国家自然科学基金资助项目
教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目
中国博士后科学基金资助项目
华南理工大学新型工业化研究院资助项目

现代投资组合理论——模型、方法与应用

Modern Portfolio Theory—Model, Methodology and Application

张卫国 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要是作者近年来在投资组合理论与决策分析领域发表于国内外重要期刊上40余篇学术论文的研究成果,另外也介绍了一些国内外其他学者在该领域的研究进展。本书研究了随机不确定环境下的投资组合选择问题和模糊不确定环境下的投资组合选择问题两大方面。作者从现代投资组合选择理论、优化模型与计算方法相结合来考虑,运用现代数学的一些理论(概率统计、最优化、模糊数学及随机控制)、信息科学计算方法及计算机技术,围绕提出不确定环境下资产的收益及风险度量,建立适合不同类型投资者要求和满足各种投资约束条件的优化模型,研究相应的有效算法(包括解析方法、数值方法及智能算法),分析决策要素变化导致结果的变动以及在中国证券市场的应用等问题,试图形成投资组合选择从理论、模型、方法到应用的一个完整分析框架。

本书不仅对于理论工作者掌握研究动态、从事相关研究有指导作用,而且可供从事实际开发的人员学习与使用。本书可作为高等院校数理金融、运筹学、管理科学、系统工程、投资决策相关专业师生研讨和教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

现代投资组合理论:模型、方法与应用/张卫国著.—北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-019085-7

Ⅰ.现… Ⅱ.张… Ⅲ.投资-组合分析 Ⅳ.F830.59

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第085177号

责任编辑:张 兰 李俊峰/责任校对:桂伟利

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年3月第一次印刷 印张:11 1/4

印数:1—2 500 字数:231 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

1990 年，瑞典皇家科学院将诺贝尔经济学奖授予了马科维茨（H. Markowitz)、夏普（W. F. Sharpe ）和米勒（W. Miller)，以表彰他们在投资组合和证券市场理论上的贡献. 投资组合理论是现代金融学和现代投资理论的重要研究领域，是金融工程的重要研究内容，也是风险管理的重要手段和技术. 马科维茨于 1952 年发表了具有开创意义的论文 *Portfolio Selection*，又于 1959 年出版了论著 *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*，阐述了证券收益和风险分析的主要思想和方法，最早提出了投资组合选择理论的均值-方差方法，是金融投资定量化系统理论研究的开端，构成了投资组合理论的核心基础，成为投资管理与决策实践的重要工具. 自 20 世纪 60 年代以来，许多学者都是在这一理论和方法的基础上开展投资组合理论的研究工作，并取得了丰富的研究成果.

投资组合选择是投资者在不确定环境下进行的投资决策问题. 投资组合理论研究主要是围绕如何分析及度量不确定环境下资产的收益及风险，如何建立适合不同类型投资者要求和满足各种投资环境约束的模型并提出相应的有效算法（包括解析方法、数值方法及智能算法）开展研究工作. 现代数学理论、信息处理方法及计算机技术的不断发展，使得投资组合的理论、模型及方法得到了进一步的完善. 经过 50 多年的发展，在理论研究方面，基于随机不确定性投资组合选择理论的研究已经发展到相当完善的程度. 但是基于模糊不确定性投资组合选择理论的研究相对还比较少. 在实践应用方面，随着投资基金业资产规模的迅猛扩张，广泛运用投资组合管理技术的投资基金业作为一个颇具发展前景的产业已越

来越受到各国或地区的重视，在国际金融市场中扮演着越来越重要的角色.

20 世纪 90 年代以来，国内从事这方面教学和科研的学者越来越多，在投资组合选择理论研究上取得了一些高水平的研究成果. 有些学者在该领域的研究工作在国际上也有相当的影响. 张卫国教授就是国内从事投资组合理论与风险管理研究并取得突出成果的青年学者之一. 本书内容主要是作者完成的博士论文《现代投资组合的若干数学模型及算法研究》、博士后研究报告《模糊投资组合决策方法研究》及在研的国家自然科学基金项目《模糊可能性投资组合模型及决策研究》的部分研究成果. 本书将现代投资组合选择理论、优化模型与计算方法相结合，系统论述了国内外在此领域的最新研究成果. 它包括了作者近十年来在国外权威杂志 *European Journal of Operational Research* 及国内权威杂志《系统工程理论与实践》等公开发表的 40 余篇关于投资组合理论研究学术论文的主要成果. 与国内外同类书相比较，本书运用了概率论、模糊数学、最优化、信息科学及行为科学等理论与方法，全面考虑了进行投资组合选择所涉及的各个要素及环境情况，不仅包括了风险资产与无风险资产的各种情形、投资比例（数量）限制的各种情况、交易费用情况等，而且考虑了各类投资者的资金及风险偏好情况. 不仅考虑了静态投资组合选择问题，而且考虑了动态投资组合调整问题. 不仅考虑了随机不确定环境下的投资组合选择问题，而且考虑了模糊不确定环境下的投资组合选择问题. 写作要点清晰、分析透彻. 针对每种情况下的投资组合问题，不仅提出选择理论及数学模型，而且提出具体的算法及实现路径. 体现出知识覆盖面广、理论系统性强、学术水平高、成果创新大等特点. 既注重数学上的严谨，又强调对决策模型的分析与计算，不仅对于理论研究工作者掌握研究动态有指导作用，而且有助于从事实际开发的人员学习与使用. 本书可作为高等院校应用数学、金融学、运筹学、管理科学、系统工程、经济学专业师生研讨和教学. 这是一本具有很高的理论价值和实践应用价值的著作.

在此，我也希望会有更多的人来关心投资组合理论，来从事投资组合理论的研究、教学和应用.

汪应洛

（西安交通大学管理学院名誉院长、中国工程院院士）

前　　言

马科维茨（H. Markowitz）于 1952 年最早提出的关于投资组合选择的理论奠定了金融投资定量化研究的理论基础，成为现代投资理论研究的主要论题和决策管理实践的重要工具. 近 50 多年来，国内外众多学者从事这方面的研究，取得了大量的研究成果. 我国学者在投资组合选择理论研究上也取得了一些具有国际先进水平的研究成果. 有些学者在该领域的研究工作具有国际影响. 现代投资组合理论研究主要是围绕下面三个问题展开：①提出不确定环境下预测资产的收益及度量风险的方法；②建立适合不同类型投资者要求和满足各种投资环境约束的投资组合选择模型；③提出最优投资组合选择的有效算法，解决实际应用. 现代数学理论、信息处理方法及计算机技术的不断发展，使得投资组合的理论、模型及方法得到了进一步的完善.

作者在硕士学习期间开始学习投资组合选择理论，十几年来一直被该领域持续不断的研究发展所吸引. 先后在宁夏自然科学基金项目、国家自然科学基金项目及教育部新世纪优秀人才支持计划项目等支持下，不断深入开展投资组合选择理论、模型、方法及应用研究工作. 本书是作者在投资组合选择理论方面部分研究成果的总结. 关于本书的写作有几点需说明：

1. 主要体现相关研究理论的系统性

作者力求系统介绍现代投资组合选择的相关研究理论. 比较全面地考虑了投资者进行投资组合选择所涉及的各个要素及环境情况，包括了风险资产与无风险资产的各种情形、投资比例（数量）限制的各种情况、交易费用情况，各类投资

者的资金及风险偏好情况等投资约束.不仅有静态投资组合选择问题的研究，而且还有动态投资组合调整问题的研究.不仅有随机不确定环境下的投资组合选择问题的研究，而且还有模糊不确定环境下的投资组合选择问题的研究.

2. 主要体现决策问题的模型化

作者力求全面介绍现代投资组合选择理论的相关优化模型.本书运用了概率论、模糊数学、最优化、信息科学及行为科学等理论与方法，努力将各种决策理论及各种投资约束条件下投资组合选择问题模型化.包括了基于概率理论的投资组合模型、基于可容许误差的投资组合模型及基于模糊可能性理论的投资组合模型等.不仅有静态投资组合选择模型，而且还有动态投资组合调整模型.

