

# 非线性最优控制计算方法及其应用

张 雷 曾 蓉 陈 聆 编著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

作者多年来为四川省某些高校理工科专业的硕士研究生开设“最优控制理论及方法”课程,对教学、科研实践中搜集整理的大量素材,经过充分酝酿、反复修订、编辑成书。本书在内容处理上注重基本概念和基本理论的阐述,突出计算方法和程序设计的训练,强调理论和方法的实际应用,引导学生主动思考,激发学生的学习兴趣,提高学生分析和解决实际问题的能力。

全书共分6篇(含预篇),内容包括无约束及约束变分方法、离散及连续系统动态规划方法、无约束及约束数值方法、LQR问题等。在LQR问题中将介绍标准LQR问题、可转化为LQR问题的各种调节器。在介绍次优LQR问题中,引进了作者在科研工作中整理提炼的一些素材。书中结合算法给出最优控制问题的大量实例,包括空间技术、工程问题、经济计划和管理问题、高温超导磁悬浮等应用模型。

本书既可用于学术研究,也可以用作应用数学、运筹学及控制论专业的硕士、博士研究生教材,同时可供科技人员自学参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性最优控制计算方法及其应用/张雷,曾蓉,陈聆编著. —北京:科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-045290-0

I. ①非… II. ①张… ②曾… ③陈… III. ①非线性-最佳控制-计算方法  
IV. ①O232

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第177355号

责任编辑:李静科 赵彦超 / 责任校对:张凤琴

责任印制:徐晓晨 / 封面设计:陈 敬

**科学出版社 出版**

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**北京教图印刷有限公司印刷**

科学出版社总发行 各地新华书店经销

\*

2015年9月第 一 版 开本:720×1000 B5

2015年9月第一次印刷 印张:18 3/8

字数:355 000

**定价:88.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

空间技术的发展及工程、生产问题的需要,促进了控制工程理论的突破,产生了现代控制理论,并采用时域方法,以最优化为准则处理多输入-输出的复杂被控系统. 20 世纪 60 年代随着空间计划的实施,现代控制理论迅猛发展,许多分支学科逐渐壮大,主要包括线性系统及非线性系统的一般理论,最优控制理论,分布参数控制理论,系统辨识、状态滤波估计,随机控制及模糊控制,大系统控制等. 控制理论的迅速发展及各学科的相互渗透使得我们难以面面俱到. 本书着重研究确定性的最优控制问题的计算方法以及一些典型的应用模型.

最优控制方法被用于求解许多航空航天问题、经济计划及生产管理问题、外形设计及大型空间结构问题. 近 20 年来,非线性最优控制更是被用于多原子大气反应动力学、地矿勘探及油气开发工程等领域. 最优控制是最为困难的优化问题之一. 决策变量是一个可测函数,等式约束由常微分方程或偏微分方程及各种边界条件表示,而不等式约束可能涉及边界条件、全部状态轨迹和控制作用. 本书给出最优控制问题的一般提法,着重于由常微分方程描述的系统. 在相当长的时间内,庞特里亚金(Pontryagin)的极值原理和贝尔曼(Bellman)的动态规划为人们求解最优控制问题提供了依据和方法. 20 世纪 70 年代以来,非线性系统开环控制的最优控制算法有了新的发展,非线性规划算法被推广到最优控制中,从而形成无约束和约束最优控制的数值算法.

近 30 年来,线性二次型调节器问题(LQR 问题)基于如下原因越来越受到人们关注:一方面,非线性最优控制在通常情况下很难求得解析解,用数值方法可以得到数值解,但计算量很大,且有诸多限制. 与此相反,几乎所有线性最优控制问题(包括 LQR 问题)都较容易求得解析解且易于在技术上实现. 另一方面,小信号条件下运行的非线性控制系统可以应用线性最优控制的结果. 因此本书推出 LQR 问题专题,将传统方法和现代方法有机结合形成本书的主要特色.

本书共分 6 篇(含预篇),内容包括无约束及约束变分方法、离散及连续系统动态规划方法、无约束及约束数值方法;在 LQR 问题中将介绍标准 LQR 问题,可转化为 LQR 问题的各种调节器以及次优 LQR 问题. 书中结合算法给出最优控制问题的大量实例,包括空间技术、工程问题、经济计划和管理问题、高温超导磁悬浮等应用

模型.

本书既可用于学术研究,也可以用作应用数学、运筹学及控制专业的博士、硕士研究生教材,同时可供科技人员自学参考.

本书的出版承蒙国家自然科学基金(项目编号:20873104)、四川省杰出青年学术技术带头人后续计划(项目编号:2012JQ0058)、“油气藏地质及开发工程”国家重点实验室基金的资助.作者特别感谢科学出版社对本书的出版所给予的支持和帮助.

本书由西南石油大学张雷教授、西南交通大学曾蓉博士、成都理工大学陈聆教授共同编著.四川大学张光澄教授担任主审.本书编写工作具体分工为:预篇、第1篇、第2篇、第4篇(第12章和13章)由张雷执笔;第3篇、第4篇(第14章和15章)、第5篇(第17章和18章)由曾蓉执笔;第5篇第16章由陈聆执笔.全书由张雷统稿.

