}$ 表示元素 u 对模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 隶属度为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$，$\dfrac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}$ 不是分数，“$\int$”也不是普通的积分.

例 2-5 例 2-1 中的 $\underset{\sim}{B}$(年轻)、$\underset{\sim}{A}$(年老)可分别表示为

$$\underset{\sim}{B}=\int_{x\in[0,25]}\frac{1}{x}+\int_{x\in(25,100]}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x,$$

$$\underset{\sim}{A}=\int_{x\in[0,50]}\frac{0}{x}+\int_{x\in(50,100]}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x.$$

注意 经典集合也可用 Zadeh 方法表示.例如，论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 可以表示为

$$U=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}.$$

这表明 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 绝对地属于 U，即 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对 U 的隶属度为 1.

2.1.3 三类隶属函数

1) S 函数(偏大型隶属函数)

$$S(x;a,b)=\begin{cases}0, & x\leqslant a;\\ 2\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, & a<x\leqslant\dfrac{a+b}{2};\\ 1-2\left(\dfrac{x-b}{b-a}\right)^2, & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b;\\ 1, & b<x.\end{cases}$$

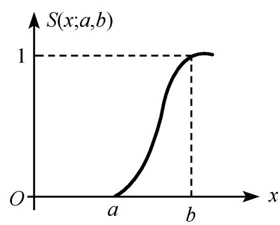


图 2-4

其曲线如图 2-4 所示.

易知，S 函数 $S(x;a,b)$ 是 x 的连续递增函数，$S\left(\dfrac{a+b}{2};a,b\right)=\dfrac{1}{2}$.模糊集“年老”可定义为 $\underset{\sim}{A}(x)=$

$S(x;50,70)$.像"热"、"高个子"、"大"以及颜色的"浓"等表示偏向大的一方的模糊现象的模糊集的隶属函数均可通过 S 函数来定义.

2) Z 函数(偏小型隶属函数)

$$Z(x;a,b)=1-S(x;a,b),$$

其曲线如图 2-5 所示.

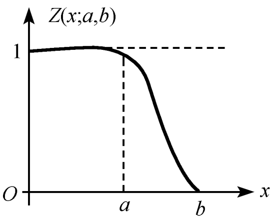


图 2-5

同样由 S 函数的性质可知,Z 函数 $Z(x;a,b)$是 x 的连续递减函数,$Z\left(\frac{a+b}{2};a,b\right)=\frac{1}{2}$.模糊集"年轻"可定义为模糊集 $\underset{\sim}{B}(x)=Z(x;25,50)$.像表述"冷"、"矮个子"、"小"以及颜色的"淡"等偏向小的一方的模糊现象的模糊集的隶属函数均可通过 Z 函数来定义.

3) Π 函数(中间型隶属函数)

$$\pi(x;a,b)=\begin{cases} S(x;b-a,b), & x\leqslant b; \\ Z(x;b,b+a), & x>b. \end{cases}$$

其曲线如图 2-6 所示.

由 Z 函数与 S 函数的性质可知,Π 函数 $\pi(x;a,b)$是 x 的连续函数,$x\leqslant b$ 时递增,$x>b$ 时递减,且曲线关于 $x=b$ 对称.模糊集"中年"可定义为 $\underset{\sim}{C}(x)=\pi(x;10,40)$.像描述"适中"、"温和"及"平均"等趋于中间的模糊现象的模糊集的隶属函数都可用 Π 函数来定义.

对于上述三类隶属函数,今后还将对其更一般的形式进行讨论.

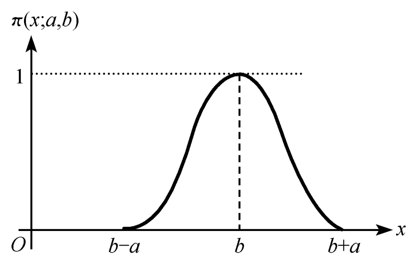


图 2-6

2.2　模糊集合的运算及性质

2.2.1　模糊集合的运算

由于模糊集中没有点和集之间的绝对属于关系,所以其运算的定义只能以隶属函数间的关系来确定.两模糊集合的具体运算,实际上就是逐点地对隶属度作相应的运算.目前,一般情况下仍沿用 Zadeh 的定义.

定义 2-2　设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(U)$, $\forall x\in U$,

(1) $\underset{\sim}{A}=\varnothing\Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(x)=0$;

(2) $\underset{\sim}{A}=U\Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(x)=1$;

(3) $\underset{\sim}{A}\subseteq \underset{\sim}{B}\Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(x)\leqslant \underset{\sim}{B}(x)$,称 $\underset{\sim}{B}$ 包含 $\underset{\sim}{A}$ 或 $\underset{\sim}{A}$ 包含于 $\underset{\sim}{B}$;

(4) $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow \underset{\sim}{A}(x)=\underset{\sim}{B}(x)$,称 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 相等.