3. 主要体现决策方法的数量化及实践应用

作者力求将各种投资组合选择理论决策方法数量化.本书努力给出了各种投资组合优化模型的计算方法，包括解析方法、数值方法及智能算法.主要是追求获得投资组合优化模型最优解的解析方法.这样不仅在学术上追求完善，也为实际应用提供了方便.

在本书涉及的研究中，聂赞坎教授及汪应洛院士给予我精心指导.几年来，两位先生严谨的治学态度、渊博的专业知识、高度的敬业精神、悉心培养学生的高尚品质，深深地影响着我，使我终生受益，也将成为我终生学习的宝贵财富.在此，我对他们致以崇高的敬意和深深的谢意！

在本书的写作和出版过程中，博士后徐维军、彭飞和陈谦勤博士，博士生赵佩华、肖炜麟以及硕士生林洲等做了许多工作，在此也表示感谢！

最后需要指出，由于作者水平有限，本书中不足和缺点难以避免，诚恳欢迎广大读者批评指正.

张卫国

2007 年 2 月 6 日于广州华南理工大学汕头校友楼

目　　录

第1章 绪　论

1.1　现代投资组合理论研究现状评述

Markowitz 于 1952 年、1959 年[1,2]最早提出了关于投资组合的均值-方差方法，它是金融投资定量化研究的开端，成为金融投资理论研究的主要论题和决策实践的重要工具，构成了现代投资组合理论的核心基础．Markowitz 投资组合的均值-方差理论的基本思想是假定投资者都是厌恶风险的，将资产的收益（率）看成是随机变量，用收益（率）的期望（均值）度量投资收益，用收益（率）的方差度量投资收益的风险．Markowitz 的均值-方差模型运用概率论和最优化技术模型化了不确定条件下的投资行为，决策方法是在期望收益给定的条件下，最小化风险；或者在风险给定的条件下，最大化期望收益．

假设投资者选择了 n 种可投资的风险资产进行组合投资．

记

$\boldsymbol{R}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)'$是风险资产的期望收益向量

$\boldsymbol{V}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$是风险资产收益的协方差阵

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$是风险资产投资比例向量

$\boldsymbol{l}=(1,1,\cdots,1)'$是分量全部为 1 的向量

资产组合 $\boldsymbol{x}$ 的期望收益是

$$r(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n} r_i x_i=\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x}$$

资产组合 $\boldsymbol{x}$ 的风险是

$$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x}$$

Markowitz 投资组合的均值-方差模型(Mean Variance 模型,简记为 MV 模型)被描述为如下两种形式的二次规划模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}' \boldsymbol{x} = \mu \\ & \boldsymbol{l}' \boldsymbol{x} = 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中,μ 是投资者给定的期望收益水平.

或者

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{R}' \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} = \sigma^2 \\ & \boldsymbol{l}' \boldsymbol{x} = 1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中,σ^2 是投资者给定的风险水平.

还有如下参数二次规划模型描述的投资组合模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & -t\boldsymbol{R}' \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \boldsymbol{V} \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{l}' \boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{1.3}$$

自 20 世纪 60 年代以来,许多学者在 Markowitz 投资组合的均值-方差理论和方法的基础上开展投资组合理论的研究工作. 先前的投资组合研究者包括有 Sharpe[3~5], Merton[6], Szegö[7], Pang[8], Perold[9], Tobin[10], Vörös[11~13], Best[14~17]等. 这些研究都是在一定的假设条件下, 得到了部分情况下有效投资组合的解析表示或者给出求投资组合有效前沿的数值方法, 但是在一般投资约束条件下,如不允许卖空或者限制投资数量等情形下获得收益相关资产的全部有效投资组合(有效前沿)的解析表示却是非常困难.

Markowitz 等先前的投资组合模型中没有包括无风险资产. 当存在无风险资产时, Tobin[10]研究证明了有效前沿上任何一点都可以表示成为(r_f,0)(r_f 为无风险资产利率)和切点的线性组合, 从而得到了著名的两基金分离定理. 由于一般投资约束条件下有效前沿不再是 $\sigma - r$ 平面上简单的一条双曲线, 而且其有效前沿的解析表示也难以获得, 所以寻找经过(r_f,0)的直线与风险资产有效前沿上的切点就比较困难.

应用投资组合的 Markowitz 模型通常需要下面几个步骤:①估计资产未来的状况;②确定有效前沿的投资机会集;③在有效前沿上最大化投资者收益的效用 $Eu(r)$. Markowitz 的均值-方差方法虽然产生于 20 世纪 50 年代,但是被金融机构和投资者广泛采用是在 80 年代初期.其主要原因是期望收益和协方差矩阵的估计和计算问题. 对于 n 个资产的投资组合问题, 需要估计$(n^2+3n)/2$ 个参数. 绝

大多数金融机构一般情形下将其注意力局限于150～250种证券[18]，需要估计11 475～31 625个参数，而且还要计算150～250阶矩阵的逆，在当时无疑是一个非常麻烦的事情．因此为了应用方便，大批学者致力于研究和改进投资组合模型以及有效算法．其工作大致可以分为三类．

第一类是探讨简化大规模投资组合模型及有效算法，比如，Breen 和 Jackson[19]，Faaland[20]，Bowden[21]，Pang[8]，Perold[9]，Lewis[22]，Konno[23]，Kawadai 和 Konno[24]及 Ballestero[25]等．Perold[9]使用多因素手段降低协方差矩阵的秩，这种方法能够有效地解决含有几千个资产的大规模的 MV 模型．Konno[23]提出了一个协方差矩阵的紧因子分解方法用于解决大规模 MV 模型的算法问题．它对于低秩的二次规划问题比较有效．但是对于数千以上资产的大规模低秩的 MV 模型却是非常耗时的．Kawadai 和 Konno[24]研究了协方差矩阵具有稠密和高秩的大规模 MV 模型的算法．另外，由于用传统的优化方法求解复杂的投资组合问题往往不是十分有效，而启发式算法却能很好地解决该问题．因此，大批的学者应用启发式算法(如遗传算法、模拟退火算法、禁忌算法和人工神经网络等)求解复杂的投资组合问题．Mansini 和 Speranza[26]提出了三种不同的启发式算法求解有最小交易手数限制的投资组合问题，并将它们用于米兰证券交易市场进行验证．Yoshimoto[27]和 Glover[28]用启发式算法研究了具有交易费用的多阶段投资组合问题．Chang[29]用遗传算法(GA)、禁忌算法(TS)和模拟退火算法(SA)来解决投资组合优化问题．Schaerf[30]，Rolland[31]用禁忌算法解决有混合整数约束的投资组合问题．Crama 和 Schyns[32]及 Gilli[33]用模拟退火方法求解有复杂约束的投资组合问题．Yu 和 Wang[34]用神经网络方法求解均值-方差-偏度的投资组合模型．Xia 和 Wang[35,36]用遗传算法求解投资组合问题．

第二类是侧重于简化计算有效组合所需要的数据类型、数据量和计算过程，比如，Markowitz 利用资产收益的观察数据，采用统计平均估计 r 和 $\boldsymbol{V}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$．为了减少模型参数(协方差)估计的计算量，Sharpe[3～5]和 Ross[37]等人提出了市场处于均衡状态下的 CAPM 模型、市场处于不均衡状态下的特征曲线，单因素模型及多因素模型等估计资产收益．在这些估计中，假设资产的收益仅受到一个或者多个因子的影响，通过回归分析法或者因子分析法得到资产收益与影响因子之间的一个线性关系，从而获得资产的收益和方差及协方差的估计．这样就大量的减少了计算量．

第三类是侧重于寻求新的风险度量标准以及在新的投资准则下的投资组合模型．由于 Markowitz 的均值-方差模型中把高于均值的超额收益当作风险来处理，所以一个更确切的风险刻画量是下半方差(Lower Semivariance)．Mao[38]等讨论了均值-下半方差模型．Konno 和 Yamakazi[39～41]、Feinstein 和 Thapa[42]研究了绝对离差来衡量投资组合的风险，提出了基于均值-绝对离差的证券投资组合模型