作者十分感谢成都理工大学郭科教授对本书编写给予的关心和支持,四川大学侯泽华副教授、西南石油大学博士研究生程正军等对本书初稿的整理做了大量细致的工作,在此一并致以谢意.

限于作者水平,不当之处在所难免,诚恳读者批评指正.

张 雷

2014年9月于西南石油大学

## 主要符号说明

$E^n$ ——Euclid 空间

$\mathbf{R}^n$ ——实 Euclid 空间

$H$ ——实 Banach 空间

$D \subset H$ —— $D$  属于  $H$  的开子集

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ —— $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维行向量(或点)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ —— $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维列向量(或点)

$x_i$ —— $n$  维向量  $x$  的第  $i$  个分量

$y(x)$ —— $H$  中的标量函数

$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$ —— $H$  中的  $n$  维向量函数

$y_i(x)$ —— $n$  维向量函数的第  $i$  个分量(标量函数)

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ —— $H$  中的  $n$  维向量函数

$x_i(t)$ —— $n$  维向量中的第  $i$  个分量(标量函数)

$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ ——意同  $\mathbf{x}(t)$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ——属于  $\mathbf{R}^n$  的任意  $n$  维实向量

$f: S \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ —— $f$  是定义在  $\mathbf{R}^n$  上区域  $S$  中的实值函数

$\forall y(x) \in D \subset H$ ——属于  $D$  的任意标量函数

$J: D \subset H \rightarrow \mathbf{R}^1$ —— $J$  是定义在  $H$  上开集  $D$  中的实值泛函

$\|\cdot\|_p$ —— $\mathbf{R}^n$  中的向量或  $n$  阶方阵的  $p$  范数 ( $p \geq 1$ )

$\|\mathbf{x}\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

$\|\cdot\|_p$ —— $H$  中标量函数或向量函数的  $p$  范数 ( $p \geq 1$ )

$\|y(x)\|_p = \left[ \int_a^b y^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $y(x)$  为标量函数

$\|\mathbf{y}(x)\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n \int_a^b y_i^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $\mathbf{y}(x)$  为向量函数,  $y_i(x)$  为其分量函数

$\min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \left( \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} f(\mathbf{x}) \right)$ ——实值函数  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{R}^n$  上的最小(最大)值

$\min_{y \in D \subset H} J(y) \left( \max_{y \in D \subset H} J(y) \right)$ ——实值泛函在  $D \subset H$  上的最小(最大)值

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{K}$  等——常数矩阵

$\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{K}(t)$  等——时变矩阵

$\mathbf{A}^T$ ——矩阵  $\mathbf{A}$  的转置 ( $\mathbf{A}^T(t)$  意同  $\mathbf{A}^T$ )

$\mathbf{A}^{-1}$ ——满秩方阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵 ( $\mathbf{A}^{-1}(t)$  意同  $\mathbf{A}^{-1}$ )

$\text{tr}\mathbf{A}$ ——方阵  $\mathbf{A}$  的迹 ( $\text{tr}\mathbf{A}(t)$  意同  $\text{tr}\mathbf{A}$ )

$\dot{y}(x)$ ——同  $y'(x)$

$F_{y'}(x, y, y')$ ——同  $\frac{\partial F}{\partial y}$

$F_{y'}(x, y, y')$ ——同  $\frac{\partial F}{\partial y'}$

$\approx$ ——近似于

$\in$ ——属于

$\notin$ ——不属于

$\cup$ ——集合的并运算

$\cap$ ——集合的交运算

$\supset$ ——集合之间的包含

$\subset$ ——集合之间的被包含

$\exists$ ——存在

s. t. ——“满足于(subject to)”的缩写

$U(y_0, \delta)$ ——以  $y_0$  为心、 $\delta$  为半径的邻域

# 目 录

前言

主要符号说明

## 预篇 变分原理与最优控制

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 第 1 章 变分原理 .....                                                               | 3  |
| 1.1 泛函极值问题实例 .....                                                             | 3  |
| 1.2 泛函的极值 .....                                                                | 6  |
| 1.2.1 极值的定义 .....                                                              | 6  |
| 1.2.2 极值曲线与绝对极值 .....                                                          | 8  |
| 1.3 泛函的变分 .....                                                                | 10 |
| 1.3.1 变分的定义和性质 .....                                                           | 10 |
| 1.3.2 泛函极值的必要条件 .....                                                          | 14 |
| 1.4 无约束变分问题 .....                                                              | 15 |
| 1.4.1 必要条件 .....                                                               | 15 |
| 1.4.2 横截条件 .....                                                               | 18 |
| 1.4.3 充分条件 .....                                                               | 19 |
| 1.4.4 含多个函数的泛函变分问题 .....                                                       | 20 |
| 1.5 约束变分问题 .....                                                               | 21 |
| 1.5.1 $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0$ 型约束 .....                              | 21 |
| 1.5.2 $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) = 0$ 型约束 ..... | 22 |
| 第 2 章 最优控制问题及实例 .....                                                          | 24 |
| 2.1 动态系统与状态空间简介 .....                                                          | 24 |
| 2.1.1 动态系统的数学描述 .....                                                          | 24 |
| 2.1.2 动态系统的状态空间 .....                                                          | 25 |
| 2.1.3 动态系统的几种形式 .....                                                          | 27 |
| 2.2 最优控制概述 .....                                                               | 27 |
| 2.3 最优控制实例分析 .....                                                             | 30 |
| 2.3.1 空间技术的问题 .....                                                            | 30 |
| 2.3.2 工程问题 .....                                                               | 32 |
| 2.3.3 生产问题 .....                                                               | 33 |