定义 2-3 设 $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in F(U)$,$\forall x\in U$,

(1) 称 $\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的并集,即

$$(\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B})(x)=\underset{\sim}{A}(x)\vee \underset{\sim}{B}(x);$$

(2) 称 $\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的交集,即

$$(\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B})(x)=\underset{\sim}{A}(x)\wedge \underset{\sim}{B}(x);$$

(3) 称 $\underset{\sim}{A}^c$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的补集或余集,即

$$\underset{\sim}{A}^c(x)=1-\underset{\sim}{A}(x).$$

模糊集的并、交运算可推广到任意多个.设 $\underset{\sim}{A}_t\in F(U)$,$t\in T$($T$ 为指标集),$\bigcup\limits_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t$ 与 $\bigcap\limits_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t$ 的隶属函数分别定义为

$$\left(\bigcup_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t\right)(x)=\bigvee_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t(x),$$
$$\left(\bigcap_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t\right)(x)=\bigwedge_{t\in T}\underset{\sim}{A}_t(x).$$

论域 U 为有限集,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,且

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{A}(x_i)}{x_i},\qquad \underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{B}(x_i)}{x_i},$$

则

$$\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{A}(x_i)\vee \underset{\sim}{B}(x_i)}{x_i},$$

$$\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\underset{\sim}{A}(x_i)\wedge \underset{\sim}{B}(x_i)}{x_i},\qquad \underset{\sim}{A}^c=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\underset{\sim}{A}(x_i)}{x_i}.$$

论域 U 为无限集,且

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(x)}{x},\qquad \underset{\sim}{B}=\int_U\frac{\underset{\sim}{B}(x)}{x},$$

则

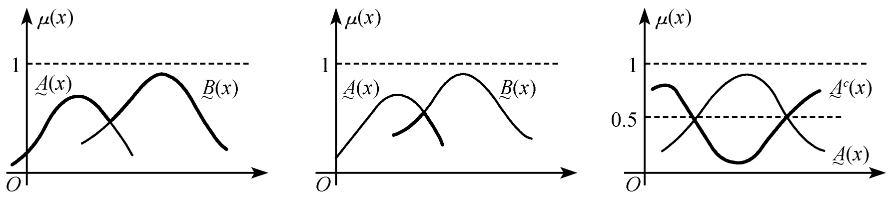
$$\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(x)\vee \underset{\sim}{B}(x)}{x},$$

$$\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}=\int_U\frac{\underset{\sim}{A}(x)\wedge \underset{\sim}{B}(x)}{x},\qquad \underset{\sim}{A}^c=\int_U\frac{1-\underset{\sim}{A}(x)}{x}.$$

图 2-7 给出了定义 2-3 中的 $\underset{\sim}{A}\cup \underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{A}\cap \underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{A}^c$ 的示意图.

例 2-6 设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$(商品集),在 U 上定义两个模糊集:$\underset{\sim}{A}$=“商品质量好”,$\underset{\sim}{B}$=“商品质量差”.并设

$$\underset{\sim}{A}=(0.80,0.55,0,0.30,1),\qquad \underset{\sim}{B}=(0.10,0.21,0.86,0.60,0),$$



$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$　　$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$　　$\underset{\sim}{A}^c$

(a)　　(b)　　(c)

图 2-7

则,“商品质量不好”的模糊集为

$$\underset{\sim}{A}^c=(0.20,0.45,1,0.70,0).$$

容易算得

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^c=(0.80,0.55,1,0.70,1).$$

由此可知,$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}^c\neq U$.同样,$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}^c\neq\varnothing$.

值得注意的是,“商品质量不好”并不等同于“商品质量差”.这正表明,用模糊集描述这些概念比经典集合好,模糊集能够很好地表现这两个概念的差异.

例 2-7　计算上节例 2-1 中模糊集 $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}$ 的并、交和余.

解　先求两曲线的交点,即解方程

$$\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}=\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1},$$

得近似解 $x^*=51$,于是

$$\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}=\int_{0\leqslant x\leqslant 25}\frac{1}{x}+\int_{25<x\leqslant 51}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x+\int_{51<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x;$$

$$\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}=\int_{0\leqslant x\leqslant 50}\frac{0}{x}+\int_{50<x\leqslant 51}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x+\int_{51<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x;$$

$$\underset{\sim}{B}^c=\int_{0\leqslant x\leqslant 25}\frac{0}{x}+\int_{25<x\leqslant 100}1-\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x;$$

$$\underset{\sim}{A}^c=\int_{0\leqslant x\leqslant 50}\frac{1}{x}+\int_{50<x\leqslant 100}1-\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x.$$

2.2.2　模糊集合运算性质

定理 2-1　$(F(U),\cup,\cap,{}^c)$具有如下性质:

(1) 幂等律　$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$,　$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$;

(2) 交换律　$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$,　$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$;

(3) 结合律　$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$,