(MAD模型),简化了投资组合优化的运算,并且Konno和Yamakazi还将其研究成果应用于东京股票市场,并与MV证券组合理论进行比较. Speranza[43]提出了半绝对偏差风险函数. Ogryczak[44],Ouderri和Sullivan[45],Green和Hollifield[46]研究了用半方差作为风险度量标准的投资组合问题. Young[47]用极小极大规则建立了一个投资组合选择的线性规划模型,该模型实际上是以投资组合收益的最小顺序统计量作为风险度量. Cai等[48]用投资组合各项资产收益中的最大期望绝对偏差来刻画风险,也给出了一个投资组合选择的线性规划模型,同时给出了解析的投资组合策略. Young和Trent[49],Elton和Gruber[50],Arditti[51],Jean和Helms[52],Brennan和Schawartz[53]等研究了最大化几何平均收益准则下的投资组合问题等. Konno和Suzuki[54]给出了均值-方差-偏度模型,这种模型在收益分布不对称的情况下是非常有价值的,因为具有相同的均值和方差的投资组合很可能具有不同的偏度,而偏度大的投资组合获得较大收益的可能性也大.但是该模型是三次非凸规划模型,求解比较困难. Fishburn[55]用与预先给定的目标收益的某种负距离(未达标部分)的期望来度量风险,Fishburn的风险度量是相对预先给定的收益目标而言的,这个目标不会随着组合策略的变化而变化.另外Brennan[56],Elton和Gruber[57],Statman[58]等还研究了最优投资组合所应该包含的资产个数问题. Roy[59],Pyle和Yurnovsky[60]等研究了安全第一准则下的最优资产组合选择问题. 与收益-风险型投资组合选择模型的思路不同,安全第一准则模型的决策规则是极小化投资组合收益小于给定的“灾险水平”这一事件的概率,这与后来随机规划中的机会约束概念相一致.

1994年J.P.Morgan投资银行首先推出了基于VaR的风险度量系统,现在VaR被广泛应用于各金融机构,并正在成为度量金融风险的国际标准. Artzner[61]、Pflug[62]、Basak和Shapiro[63]等研究了以VaR作为风险度量指标的投资组合问题.由于VaR不满足相容性风险度量中的次可加性条件(意味着在某些情况下拒绝投资组合分散化)而受到批评,基于此,人们又给出了条件风险值CVaR作为对VaR的一种修正(参见Rockafellar和Uryasev[64]),CVaR不仅对收益的非对称分布、厚尾分布有效,而且可以有效处理除了市场风险以外的其他风险管理问题. 所有这些研究和模型在一定程度上丰富了投资组合理论和模型, 提高了应用价值.

在金融市场中, 交易费用是投资者考虑的一个非常重要的因素. Arnott[65]、Pater[66]和Yoshimoto[27]的实证结果表明,忽视交易费用的存在将会导致非有效的投资组合. Mao[67],Jacob[68],Patel和Subhmanyam[69],Morton和Pliska[70],Levy[71],Li和Wang[72]等研究了具有固定交易费用的投资组合问题.Pogue[73],Chen等[74], Kamin[75], Davis和Norman[76]以及Yoshimoto[27]等研究了变动交易费用的投资组合问题.Mulvey和Vladimirou[77], Atkinson和Al-Ali[78], Dantzig

和 Infanger[79]研究了具有交易费用的多阶段投资组合问题. 这些关于存在交易费用的投资组合问题研究的不足之处是对于交易费用都做了特殊处理，比如将交易费用函数看作固定不变、线性函数、V 型函数等.由于精确地刻画交易成本将会导致一个非凸最小化问题,通常缺乏求解该问题最优解的有效方法.这样使得在这一方面的研究工作相对较少. J.Mulvey[80~81]运用分段线性凸函数近似交易成本函数. 然而,这一方法对于更为重要的非凸交易费用成本函数来说是无效的. Konno 等[82~87]假定风险函数由回报率的绝对离差给出,它替代了传统的标准方差，提出了一种能够求解凹交易费用情况下的均值绝对离差模型(MAD)最优解的分枝定界算法,同时证明了这种方法是计算全局最优解的有效方法.

目前大多数资产组合模型都是建立在概率论基础上. 为了反映现实不确定性,资产收益被看作随机变量. 然而，有许多非随机因素影响着金融市场. 尤其在一个模糊的不确定的经济环境中，风险资产的收益具有模糊性,通常不能用随机事件描述.近来,一些学者研究了模糊资产组合问题，如,Watada[88]，Tanaka 和 Guo[89]，Inuiguchi 和 Tanino[90]，Ramaswamy[91]，Wang 和 Zhu[92]等.Watada[88]和 Ramaswamy[91]利用模糊决策理论提出了资产组合模型. Tanaka 等[93]提出了模糊概率的证券组合模型. 他们使用模糊概率的均值、方差和协方差分别替换了 Markowitz 证券组合模型中概率均值、方差和协方差，它可以看成是 Markowitz 证券组合模型的推广. Tanaka 和 Guo[89]在 Zadeh[94],Dubois 和 Prade[95]的可能性理论基础上提出了基于指数可能性分布的资产组合模型. Carlsson 等[96]将投资收益看成梯形模糊数,提出了不允许卖空情况下具有最大效用的模糊可能性证券组合模型. Zhang 等[97~102]在模糊数的可能性数字特征理论基础上将投资收益看作模糊数处理,研究了模糊投资组合问题.Parra 和 Terol 等[103]应用模糊目标规划的方法解决收益、风险、流动性为模糊数情况下的最优投资组合问题. Lin 和 Hsieh[104]基于决策支持系统(DSS)的相关理论给出了一个基于模糊集理论的投资组合战略框架. Tiryaki 和 Ahlatcioglu[105]给出了求解模糊投资组合问题的一种新的决策方法-模糊群决策方法.Fang 和 Wang[106]利用模糊决策理论研究了带有交易费用的模糊投资组合平衡问题. Lai 等[107]及 Giove[108]研究了基于区间数的投资组合问题. Zhang 等[109~111]研究了具有可容许偏差的投资组合问题,给出了可容许有效前沿的公式算法.Huang[112]将资产的收益看成模糊随机变量,提出了两种新的模糊投资组合模型,另外,Huang[113]还研究了模糊机会约束投资组合问题.

关于投资组合的早期研究工作,仅局限于单阶段资产组合选择理论的研究,即不考虑投资期间投资组合的调整问题,投资者在期初购买某一资产组合并将其持有到投资期结束,也没有考虑税收、消费等因素对投资行为的影响,这显然与实际的投资行为不吻合. 为此,一大批金融经济学家将单期的均值-方差投资组合选择

理论推广到多期，得到了离散时间和连续时间多阶段模型，并将消费、税收、交易成本、通货膨胀等因素引入证券组合选择模型，使之更加贴近现实的证券市场，取得了丰硕的成果．例如，Samuelson[114]，Hakansson[115]，Fama[116]，Mossin[117]，Rubinstein[118]和 Long[119]等就离散时间多阶段投资组合模型进行了较为广泛的研究；Merton[120]，Breeden[121]，Harrison[122～123]，Duffie[124]，Karatzas[125]，Korn 和 Trautmann[126]，Korn[127]等利用随机分析理论和随机优化技术对连续多阶段模型进行了广泛而深入细致的研究；Cox 和 Huang[128]，Dumas 和 Luciano[129]，Elton 和 Gruber[130]，Kamin[75]，Morton 和 Pliska[70]等将消费、税收、交易成本和通货膨胀等因素引入证券组合选择模型，使该模型在应用上迈进了一步．均值-方差型的动态模型的研究长期以来难以取得突破性进展．直到近年来，Li 和 Ng[131]对多阶段情形，Zhou 和 Li[132]以及 Emmer、Kluppelberg 和 Korn[133]对连续时间情形建立了均值-方差模型，并推导出了显示的最优解和有效边界．Li，Zhou 和 Lim[134]进一步研究了连续时间、不允许卖空股票时均值-方差投资组合问题．另外，Richardson[135]研究了动态均值-方差策略较 Markowitz 静态策略的优越性，并对相当简单的情况（遵循几何布朗运动的单一风险资产和具有常值利率的无风险资产构成的市场）改进了 Markowitz 的结论．Bajeux-Besnainou 和 Portait[136]（简称 BBP）在完全市场中证明了两基金分离定理（动态均值-方差投资策略是两基金的静态组合），动态均值-方差有效前沿在标准差-期望回报空间是直线，而且明确刻画了两基金和有效前沿．