|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| 2.3.4 运动学问题 .....            | 34        |
| <b>第3章 最优控制问题的数学描述 .....</b> | <b>35</b> |
| 3.1 最优控制问题的初等描述 .....        | 35        |
| 3.1.1 受控制系统的数学模型 .....       | 35        |
| 3.1.2 约束条件 .....             | 36        |
| 3.1.3 性能指标 .....             | 36        |
| 3.1.4 最优控制的提法 .....          | 37        |
| 3.2 精确数学表达形式 .....           | 38        |
| 3.3 离散系统最优控制描述 .....         | 39        |
| 3.3.1 离散系统的控制问题 .....        | 39        |
| 3.3.2 连续控制问题离散化 .....        | 40        |

## 第1篇 最优控制问题的变分方法

|                                                                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>第4章 最优控制与变分问题的相互转换 .....</b>                                                                                           | <b>43</b> |
| 4.1 最优控制问题的三种形式 .....                                                                                                     | 43        |
| 4.1.1 Lagrange 问题(积分型性能指标) .....                                                                                          | 43        |
| 4.1.2 Mayer 问题(终端指标) .....                                                                                                | 43        |
| 4.1.3 Bolza 问题(综合指标) .....                                                                                                | 43        |
| 4.2 三种形式的等价关系 .....                                                                                                       | 44        |
| 4.2.1 Bolza 问题转化为 Lagrange 问题 .....                                                                                       | 44        |
| 4.2.2 Bolza 问题转化为 Mayer 问题 .....                                                                                          | 44        |
| 4.2.3 Lagrange 问题转化为 Mayer 问题 .....                                                                                       | 45        |
| 4.3 变分问题的三种形式及其等价关系 .....                                                                                                 | 45        |
| 4.3.1 变分问题的三种形式 .....                                                                                                     | 45        |
| 4.3.2 三种形式的等价关系 .....                                                                                                     | 46        |
| 4.4 最优控制问题化为变分问题 .....                                                                                                    | 46        |
| 4.5 变分问题化为最优控制问题 .....                                                                                                    | 48        |
| <b>第5章 无约束最优控制问题的变分方法 .....</b>                                                                                           | <b>49</b> |
| 5.1 数学模型与终端状态 .....                                                                                                       | 49        |
| 5.2 固定终端时间极值的必要条件 .....                                                                                                   | 51        |
| 5.2.1 $x(t_f)$ 自由的情形 .....                                                                                                | 51        |
| 5.2.2 $x(t_f)$ 受约束的情形 .....                                                                                               | 54        |
| 5.3 自由终端时间极值的必要条件 .....                                                                                                   | 58        |
| 5.3.1 $\mathbf{S}=\mathbf{R}^n$ 的情形 .....                                                                                 | 59        |
| 5.3.2 $\mathbf{S}=\{\mathbf{x}(t_f)   \mathbf{N}(\mathbf{x}(t_f), t_f)=\mathbf{0}, \mathbf{N}$ 为 $q$ 维向量函数 $\}$ 的情形 ..... | 60        |

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 5.4 一般结论及例子 .....              | 64        |
| <b>第6章 约束最优控制问题的变分方法 .....</b> | <b>69</b> |
| 6.1 问题提出 .....                 | 69        |
| 6.2 等式约束下的变分方法 .....           | 70        |
| 6.3 特殊等式约束下的迭代方法 .....         | 72        |
| 6.4 不等式约束下的变分方法 .....          | 74        |
| 6.4.1 Pontryagin 极小值原理 .....   | 74        |
| 6.4.2 一般方法及例子 .....            | 76        |
| 6.4.3 问题与思考 .....              | 79        |

## 第2篇 动态规划方法

|                                     |           |
|-------------------------------------|-----------|
| <b>第7章 离散系统的动态规划方法 .....</b>        | <b>83</b> |
| 7.1 多阶段决策问题(引例及相关基本概念) .....        | 83        |
| 7.2 多阶段决策问题的数学描述 .....              | 86        |
| 7.2.1 数学模型 .....                    | 86        |
| 7.2.2 Bellman 最优性原理 .....           | 86        |
| 7.2.3 动态规划基本定理 .....                | 87        |
| 7.3 求解多阶段决策问题的动态规划方法 .....          | 88        |
| <b>第8章 连续系统的动态规划方法 .....</b>        | <b>93</b> |
| 8.1 连续系统的最优性原理 .....                | 93        |
| 8.2 最优控制的必要条件 .....                 | 94        |
| 8.3 动态规划计算方法 .....                  | 97        |
| 8.4 算例 .....                        | 98        |
| 8.5 其他终端时刻、终端状态的情形 .....            | 101       |
| 8.6 两种系统(离散与连续)动态规划的比较 .....        | 102       |
| 8.6.1 最优性原理 .....                   | 102       |
| 8.6.2 最优值函数 .....                   | 103       |
| 8.6.3 基本方程(最优值函数所满足的方程) .....       | 104       |
| 8.7 无约束变分方法、约束变分方法与连续动态规划方法比较 ..... | 104       |