关于连续时间资产组合最优投资消费问题的研究通常提出考虑的模型如下：

财富 $x(t)$满足的随机微分方程可以写为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) =& (r(t)x(t) - c(t))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i(t) - r(t))\pi_i^1(t)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\pi_i^1(t)\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}B_j(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$x(0) = x_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.5}$$

其中，$\pi_i^1(t)$表示时刻 t 投资在第 i 种证券上的财富；

$c(t)$表示时刻 t 的消费；

$\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{B}(t)=(B_1(t),B_2(t),\cdots,B_n(t))',\mathscr{F}_t;0\leqslant t\leqslant T\}$是一个定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 n 维布朗运动；

$\{r(t),\mathscr{F}_t;0\leqslant t\leqslant T\}$是无风险证券的利率过程；

$\{\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\cdots,\alpha_n(t))',\mathscr{F}_t;0\leqslant t\leqslant T\}$是风险证券的收益率向量过程；

$\{\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant n},\mathscr{F}_t;0\leqslant t\leqslant T\}$是离差矩阵．

假定这些过程在$(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$上是可测、适应及一致有界．

投资者的目标是最大化如下两种形式的期望效用及其线性组合：

(i)总体消费折扣的期望效用 $E\left[\int_0^T \exp\left[-\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right] U_1(c(t))\mathrm{d}t\right]$ ；

(ii)期终财富的期望效用 $E\left[U_2(x(T))\exp\left[-\int_0^T \beta(s)\mathrm{d}s\right]\right]$.

Merton[137~138]在市场模型系数 $r(t)$，$\alpha_i(t)$，$\sigma_{ij}(t)$；$1\leqslant i,j\leqslant n$ 都为常数及时间区域为无穷区域 $T=+\infty$ 和无遗产 $x(T)=0$ 的情形下，找到了一个与 Bellman 方程有关的闭型解．当时间区域为有穷时，他就 HPRA 类消费效用函数 $U_1(c)=ac^p$，$-1<p<1$，$p\neq 0$ 或 $U_1(c)=a\log c$ 等特殊情形找到了闭型解．Karatzas 等[139~141]考虑了较 Merton 一般的效用函数和存在破产可能性的投资消费问题的最优解．Merton[142]在市场模型系数 $r(t)$，$\alpha_i(t)$，$\sigma_{ij}(t)$（$1\leqslant i,j\leqslant n$）和 $\beta(t)$ 都为常数情形下，研究了使总体消费折扣效用最大化的最优投资比例及最优消费的显式解．Zhang 和 Nie[143]在市场模型系数都为连续变化及值函数 $V(x(t),\pi(t),c(t))$ 为一般情形下的最优投资消费问题，获得使总体消费折扣效用最大化的最优投资策略及最优消费策略的显式解．还有其他一些学者关于投资组合问题和金融市场及其他方面的大量研究[144~197]，由于篇幅的限制在此不再详细描述．

国内有关投资组合理论的研究和应用起步较晚，与西方市场经济国家已经形成了成熟的理论体系相比存在着差距．尽管如此，我国学者已经在这一领域作出了许多重要的、创造性的贡献，下面我们只对众多研究成果中的部分作一简要的回顾．

唐小我[198]、于维生[199]、杨德权、胡运权和刘鹏伟[200]、张京和马树才[201]及张卫国等[202,203]研究了不允许卖空时投资组合模型及最优解的计算方法，分析了有效前沿的一些性质．

吴如海和宋逢明[204]对基金分离定理进行了实证研究．曾勇、唐小我和郑维敏[205]讨论了不允许卖空情况下组合证券选择问题和证券组合空间的生成问题，推广了组合证券选择和基金分离理论的有关结果．

王春峰、屠新曙和厉斌[206]研究了效用函数意义下投资组合有效选择问题．运用几何方法解决最佳资产组合选择．

荣喜民、张喜彬和张世英[207]在分析 Markowitz 组合证券投资模型、绝对离差风险测度模型和 E-Sh 风险测度模型的基础上，提出了新的风险测度下的组合证券投资最优化模型．徐绪松、杨小青和陈彦斌[208]提出了“半绝对离差”的风险度量工具，并与证券收益率的半方差、绝对离差进行比较，给出了基于半绝对离差的证券组合投资模型．王秀国和邱菀华[209]研究了均值方差偏好和下方风险控制下的动态投资组合决策模型．彭飞、黄登仕和汤海溶[210]和彭飞、史本山和胡支军[211]应用行为经济学展望理论研究了基于价值离差的资产选择问题，建立了在给定的期

望收益条件下，组合绝对价值离差最小化模型和最大化组合价值离差模型，并进行了比较研究.

陈收、邓小铁、汪寿阳和周奕[212]在均值-方差模型基础上，引入随资本结构变化对利率的影响这一重要因素，研究其对组合投资有效边界及有效组合的作用以及优化模型的解析解. 史本山和文忠平[213]研究了 β约束条件下的投资组合决策. 张卫国等[214]研究了存在无风险投资与贷款条件下不相关资产的投资组合问题，给出了有效投资组合比例的计算公式.

刘小茂、李楚霖和王建华[215]讨论了正态情形下风险资产组合的 Mean-CVaR 边界，并与经典的方差风险下的均值-方差边界进行了对比研究. 陈金龙和张维[216]研究了投资组合模型与 CVaR 之间的关系.李婷和张卫国[217]研究了在预期收益和 VaR 约束下存在无风险资产的投资组合问题.

陈伟忠[218]和侯为波、徐成贤[219]研究了允许卖空条件下证券数量增加对于证券组合 MV 有效前沿的漂移. 张卫国等[220～222]进一步研究了不允许卖空条件下证券数量增加或者预期收益变化对于证券组合投资比例及 MV 有效前沿影响的动态问题.

韩其恒和唐万生[223]提出了在允许卖空时的一类机会约束下的投资组合问题. 郑立辉、张兢田和鲍新中[224]提出了证券选择的极大极小方法. 徐大江[225]提出多目标决策方法.刘海龙、郑立辉和樊治平等[226]提出了微分对策方法.程仕军[227]，李仲飞、李仲翔、汪寿阳和邓小铁[192]提出了线性规划方法.马永开和唐小我[228]建立了多因素模型.唐国兴和提云涛[229]提出了基于汇率均衡模型.陈志平和袁晓玲[230]建立了带有多种投资约束的广义 MV 模型. 夏玉森、刘宝碇和汪寿阳[36]提出了基于收益次序的投资组合模型和遗传算法.

胡国政和李楚霖[231]，李仲飞、汪寿阳和邓小铁[72]研究了带交易费的投资组合选择问题.梁建峰和唐万生[232]建立了有交易费用的组合证券投资的概率准则模型. 刘善存、邱菀华和汪寿阳[233]给出了带交易费用的泛证券组合投资策略.

在模糊投资组合方面，张世英和王东[234]基于模糊随机理论，定义了投资基金价格风险的测度，对有交易成本时的基金投资行为以及基金投资行为风险控制和监管问题进行了讨论.曾建华和汪寿阳等[235]对于模糊证券组合问题的研究进行了系统的综述和进一步的深入分析，并在给定投资收益和风险两个模糊目标的隶属度满足一定水平的约束条件下提出了一个最大化隶属度的证券组合模糊规划模型. 秦学志和吴冲锋[236]在投资者风险偏好具有随机性和模糊性且效用函数具有线性可加性的假设条件下，建立了相应的证券投资组合选择方法. 邵全和吴祈宗[237]利用模糊决策方法，给出了模糊意义下的投资组合决策. 洪雁、邵全和吴祈宗[238]研究了模糊机会约束规划下的投资组合问题.

刘海龙和樊治平[239]运用随机最优控制理论，建立了带有风险规避的证券投

资最优策略问题的数学模型，给出了证券投资最优策略.郭文旌和胡奇英[240]研究了当终止时间不确定时的多阶段最优投资组合问题. 杨德权等[241]研究了动态非线性递推规划模型. 杨昭军和师义民[242]在假设证券市场为有效竞争均衡市场下探讨最优投资及最优消费策略,得到最优投资与最优消费决策条件.黄小原、田澎和张忠[243]、马超群和陈牧妙[244]及吴冲锋、吴勇和李卫东[245]研究了股票、期权、期货和一般衍生证券的定价模型和方法.

严加安[246]、叶中行和林建忠[247]等人关于金融数学方面的专著和宋逢明[248]、吴冲锋等[249]等关于金融工程方面的著作以及李仲飞和汪寿阳[250]、余湄、董洪斌和汪寿阳[251]还有房勇和汪寿阳[252]等关于投资组合方面的著作都反映了我国在该领域取得的研究成果.

还有许多文献这里不能一一介绍了，如文献[253～257]等.

由于我国的金融市场起步较晚,对现代金融学理论和方法的研究相对落后,在应用方面更是如此。但是,在改革开放和经济持续增长的过程中,我国的金融市场不断发育成长并逐渐与国际接轨,各种新型金融产品的出现和新型金融交易的引入是势不可挡的.加强金融监管,规范市场行为,防范和控制总体金融风险,保持金融系统的稳定和发展,已经到了刻不容缓的地步.因此,要全面开展适合我国国情的金融学研究,为发展充满生机和活力的新兴的中国金融产业贡献力量.

1.2　本书的主要研究内容

投资组合研究主要是围绕如何建立适合各种要求的模型和提出有效算法. 随着数学新理论和新方法的不断出现，使得投资组合的理论、模型及方法能够得到进一步发展.本书将从理论和应用上系统研究一般投资约束条件下投资组合的若干新模型和新算法. 根据现代投资组合理论，投资者通常被认为是厌恶风险，追求最大效用者. 如何选择有效投资组合的研究在投资组合理论的研究中具有十分重要的地位.

• 第 1 章绪论.主要介绍现代投资组合的主要理论、方法、研究现状及发展趋势.

• 第 2 章研究风险资产有效投资组合模型与算法问题. 首先建立了一般投资约束条件下有效投资组合模型，研究了有效投资组合、有效前沿的结构及有效算法. 然后根据允许卖空风险资产情形、不允许卖空风险资产情形、投资比例限制情形，分别给出了有效投资组合及有效前沿的解析表示或者数值算法及智能算法等.最后将模型与算法应用于实际决策问题.

• 第 3 章研究风险资产有效投资组合及有效前沿的动态调整问题. 主要介绍

不允许卖空(投资比例非负约束)条件下有效组合及 MV 有效边界的变动问题. 从理论上探讨资产预期收益率发生变化和投资品种数的调整分别对有效投资组合收益和风险的影响,并且对 MV 有效前沿和投资比例的变化进行了动态分析.

• 第 4 章研究风险资产可容许有效投资组合模型及算法问题.首先给出基于相似度的资产收益和风险估计. 在假定资产的期望收益和风险具有可容许偏差的条件下定义可容许收益及可容许风险. 其次建立可容许有效投资组合模型,提出可容许有效投资组合的算法,给出可容许有效前沿的解析表示.最后将模型与算法应用于实际决策问题.

• 第 5 章研究存在无风险资产的可容许有效投资组合模型及算法问题.首先建立具有无风险资产的可容许有效投资组合模型. 然后分别研究贷出无风险资产情形、借入无风险资产(有上界限制或者无上界限制)情形及贷出利率与借入利率相等或者不相等情形的可容许有效投资组合算法,给出可容许有效前沿的解析表示. 最后通过一个数值例子,给出上、下可容许有效前沿的具体计算公式,并与 Tanaka 等人提出的方法进行比较,说明所提出方法的有效性.

• 第 6 章研究基于 VaR 和 CVaR 的投资组合模型及算法问题. 给出风险价值 VaR 和条件风险价值 CVaR 的计算方法, 提出具有 VaR 约束和无风险投资的证券组合优化模型与算法、具有 VaR 约束和无风险贷款的证券组合优化模型和算法及正态情形下风险资产组合 Mean-CVaR 模型和算法.

• 第 7 章研究几种简化的有效投资组合模型及算法问题.从两种类型投资者的角度探讨了投资组合模型的简化和算法问题. 一种面向投资基金和投资机构, 提出了大规模资产的简化有效投资组合模型和算法. 另一种面向中小投资者或者个人, 提出了中小投资者的有效投资组合模型, 给出了有效投资组合及有效前沿的解析表示, 并且分析了分配在资产上的投资数量与其收益和风险的关系. 最后将模型与算法应用于实际决策问题.

• 第 8 章研究基于离差的投资组合模型及算法问题.提出具有一般交易费用情况下的有效投资组合均值+绝对离差模型(MAD).分析了 Konno 等提出的分枝定界算法的不足. 给出了一个求有效投资组合的修正分枝定界算法.将风险价值指标引入组合投资领域, 通过极大极小风险价值, 建立了相应的组合投资模型(MMRV), 并与其他模型(MMR、MV) 进行了比较分析.

• 第 9 章研究上、下模糊可能性投资组合模型及算法问题. 首先在 Carlsson 和 Fullér 提出的模糊数的上可能性均值和下可能性均值定义的基础上,对应地提出上、下可能性方差与可能性协方差定义. 研究他们类似于随机变量数字特征的有关性质,完善模糊数的可能性数字特征理论. 其次在上、下可能性均值和可能性方差基础上建立投资组合的上、下可能性均值-方差模型. 然后分别给出投资收益为梯形、三角及区间型模糊数等特殊可能性分布下的有效投资组合模型,并与传统

概率分布下的模型进行比较. 最后通过一个数值例子,说明上、下可能性投资组合方法的应用.

- 第 10 章研究加权可能性有效投资组合模型及算法问题. 首先提出一般投资约束下的可能性有效投资组合模型.其次分别研究贷出无风险资产情形下可能性有效投资组合模型及借入无风险资产下可能性有效投资组合模型.最后通过一个数值例子,说明加权可能性投资组合方法的应用.
- 第 11 章研究连续时间的最优投资消费组合模型及算法问题.首先建立了连续支付红利并且市场模型系数 $r(t)$, $\alpha_i(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 和 $\beta(t)$ 都为连续变化及值函数 $V(x(t), \pi(t), c(t))$ 为一般形式的最优投资消费模型, 其次给出了使总体消费折扣效用最大化且具有反馈形式的最优投资比例及最优消费的显式解.

第2章

风险资产有效投资组合模型及算法

2.1 引言

由 Markowitz[1,2]最早提出的关于投资组合的均值-方差方法在过去 50 多年对于现代金融理论和实践中发挥了十分重要的作用,是现代投资组合理论的核心基础. 它运用概率论和最优化技术模型化了不确定条件下的投资行为. 投资收益用收益均值描述,投资风险用收益的方差描述. Markowitz 的均值-方差模型可以用两种数学模型表示:在期望收益给定的条件下,最小化风险;在风险给定的条件下,最大化期望收益. 一个投资组合被称为有效投资组合需要满足如下条件:①对于给定的期望收益水平,具有最小风险.②对于给定的风险水平,具有最大的期望收益.所有有效投资组合构成有效边界,或者称为有效前沿.在实际的投资活动中,投资者通常被认为是厌恶风险,追求最大效用者.因此,投资者的最优投资组合就是效用最大的有效投资组合.投资者的效用偏好不同,其最优投资组合的选择就不同.投资者选择最优投资组合的方法就是在所有有效投资组合中,选择使得效用最大的有效投资组合.显然,如何选择有效投资组合的研究在投资组合理论的研究中具有十分重要的地位.