## 第3篇 最优控制问题的数值方法

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| <b>第9章 两点边值问题 .....</b> | <b>109</b> |
| 9.1 引言 .....            | 109        |
| 9.2 线性边值问题 .....        | 110        |
| 9.2.1 基本恒等式与共轭函数法 ..... | 111        |

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| 9.2.2 补足函数法 .....                     | 114        |
| 9.3 非线性边值问题 .....                     | 116        |
| 9.3.1 迭代-共轭函数法 .....                  | 116        |
| 9.3.2 拟线性方法(Newton 法与补足函数法联合使用) ..... | 119        |
| 9.3.3 优化方法 .....                      | 121        |
| 9.3.4 Newton 法 .....                  | 122        |
| 9.4 隐式边界条件的求解 .....                   | 124        |
| 9.5 多重打靶方法 .....                      | 126        |
| <b>第 10 章 无约束最优控制问题的数值方法 .....</b>    | <b>129</b> |
| 10.1 无约束变分方法的迭代算法 .....               | 129        |
| 10.2 梯度法 .....                        | 130        |
| 10.2.1 泛函的梯度 .....                    | 130        |
| 10.2.2 迭代步长因子 $\alpha$ 的选择 .....      | 132        |
| 10.2.3 梯度算法 .....                     | 132        |
| 10.3 共轭梯度法 .....                      | 137        |
| 10.4 Newton 法(二阶变分法) .....            | 138        |
| 10.5 变尺度方法 .....                      | 139        |
| <b>第 11 章 约束最优控制问题的数值方法 .....</b>     | <b>141</b> |
| 11.1 控制变量约束的处理 .....                  | 141        |
| 11.2 约束梯度算法 .....                     | 142        |
| 11.3 Frank-Wolfe 方法 .....             | 143        |
| 11.4 罚函数法 .....                       | 144        |
| 11.5 另外形式的迭代算法 .....                  | 145        |

## 第 4 篇 LQR 问题专题研究

|                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>第 12 章 标准 LQR 问题 .....</b>                                          | <b>151</b> |
| 12.1 有限时间的 LQR 问题(连续系统的状态调节器) .....                                    | 151        |
| 12.1.1 数学模型 .....                                                      | 151        |
| 12.1.2 用最优性条件解反馈形式 $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ..... | 151        |
| 12.1.3 求解有限时间 LQR 问题(线性二次型最优控制问题)的步骤 .....                             | 155        |
| 12.1.4 关于 Riccati 矩阵的一些性质 .....                                        | 159        |
| 12.2 有限时间的 LQR 问题(离散系统的状态调节器) .....                                    | 161        |
| 12.2.1 离散系统的数学模型 .....                                                 | 161        |
| 12.2.2 由极小值原理求最优反馈律 .....                                              | 162        |
| 12.2.3 有限时间离散系统 LQR 问题解题步骤 .....                                       | 162        |

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| 12.2.4 定常系统的动态规划解法 .....                                 | 163        |
| 12.3 无限时间的状态调节器 .....                                    | 170        |
| 12.3.1 数学模型 .....                                        | 170        |
| 12.3.2 最优反馈律 .....                                       | 171        |
| 12.4 无限时间的定常状态调节器 .....                                  | 172        |
| 12.4.1 数学模型 .....                                        | 172        |
| 12.4.2 Riccati 矩阵 $\mathbf{K}(t, 0, \infty)$ 的定常性质 ..... | 173        |
| 12.5 附录 .....                                            | 175        |
| 12.5.1 线性时变系统的解 .....                                    | 176        |
| 12.5.2 线性定常系统的解 .....                                    | 177        |
| 12.5.3 线性系统的可控性 .....                                    | 178        |
| 12.5.4 线性系统的可观性 .....                                    | 179        |
| <b>第 13 章 可转化为状态调节器的 LQR 问题 .....</b>                    | <b>182</b> |
| 13.1 输出调节器 .....                                         | 182        |
| 13.1.1 有限时间的输出调节器 .....                                  | 182        |
| 13.1.2 无限时间的输出调节器(定常系统) .....                            | 183        |
| 13.2 具有指定稳定度 $\alpha$ 的调节器 .....                         | 184        |
| 13.3 常值干扰下的调节器 .....                                     | 186        |
| 13.3.1 不考虑输出方程的数学模型 .....                                | 186        |
| 13.3.2 最优反馈律 .....                                       | 187        |
| 13.3.3 考虑输出方程的数学模型 .....                                 | 189        |
| 13.4 跟踪调节器 .....                                         | 193        |
| 13.4.1 不考虑输出 $y(t)$ 的光滑要求 .....                          | 193        |
| 13.4.2 考虑对 $y(t)$ 的光滑要求 .....                            | 194        |
| <b>第 14 章 次优 LQR 问题 .....</b>                            | <b>198</b> |
| 14.1 问题的提出(次优反馈律) .....                                  | 198        |
| 14.2 关于代价矩阵 $V_L(t)$ 及其性质 .....                          | 199        |
| 14.3 次优控制的数学模型(次优 LQR 问题) .....                          | 201        |
| 14.3.1 $L(t)$ 的结构问题 .....                                | 201        |
| 14.3.2 $L(t)$ 的最优选择 .....                                | 202        |
| 14.4 次优增益矩阵的收敛性和误差估计 .....                               | 203        |
| 14.5 次优 LQR 问题的最优性条件(必要条件) .....                         | 206        |
| 14.6 分段定常增益矩阵的算法设计 .....                                 | 210        |
| <b>第 15 章 无限终端次优调节器的研究 .....</b>                         | <b>213</b> |
| 15.1 无限终端定常状态调节器的次优输出反馈律 .....                           | 213        |