假设投资者选择了 n 种可投资的风险资产进行组合投资.

记

$\boldsymbol{R}=(r_1, r_2, \cdots, r_n)'$是风险资产的期望收益向量

$\boldsymbol{V}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$是风险资产收益的协方差阵

$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$是风险资产的投资比例向量

$\boldsymbol{l}=(1,1,\cdots,1)'$是分量全部为 1 的向量

这里($'$)表示矩阵的转置，所有不带($'$)的向量都是列向量.那么资产组合的期望收益是 $r(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x}$,风险是 $\sigma^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$.

通常,投资组合的均值-方差模型(Mean Variance 模型,简记为 MV 模型)被描述为如下两种形式的二次规划模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} = \mu \\ & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中,μ 是投资者给定的期望收益水平;

$\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 常数矩阵;

$\boldsymbol{B}$ 是一个 m 维常向量.

或者

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} = \sigma^2 \\ & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中,σ^2 是投资者给定的风险水平;

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{B}$ 表示投资者或者投资市场对于投资行为附加的约束条件,比如,不允许卖空(投资比例或者数量非负),投资数量限制等.

先前的投资组合研究包括有 Sharpe[3~5],Merton[6],Szegö[7], Pang[8], Perold[9], Tobin[10]和 VöRös[11~13]等. 其中有许多研究是如何求解均值-方差模型,提出了一些解决有效投资组合问题的手段和算法[3~14].

Sharpe[3~5]利用证券市场指数或者因素模型简化了投资组合的均值-方差模型. Merton[6]在简单投资约束条件 $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1$ 下,给出了模型(2.1)最优解的均值-方差关系.Szegö[7]在简单投资约束条件 $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1$ 和 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 下,研究了模型(2.1)最优解的算法问题.VöRös[11]进一步揭示了不允许卖空条件下有效前沿的特征,指出有效前沿是由均值-方差平面上的一些单调增加弧段组成的. 还有一些学者研究了如下参数二次规划模型描述的投资组合问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -t\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Perold[9],Best[14,15,17]指出当模型(2.3)包含不等式约束条件时,存在区间集$[t_{i-1}, t_i](i=1,\cdots,\nu)$,使得投资组合有效前沿是参数 t 的分段线性函数.然而,确定这些

区间和 t 的线性函数是一个非常困难的事情,需要使用参数二次规划的算法.在一般情况下,不能获得投资组合有效前沿的闭形式解.Best[16]研究了收益不相关资产的有效投资组合问题,在一定的技术假定下给出了投资组合有效前沿的闭形式解.这些研究在一定的假设条件下,得到了部分情况下有效投资组合的解析表示或者数值方法,但是在不允许卖空条件下获得收益相关资产的全部有效投资组合(有效前沿)的解析表示却是非常困难的.

本章我们进一步研究风险资产投资组合问题.首先建立一般投资约束条件下有效投资组合模型,研究有效投资组合、有效前沿的结构及有效算法.然后根据允许卖空风险资产情形、不允许卖空风险资产情形、投资比例下界限制情形,分别给出有效投资组合及有效前沿的解析表示.对于一般投资数量限制情形提出有效投资组合的遗传算法.最后将模型与算法应用于实际问题,为投资者和投资机构的实际决策提供方便.

2.2 风险资产有效投资组合模型

为了讨论方便,将投资组合记为 $\boldsymbol{x}$ 或者(σ^2, r),$\alpha \geqslant \boldsymbol{0}$ 表示 α 是一个各分量非负的向量.MV 模型(2.1)或者(2.2)的最优解所确定的投资组合并不都是有效的,只是满足有效性的一个条件,即最小风险性或者最大收益性,这样的投资组合是否有效还需要根据是否满足另外一个有效性条件来确定.根据投资组合的有效性条件可得如下结论.

定理 2.1 投资组合(σ^2, r)是有效的充要条件为相应的 $\boldsymbol{x}$ 是下列两个模型的最优解.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} = r \\ & \boldsymbol{x} \in H \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} = \sigma^2 \\ & \boldsymbol{x} \in H \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中,H 是关于投资组合 $\boldsymbol{x}$ 附加的线性约束集.

特别,当 $H=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1\}$时,表示允许卖空行为;

当 $H=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$时,表示不允许卖空行为.

显然由模型(2.4)确定的最优解所对应的投资组合满足有效性的第一个条件,由模型(2.5)确定的最优解所对应的投资组合满足有效性的第二个条件.在模型(2.4)中分别求 r 取不同值的最优解,可获得投资组合的最小风险集 D.在模型

(2.5)中分别求 σ^2 取不同值的最优解,可获得投资组合的最大收益集 U.则有效投资组合集 $D\cap U$ 就是有效前沿.

若 $\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵,下面的定理 2.2 说明有效投资组合模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} \geqslant \mu \\ & \boldsymbol{x} \in H \end{aligned} \tag{2.6}$$

定理 2.2　若 $\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵,μ 是固定常数,则模型(2.6)的最优解所确定的投资组合是有效的.

证明　设 $\boldsymbol{x}$ 是模型(2.6)的最优解,并且 $\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x}=r$, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}=\sigma^2$.则 $r\geqslant\mu$, $\boldsymbol{x}\in H$.显然 $\boldsymbol{x}$ 是模型(2.4)的最优解,并且是(2.5)的可行解.

下证 $\boldsymbol{x}$ 也是模型(2.5)的最优解.

用反证法,假设 $\boldsymbol{x}$ 不是模型(2.5)的最优解.则存在 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{x}$,满足 $\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}_0=\sigma^2$, $\boldsymbol{x}_0\in H$,使得 $\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x}_0>r\geqslant\mu$.说明 $\boldsymbol{x}_0$ 也是模型(2.6)的最优解.

由于 $\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵,$\sigma^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}$ 是严格凸函数,故模型(2.6)的最优解唯一.因此 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}$,这与假设矛盾.于是 $\boldsymbol{x}$ 也是模型(2.5)的最优解.

由定理 2.1 知,$\boldsymbol{x}$ 确定的投资组合是有效的.

在模型(2.6)中,分别求 μ 取所有可能值的最优解,就可获得全部的有效投资组合,即有效前沿.求解(2.6)需要下面的假设条件满足.

假设 2.1　(i) $\boldsymbol{R}\neq c\boldsymbol{l}$, 对于任意 $c\in\mathscr{R}$;

(ii) $\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵.

2.3　允许卖空的风险资产有效投资组合解析表示

若允许卖空行为,取 $H=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1\}$.有效投资组合模型(2.6)为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} \geqslant \mu \\ & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

为了求解模型(2.7),我们首先考虑一个一般的二次规划

$$\begin{aligned} \min \quad & Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{x} = B_i,\ i = 1,\cdots,m_e \\ & \boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{x} \geqslant B_i,\ i = m_e+1,\cdots,m \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中,$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{A}_i$ 都是 n 维常向量;

$\boldsymbol{G}$ 是一个 n 阶实对称矩阵;

B_i 是常数.

解模型(2.8)等价于解下面的问题[258]

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\boldsymbol{g}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\lambda \\
&\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{x}=B_i,\quad i=1,\cdots,m_e \\
&\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{x}\geqslant B_i,\quad i=m_e+1,\cdots,m \\
&\lambda_i(\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{x}-B_i)=0,\quad i=m_e+1,\cdots,m \\
&\lambda_i\geqslant 0,\quad i=m_e+1,\cdots,m
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

其中,$\boldsymbol{A}=[A_1,A_2,\cdots,A_m]$;

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)'$.

下面的引理成立.

引理 2.1 设 $\boldsymbol{G}$ 是正定矩阵,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是模型(2.8)的唯一最优解的充分必要条件为 $\boldsymbol{x}^*$ 是模型(2.9)的唯一最优解.

为了描述方便,我们记

$$
\begin{aligned}
e&=\boldsymbol{R}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{R} \\
f&=\boldsymbol{l}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l} \\
d&=\boldsymbol{R}'\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l} \\
\delta&=ef-d^2.
\end{aligned}
$$

下面的引理给出了 e,f,d 和 δ 的一些性质.

引理 2.2 若假设 2.1 成立,则

(i) $e>0,f>0$;

(ii) $\delta>0$.

证明 根据假设 2.1(ii),结论(i)成立.

二次式

$$\boldsymbol{g}(y)=(\boldsymbol{R}+y\boldsymbol{l})'\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{R}+y\boldsymbol{l})=fy^2+2dy+e$$

的判别式是 -4δ.

因为 $\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵,所以 $\boldsymbol{g}(y)=0$ 充分必要条件是 $\boldsymbol{R}=-y\boldsymbol{l}$.

利用假设 2.1(i),对于任意 $y\in\mathscr{R}$,有 $\boldsymbol{g}(y)>0$.因此,结论(ii)成立.

使用 Lagrangian 乘子法,我们得到下面的引理.

引理 2.3 若假设 2.1 成立,则 $\boldsymbol{x}=tf^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l}$ 是问题 $\min\{\sigma^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=t\}$ 的唯一最优解,并且目标函数值为 t^2/f.

引理 2.4 若假设 2.1 成立,则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{V}^{-1}[e\boldsymbol{l}-d\boldsymbol{R}+(f\boldsymbol{R}-d\boldsymbol{l})\mu]/\delta$ 是问题 $\min\{\sigma^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x}=\mu,\boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1\}$ 的唯一最优解.

模型(2.7)的最优解通过下面的定理给出.

定理 2.3 若假设 2.1 成立,则模型(2.7)的唯一最优解如下确定:

(i)当 $\mu\leqslant d/f$ 时,

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{f}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l} \tag{2.10}$$

(ii)当 $\mu > d/f$ 时，

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\delta}\boldsymbol{V}^{-1}[e\boldsymbol{l} - d\boldsymbol{R} + (f\boldsymbol{R} - d\boldsymbol{l})\mu] \tag{2.11}$$

证明　因为 $\boldsymbol{V}$ 是正定矩阵，所以 Kuhn-Tucker(简记为 K-T)条件是最优解的充分必要条件[258].解问题(2.7)等价于解 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{R}$ 和 $\lambda_i\in\mathscr{R}(i=1,2)$，使得满足

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Vx} = \lambda_1\boldsymbol{l} + \lambda_2\boldsymbol{R} \\ &\boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \\ &\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} \geqslant \mu \\ &\lambda_2(\boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} - \mu) = 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

如果 $\mu\leqslant d/f$，那么存在乘子 $\lambda_1=1/f,\lambda_2=0$，并且使得 $\boldsymbol{x}=f^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l}$ 满足问题(2.12).于是，结论(i)成立.

如果 $\mu>d/f$，那么 $f\mu-d>0$.存在乘子 $\lambda_1=(e-d\mu)/\delta,\lambda_2=(f\mu-d)/\delta>0$，并且使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{V}^{-1}[e\boldsymbol{l}-d\boldsymbol{R}+(f\boldsymbol{R}-d\boldsymbol{l})\mu]/\delta$ 满足问题(2.12).这样，结论(ii)成立.

2.4　不允许卖空的风险资产有效投资组合解析表示

若不允许卖空行为，取 $H=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x}=1,\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$.

有效投资组合模型(2.6)为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{Vx} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}'\boldsymbol{x} \geqslant \mu \\ & \boldsymbol{l}'\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.13}$$

模型(2.7)和模型(2.13)的最优解有如下关系[199].

引理 2.5　若假设 2.1 成立，μ 是固定常数，$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)'$ 是模型(2.7)的最优解，并且 $x_{i_1}^*<0,\cdots,x_{i_k}^*<0$，其他 $x_j^*>0$，则如果 $\boldsymbol{x}^{1*}=(x_1^{1*},\cdots,x_n^{1*})'$ 是模型(2.13)的最优解，那么 $\boldsymbol{x}^{1*}\in\bigcup_{s=1}^{k}A_{i_s}$，其中 $A_{i_s}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)'\mid x_{i_s}=0\}$.

由引理 2.5 容易得到下面结论.

推论 2.1　若假设 2.1 成立，μ 是固定常数，$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)'$ 是模型(2.7)的最优解，并且 $x_i^*<0$，其他 $x_j^*\geqslant0$，则如果 $\boldsymbol{x}^{1*}=(x_1^{1*},\cdots,x_n^{1*})'$ 是模型(2.13)的最优解，那么 $x_i^{1*}=0$.

记

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l} = (g_1, g_2, \cdots, g_n)'$$

$$V^{-1}R=(h_1,h_2,\cdots,h_n)'$$

这样,式(2.11)能够表示成

$$x_k=\frac{1}{\delta}[eg_k-dh_k+(fh_k-dg_k)\mu],\quad k=1,\cdots,n \tag{2.14}$$

因为 $\delta>0$ 以及式(2.14)满足 $l'x=\sum_{k=1}^{n}x_k=1$,所以存在 q 和 p,使得

$$fh_q-dg_q<0 \quad \text{和} \quad fh_p-dg_p>0$$

定义

$$\beta=\min\left\{\frac{dh_k-eg_k}{fh_k-dg_k}\mid fh_k-dg_k<0,k=1,\cdots,n\right\}$$

$$\alpha=\max\left\{\frac{dh_k-eg_k}{fh_k-dg_k}\mid fh_k-dg_k>0,k=1,\cdots,n\right\}$$

根据引理 2.5 及 α 和 β 的定义,我们容易得到下面结论.

引理 2.6 若 $\alpha>\beta$,则对于任意的 μ,模型(2.13)的最优解 x 必含有零分量.

我们分别根据情况 $\alpha\leqslant\beta$ 和情况 $\alpha>\beta$ 讨论模型(2.13)的最优解.

首先讨论情况 $\alpha\leqslant\beta$,并给出所有 $\mu>\beta$ 的最优解.

为叙述方便,我们使用如下记号

$$\begin{cases} I=\{1,2,\cdots,n\},I_i=\{i_1,\cdots,i_l\}\subseteq I,l_i=(1,\cdots,1)' \\ R_i=(r_{i_1},\cdots,r_{i_l})',V_i=(\sigma_{i_pi_q})_{l\times l},p,q=1,\cdots,l \\ V_i^{-1}R_i=(h_{i,i_1},\cdots,h_{i,i_l})',V_i^{-1}l_i=(g_{i,i_1},\cdots,g_{i,i_l})' \\ e_i=R_i'V_i^{-1}R_i,d_i=R_i'V_i^{-1}l_i,f_i=l_i'V_i^{-1}l_i,\delta_i=e_if_i-d_i^2 \end{cases} \tag{2.15}$$

其中,I 表示资产 $1,2,\cdots,n$ 的集合;

I_i 表示资产 $i_1,i_2,\cdots,i_l$ 的集合;

R_i 表示资产集 I_i 的收益向量;

V_i 表示资产集 I_i 的协方差矩阵;

$h_{i,k}$表示向量 $V_i^{-1}R_i$ 顺序对应于资产 k 的分量;

$g_{i,k}$表示向量 $V_i^{-1}l_i$ 顺序对应于资产 k 的分量.