|        |                           |     |
|--------|---------------------------|-----|
| 15.2   | 无限终端定常输出调节器的最优输出反馈律 ..... | 216 |
| 15.3   | 带控制结构约束的无线终端定常调节器 .....   | 217 |
| 15.3.1 | 次优模型的建立 .....             | 218 |
| 15.3.2 | 次优反馈的必要条件 .....           | 218 |
| 15.4   | 算法设计 .....                | 220 |

## 第5篇 最优控制的应用模型

|        |                                      |     |
|--------|--------------------------------------|-----|
| 第16章   | 最优管理问题 .....                         | 225 |
| 16.1   | 生产与库存问题 .....                        | 225 |
| 16.1.1 | 离散时间系统的最优库存模型 .....                  | 225 |
| 16.1.2 | 类似于离散时间的最优库存模型,关于连续时间系统的最优库存模型 ..... | 233 |
| 16.2   | 最优消费时的最优积累率 .....                    | 235 |
| 16.3   | 最优经济增长模型 .....                       | 238 |
| 16.3.1 | 最优资本积累模型 .....                       | 238 |
| 16.3.2 | 引入人口平均消费量的模型 .....                   | 239 |
| 16.4   | 最优投资模型 .....                         | 242 |
| 第17章   | 最短时间和最少燃料的最优控制 .....                 | 246 |
| 17.1   | Bang-Bang 控制 .....                   | 246 |
| 17.2   | 非线性系统的时间最优控制 .....                   | 258 |
| 17.3   | 线性定常系统非奇异的判别条件 .....                 | 260 |
| 17.4   | 最小燃料问题 .....                         | 263 |
| 17.4.1 | 燃料最优控制 .....                         | 263 |
| 17.4.2 | 时间-燃料综合最优控制 .....                    | 266 |
| 第18章   | 最优控制应用实际案例 .....                     |     |
|        | ——第二代 YBCO 高温超导带材磁悬浮系统的稳定控制 .....    | 270 |
| 18.1   | 问题的提出 .....                          | 270 |
| 18.2   | 建模分析 .....                           | 271 |
| 18.3   | 模型的建立 .....                          | 274 |
| 18.4   | 模型的求解 .....                          | 275 |
| 18.4.1 | 静态外磁场下优化模型的求解 .....                  | 275 |
| 18.4.2 | 动态外磁场下最优控制模型的求解 .....                | 279 |
| 参考文献   | .....                                | 280 |

## 预篇 变分原理与最优控制

本篇介绍泛函极值与泛函变分的概念、无约束与约束变分问题,通过最优控制的大量实例分析,概括出最优控制的数学描述.



# 第1章 变分原理

## 1.1 泛函极值问题实例

**例 1.1**(最速降线问题,即捷线问题) 已知沿垂直平面上两定点  $A, B$ (图 1.1), 一质点在重力作用下由  $A$  滑向  $B$ , 该质点在  $A$  点具有初速度  $v_0$ , 试确定该质点在重力作用下下滑的路径, 且要求所需时间最少.

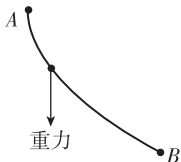


图 1.1

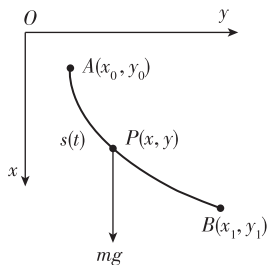


图 1.2

**解** 首先建立平面坐标系(图 1.2), 设  $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ ,  $\widehat{AB}$  的方程  $y = y(x)$ , 设质点从  $A$  出发, 经时间  $t$  沿  $\widehat{AB}$  运动到点  $P(x, y)$ , 所经过的路程为  $s(t)$ , 据能量守恒定律

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = mg(y - y_0)$$

由此得

$$v = \sqrt{2g(y - y_0) + v_0^2} = \sqrt{2g(y - a)}$$

其中,  $a = y_0 - \frac{v_0^2}{2g}$ , 令  $\frac{ds}{dt} = v$ , 于是有

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y - a)}} = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y - a)}} dx$$

故从  $A$  至  $B$  所需时间为

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y - a)}} dx$$

因此, 问题是选择以  $A$  为起点,  $B$  为终点的曲线  $y = y(x)$ , 使泛函

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y - a)}} dx$$

取最小值,即是求解下列问题:

$$\min J(y)$$

且  $y(x)$  满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

注意:  $\tau = J(y(x))$  是函数  $y(x)$  的函数,故称为泛函数,简称泛函,其严格的数学定义将在后面叙述.

若令  $v_0 = 0, x_0 = y_0 = 0$ , 如图 1.3 所示, 上述问题可简化为

$$\min J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

且  $y(x)$  满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

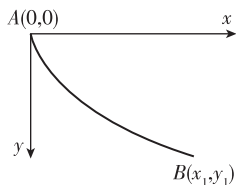


图 1.3

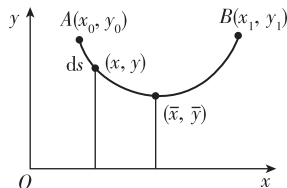


图 1.4

**例 1.2(悬线问题)** 设有一条足够长的绳索,在重力作用下下垂,在平衡状态下求该绳索的形状(假定该绳索密度均匀,密度  $\rho$  为常数).

**解** 建立平面坐标系,如图 1.4 所示.

设  $\widehat{AB}$  的长  $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ , 重心坐标为  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 若  $\widehat{AB}$  的质量集中在重心时,

据  $\widehat{AB}$  对  $y$  轴的力矩公式有

$$\rho L \bar{x} = \int_{x_0}^{x_1} \rho x ds$$

即

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

绳索  $\widehat{AB}$  在重力作用下下垂,其重心也下降,当绳索到达平衡位置时,其重心最低,即  $\bar{y}$  最小,于是有下列泛函极值问题:

$$\min J(y) = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

且  $y(x)$  满足:

约束条件

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}, \quad x \in [x_0, x_1]$$

边界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

若坐标选择如图 1.5 所示, 则有  $\bar{y}$  最大, 即

$$\max J(y) = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

$y(x)$  满足相同的约束条件和边界条件.

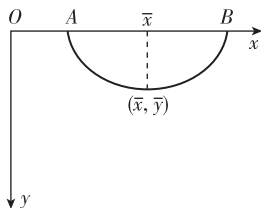


图 1.5

**例 1.3 (等周问题)** 已知封闭平面曲线  $C$ , 该曲线方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

当周长一定时, 求所围成的最大面积.

**解** 由格林公式, 曲线  $C$  所围面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)] dt$$

于是当  $L = \int_{t_0}^{t_1} [x^2(t) + y^2(t)]^{\frac{1}{2}} dt$  一定, 求  $S$  最大的问题, 即形成下列泛函极值问题:

$$\max J(x(t), y(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t)] dt$$

且  $x(t), y(t)$  满足:

边界条件

$$\begin{cases} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

约束条件

$$\frac{dL}{dt} = [x^2(t) + y^2(t)]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

**例 1.4 (短程问题)** 设  $\varphi(x, y, z) = 0$  为已知曲面, 求该曲面上已知两点  $A, B$  间长度最短的曲线.

解 设曲面  $\varphi(x, y, z) = 0$  上的曲线  $AB$  (图 1.6) 的方程为

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

$A, B$  两点的  $x$  坐标分别为  $x_0, x_1$ , 由弧长公式, 该问题即是在  $\varphi(x, y, z) = 0$  上过点  $A, B$ , 求曲线  $y = y(x), z = z(x)$ , 使  $\widehat{AB}$  最短, 为此形成如下泛函极值问题:

$$\min J(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dx$$

且  $y(x), z(x)$  满足:

约束条件

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

边界条件

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, & z(x_0) = z_0 \\ y(x_1) = y_1, & z(x_1) = z_1 \end{cases}$$

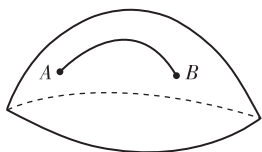


图 1.6

在上面所举的四个实例中, 例 1.1 是平面问题, 且是无约束极值问题, 仅含边界条件; 例 1.2 和例 1.3 同样是平面问题, 但是包含了边界条件和约束条件, 因此是约束极值问题; 例 1.4 是空间问题, 同样既有边界条件又有约束条件, 是约束极值问题.

上述问题在微积分的形成阶段, 曾经是数学史上的难题(几何问题), 类似的物理问题还有光走短程线问题、肥皂泡张成最小曲面问题、微观粒子最稳定状态下处于最小能级问题等.

上述四例的共性是求平面或空间曲线的极值曲线, 它们满足:

- (1) 边界条件、约束条件;
- (2) 实现状态转移(初始状态  $\rightarrow$  终端状态);
- (3) 性能指标最优.

其解析解可由后面介绍的变分方法得出.

## 1.2 泛函的极值

### 1.2.1 极值的定义

设  $H$  是一个实的 Banach(巴拿赫)空间, 即  $H$  是一个完备线性赋范空间,  $D \subset H$  为一个开子集, 即

$$J: \forall y(x) \in D \rightarrow J(y) \in \mathbf{R}$$

则称在  $D$  上定义了一个泛函  $J(y)$ .

在 Banach 空间中, 标量函数  $y(x), z(x)$  均可视为空间的一个点, 其范数定义

如下

$$\begin{cases} \|y(x)\|_p = \left[ \int_a^b y^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}, & p \geq 1 \\ \|y(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| \end{cases}$$

空间中两点距离定义如下

$$\begin{cases} \|y(x) - z(x)\|_p = \left[ \int_a^b (y(x) - z(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ \|y(x) - z(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - z(x)| \end{cases}$$

空间中两点的内积为

$$(y, z) = \int_a^b y(x)z(x) dx$$

或

$$\langle y, z \rangle = \int_a^b y(x)z(x) dx$$

若  $y(x) = (y_1, \dots, y_n)^T, z(x) = (z_1, \dots, z_n)^T$  为  $n$  维向量函数, 则其范数、距离、内积分别定义为

$$\begin{cases} \|y(x)\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n \int_a^b y_i^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ \|y(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^n |y_i(x)| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|y(x) - z(x)\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n \int_a^b (y_i(x) - z_i(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ \|y(x) - z(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^n |y_i(x) - z_i(x)| \end{cases}$$

$$(y, z) = \sum_{i=1}^n \left[ \int_a^b y_i(x)z_i(x) dx \right] \quad \text{或} \quad \langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n \left[ \int_a^b y_i(x)z_i(x) dx \right]$$

下面给出泛函极值(包括条件极值)的定义.

**定义 1.1** 设  $y_0 \in D$ , 若

$$U(y_0, \delta) = \{y \mid \|y - y_0\| < \delta\} \subset D$$

使当  $y \in U(y_0, \delta)$  时, 恒有  $J(y) \geq J(y_0)$  或  $J(y) < J(y_0)$ , 则称泛函  $J(y)$  在  $y = y_0$  达到极小值(或极大值), 统称为极值.

**定义 1.2 (条件极值)** 设  $J: D \subset H \rightarrow \mathbf{R}, \varphi: H \rightarrow H_1$ , 并令

$$M = \{y \in H \mid \varphi(y) = 0\}$$

设  $y_0 \in M \cap D$ , 若存在  $y_0$  的邻域  $U(y_0, \delta)$ , 使当  $x \in U(y_0, \delta) \cap M$  时恒有

$$J(y) \geq J(y_0) \quad \text{或} \quad J(y) < J(y_0)$$

则称  $J(y)$  关于条件  $\varphi(y)=0$  在  $y=y_0$  达到条件极小值(或极大值).

根据泛函的定义,其形式是多种多样的,为了与控制问题相呼应,我们着重讨论具有积分形式泛函的极值问题.在 1.5 节,还将给出泛函极值的各种等价形式.

在 1.1 节中四个例子所示的泛函是含一个或多个函数的泛函,它们的一般形式是

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), \dot{y}(x), x) dx \quad (1.1)$$

$$J(y(x), z(x)) = \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), \dot{y}(x), z(x), \dot{z}(x), x) dx \quad (1.2)$$

另外,还有含一个函数及其高阶导数的泛函

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), \dot{y}(x), \dots, y^{(n)}(x), x) dx \quad (1.3)$$

## 1.2.2 极值曲线与绝对极值

### 1. 容许曲线

在例 1.1 ~ 例 1.4 中,未知函数  $y(x), z(x)$  在一般情况下还要满足一定的附加条件.满足这些附加条件,使  $J(y(x))$  有定义的函数曲线,称为**容许曲线**.就短程线问题而言,泛函所能考虑的曲线,即容许曲线,仅仅是那些通过  $A, B$  两点的连续可微或者连续分段可微函数;又如等周问题,即所求曲线需满足等周条件,不满足该条件的曲线不是容许曲线.

所有容许曲线形成容许曲线族.

### 2. 极值曲线与比较曲线

设  $J(y(x))$  在  $y=y^*(x)$  上达到极值,则称  $y=y^*(x)$  为**极值曲线**;与  $y=y^*(x)$  接近的容许曲线称为**比较曲线**.

### 3. 曲线的接近

接近是一个距离的概念,曲线的接近意味着函数的距离很小.考虑连续函数空间  $C[x_0, x_1]$ ,设标量函数  $y(x), z(x) \in C[x_0, x_1], \epsilon > 0$  是预先给定的小量,如果曲线  $y(x), z(x)$  满足

$$\|y(x) - z(x)\| < \epsilon, \quad x \in [x_0, x_1]$$

则称两个曲线**零级接近**.

可以看出零级接近保证的是两条曲线同时被夹在一条很窄的带状区域中,亦即二者在同一点的形状接近.但仅满足这一条件的曲线具有各种各样的形状接近,曲线在每点的变化趋势有极大差异,为保证曲线  $y(x), z(x)$  在形状上比较吻合,还需引进满足更高要求的曲线接近的概念.

设  $\epsilon > 0$  是预先给定的小量,如果曲线  $y(x), z(x)$ , 当  $x \in [x_0, x_1]$  满足

$$|y(x) - z(x)| < \epsilon, |\dot{y}(x) - \dot{z}(x)| < \epsilon, \dots, |y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)| < \epsilon$$

则称曲线  $y(x)$  与  $z(x)$   **$n$  级接近**. 显然,  $n$  越大, 曲线间接近程度越高. 为方便起见, 在  $C[x_0, x_1]$  空间中, 定义距离

$$d_0(y(x), z(x)) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x) - z(x)| \quad (1.4)$$

而在  $C^{(n)}[x_0, x_1]$  空间 ( $n$  阶连续可微函数空间) 中, 距离

$$d_n(y(x), z(x)) = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \{|y(x) - z(x)|, \dots, |y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x)|\} \quad (1.5)$$

因此, 曲线接近程度的定义可以用一个式子代替, 即

零级接近

$$d_0(y(x), z(x)) < \varepsilon, \quad y(x), z(x) \in C[x_0, x_1]$$

$n$  级接近

$$d_n(y(x), z(x)) < \varepsilon, \quad y(x), z(x) \in C^{(n)}[x_0, x_1]$$

#### 4. 绝对极值与强(弱)极值

**定义 1.3** 若  $y = y^*(x)$  为容许曲线, 如对任何一条容许曲线  $y = y(x)$  都满足

$$J(y(x)) - J(y_0^*(x)) \geq 0$$

则称泛函  $J(y(x))$  在曲线  $y^*(x)$  上达到**绝对极小值**.

**定义 1.4** 若  $y = y^*(x)$  为容许曲线, 如与  $y^*(x)$  接近的容许曲线  $y(x)$  都满足

$$J(y(x)) - J(y_0^*(x)) \geq 0$$

则称泛函  $J(y(x))$  在曲线  $y^*(x)$  上达到**相对极小值**.

根据曲线接近程度的不同, 有下面两个概念.

**定义 1.5** 当容许曲线取自  $C[x_0, x_1]$ , 接近度只满足零级接近, 所得极小值称为**强极小值**.

**定义 1.6** 当容许曲线取自  $C[x_0, x_1]$ , 接近度满足一级接近, 所得极小值称为**弱极小值**.

显然强极值一定为弱极值, 因为  $C[x_0, x_1] \supset C'[x_0, x_1]$ , 且满足一级接近必满足零级接近.

反之不然, 例如, 泛函

$$\int_0^1 y^2 (1 - \dot{y}^2) dx$$

当  $\dot{y}^2 < 1$  时, 积分不为负数; 当  $y = 0$  时, 积分为 0. 在  $y = 0$  一级接近的函数中,  $y = 0$  是使泛函取极小的曲线 (充分接近时可保证  $\dot{y}^2 < 1$ ).

再如, 函数  $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\pi x$ , 当  $n$  充分大时, 与  $y = 0$  零级接近.  $\dot{y}_n = \sqrt{n} \pi \cos n\pi x$ , 不

满足一级接近, 此时使积分值为负, 所以  $y = 0$  非强极小曲线, 只是弱极小曲线.

## 1.3 泛函的变分

### 1.3.1 变分的定义和性质

**定义 1.7** (函数  $y$  的变分) 设  $D$  是标量函数或  $n$  维向量函数组成的集合, 不失一般性, 下面只考虑标量函数的情况. 给定  $y(x) \in D, z(x) \in D$  为比较曲线, 对  $\forall z(x) \in D$ , 称  $z(x) - y(x)$  为函数  $y(x)$  的变分, 记为  $\delta y(x)$  或  $\delta y$ .

对于定义 1.7, 作如下几点解释:

- (1)  $\delta y$  不是由  $y(x)$  唯一确定的, 与  $z(x)$  有关;
- (2)  $\delta y$  与  $\Delta y$  的区别在于:  $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$  是两点  $x, x + \Delta x$  的函数值之差, 而  $\delta y = z(x) - y(x)$  是整个函数  $y(x)$  的改变;
- (3) 对  $J(y)$  而言,  $y(x)$  是它的“自变量”,  $\delta J$  是  $J(y)$  的“自变量”的改变量;
- (4)  $\delta y$  满足如下性质:  $\frac{d}{dx}(\delta y(x)) = \delta \dot{y}(x)$ .

事实上,  $\frac{d}{dx}(\delta y(x)) = \frac{d}{dx}[z(x) - y(x)] = \dot{z}(x) - \dot{y}(x) = \delta \dot{y}(x)$ .

**定义 1.8** (泛函的变分) 设  $J: D \subset H \rightarrow \mathbf{R}$ , 给定  $y_0 \in D$ . 若存在  $h(y) \in H^*$  ( $H^*$  是  $H$  的对偶空间), 使在  $y_0$  附近

$$\Delta J = J(y_0 + \delta y) - J(y_0) = \langle h, \delta y \rangle + w(y_0, \delta y)$$

其中  $w(y_0, \delta y)$  满足

$$\lim_{\|\delta y\| \rightarrow 0} \frac{|w(y_0, \delta y)|}{\|\delta y\|} = 0$$

则称  $\langle h, \delta y \rangle$  是  $J(y)$  在点  $y_0$  处的一阶变分, 记为  $\delta J(y_0)$ .  $J$  在  $y$  处的变分  $\delta J(y)$  简记为  $\delta J$ .

从定义 1.8 不难看到, 泛函的变分类似函数的微分, 它是泛函增量的主部.

给定  $y_0 \in D, \alpha \in \mathbf{R}, \xi \in H$ , 且满足

$$y_0 + \alpha \xi \in D$$

则

$$\delta y_0 = y_0 + \alpha \xi - y_0 = \alpha \xi$$

记

$$I(\alpha) = J(y_0 + \alpha \xi) = J(y_0 + \delta y_0)$$

显然, 当  $y_0, \xi$  给定,  $I(\alpha) = J(y_0 + \delta y_0)$  是参数  $\alpha$  的实值函数.

**定理 1.1** 给定  $y_0$  的某邻域  $U(y_0, \delta)$ , 若对  $\forall y \in U \subset D (y \neq y_0)$  及  $\forall \xi \in H$ , 存在极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(y_0 + \alpha \xi) - J(y_0)}{\alpha} = \langle h(y_0), \xi \rangle$$