定理 2.4 若假设 2.1 成立,并且 $\alpha\leqslant\beta$,则存在正数 $\beta_0\leqslant\beta_1\leqslant\cdots\leqslant\beta_t\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$ 和资产集 $I\supseteq I_1\supseteq\cdots\supseteq I_t$,使得模型(2.13)的唯一最优解如下确定:

当 $\beta_{i-1}<\mu\leqslant\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$时,

$$x_k=\begin{cases}[e_ig_{i,k}-d_ih_{i,k}+(f_ih_{i,k}-d_ig_{i,k})\mu]/\delta_i, & k\in I_i \\ 0, & k\in I\setminus I_i\end{cases}$$

其中,$g_{i,k}$, $h_{i,k}$, e_i, d_i, f_i, δ_i分别由(2.15)定义,

$$\beta_i=\min\left\{\frac{d_ih_{i,k}-e_ig_{i,k}}{f_ih_{i,k}-d_ig_{i,k}}\mid f_ih_{i,k}-d_ig_{i,k}<0,k\in I_i\right\},\quad i=1,\cdots,t-1$$

$$\beta_0=\beta,\quad \beta_t=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$$

证明　不失一般性，我们假定存在唯一的 $q\in I$，使得

$$\beta=\frac{dh_q-eg_q}{fh_q-dg_q}$$

对于 $\beta<\mu\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$，有 $x_q=[eg_q-dh_q+(fh_q-dg_q)\mu]/\delta<0$.

使用推论 2.1，模型(2.13)的最优解满足 $x_q=0$.

在模型(2.13)中淘汰变量 x_q，并且考虑剩余 $n-1$ 个资产的新模型.

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{x}_1\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{R}_1'\boldsymbol{x}_1\geqslant\mu\\ & \boldsymbol{l}_1'\boldsymbol{x}_1=1\\ & \boldsymbol{x}_1\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{2.16}$$

其中，$\boldsymbol{x}_1=(x_1,\cdots,x_{q-1},x_{q+1},\cdots,x_n)'$；

$\boldsymbol{R}_1=(r_1,\cdots,r_{q-1},r_{q+1},\cdots,r_n)'$；

$\boldsymbol{l}_1=(1,1,\cdots,1)'$；

$\boldsymbol{V}_1=(\sigma_{ij})_{(n-1)\times(n-1)},i\neq q,j\neq q$.

同样，存在

$$\beta_1=\min\left\{\frac{d_1h_{1,k}-e_1g_{1,k}}{f_1h_{1,k}-d_1g_{1,k}}\,\middle|\,f_1h_{1,k}-d_1g_{1,k}<0,k=1,2,\cdots,n.k\neq q\right\}$$

当 $\beta<\mu\leqslant\beta_1$ 时，模型(2.13)的唯一最优解是

$$x_k=\begin{cases}[e_1g_{1,k}-d_1h_{1,k}+(f_1h_{1,k}-d_1g_{1,k})\mu]/\delta_1, & k\in I_1\\ 0, & k\in I\backslash I_1\end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}=(g_{1,1},\cdots,g_{1,q-1},g_{1,q+1},\cdots,g_{1,n})'$；

$\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1=(h_{1,1},\cdots,h_{1,q-1},h_{1,q+1},\cdots,h_{1,n})'$；

$e_1=\boldsymbol{R}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1$；

$f_1=\boldsymbol{l}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1$；

$d_1=\boldsymbol{R}_1{}'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1$；

$\delta_1=e_1f_1-d_1^2$，$I_1=I\backslash\{q\}$.

如果 $\beta_1<\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$，那么我们重复上面相同的算法，直到 $\beta_t=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$.

模型(2.13)在 $\mu=\beta_t$ 的最优解是 $x_m=1,x_k=0,k\neq m$，其中 m 满足 $r_m=\beta_t$.

这样，对于 $\beta<\mu\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_i\}$，我们获得了模型(2.13)的所有最优解.

下面给出模型(2.13)对于所有 $\mu\leqslant\beta$ 的最优解.

定理 2.5　若假设 2.1 成立，并且 $\alpha\leqslant d/f$，则对于 $\mu\leqslant\beta$，模型(2.13)的唯一最优解如下确定：

(i)当 $\mu\leqslant d/f$ 时，$\boldsymbol{x}$ 由式(2.10)给出，

(ii)当 $d/f \leqslant \mu \leqslant \beta$ 时,$\boldsymbol{x}$ 由式(2.11)给出.

证明 根据 $\alpha \leqslant d/f$,得到 $\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l} \geqslant \boldsymbol{0}$.那么对于所有的 $\mu \leqslant d/f$,模型(2.7)的唯一最优解 $\boldsymbol{x}=f^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l}$ 也是(2.13)的唯一最优解,即 $x_k=g_k/f$, $k \in \boldsymbol{I}$.

特别,在 $\mu= d/f$ 处,有

$$\frac{1}{\delta}\boldsymbol{V}^{-1}[e\boldsymbol{l}-d\boldsymbol{R}+(f\boldsymbol{R}-d\boldsymbol{l})\mu]=\frac{1}{f}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{l} \geqslant \boldsymbol{0}$$

根据 β 的定义并考虑到变量的线性连续性,当 $d/f \leqslant \mu \leqslant \beta$ 时,我们能够得到式(2.14)满足 $x_k \geqslant 0$, $k=1,\cdots,n$, 即模型(2.13)的唯一最优解由式(2.14)[即式(2.11)]给出.

定理 2.6 若假设 2.1 成立,并且 $d/f<\alpha \leqslant \beta$,则存在正数 $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{r_i\}<\alpha_s \leqslant \cdots \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ 和资产集 $I \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_s$,使得模型(2.13)的唯一最优解如下确定:

(i) 当 $\alpha_0 \leqslant \mu \leqslant \beta$ 时,$\boldsymbol{x}$ 由(2.11)式给出;

(ii) 当 $\alpha_i \leqslant \mu < \alpha_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,s)$时,

$$x_k=\begin{cases}[e_i g_{i,k}-d_i h_{i,k}+(f_i h_{i,k}-d_i g_{i,k})\mu]/\delta_i, & k \in I_i \\ 0, & k \in I \setminus I_i\end{cases}$$

(iii)当 $\mu<\alpha_s$,

$$x_k=\begin{cases}g_{s,k}/f_s, & k \in I_s \\ 0, & k \in I \setminus I_s\end{cases}$$

其中,$g_{i,k}$, $h_{i,k}$, e_i, d_i, f_i, δ_i 分别由(2.15)定义;

$$\alpha_i=\max\left\{\frac{d_i h_{i,k}-e_i g_{i,k}}{f_i h_{i,k}-d_i g_{i,k}} \,\middle|\, f_i h_{i,k}-d_i g_{i,k}>0, k \in I_i\right\}, i=1,\cdots,s-1;$$

$$\alpha_0=\alpha, \alpha_s=d_s/f_s, \alpha_i \neq d_i/f_i, i=1,\cdots,s-1.$$

证明 取 $\alpha_0=\alpha$. 当 $\alpha_0 \leqslant \mu \leqslant \beta$ 时,根据 α 和 β 的定义,模型(2.7)的最优解式(2.14)满足 $x_k \geqslant 0$, $k=1,2,\cdots,n$.显然模型(2.13)的唯一最优解由式(2.14),即式(2.11)给出.

不失一般性,我们假定存在唯一的 $p \in I$,使得

$$\alpha_0=\alpha=\frac{dh_p-eg_p}{fh_p-dg_p}$$

对于 $\mu<\alpha_0$, 就有 $x_p=[eg_p-dh_p+(fh_p-dg_p)\mu]/\delta<0$.

利用推论 2.1, 当 $\mu<\alpha_0$ 时,模型(2.13)的最优解满足 $x_p=0$.

从模型(2.13)中淘汰变量 x_p,并且考虑剩余 $n-1$ 个资产的新模型

$$\begin{aligned}\min \quad & \boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{V}_1 \boldsymbol{x}_1 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}_1' \boldsymbol{x}_1 \geqslant \mu \\ & \boldsymbol{l}_1' \boldsymbol{x}_1=1 \\ & \boldsymbol{x}_1 \geqslant \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{x}_1=(x_1,\cdots,x_{p-1},x_{p+1},\cdots,x_n)'$;

$\boldsymbol{R}_1=(r_1,\cdots,r_{p-1},r_{p+1},\cdots,r_n)'$;

$\boldsymbol{l}_1=(1,1,\cdots,1)'$;

$\boldsymbol{V}_1=(\sigma_{ij})_{(n-1)\times(n-1)},i\neq p,j\neq p$.

我们采用相同的方法求解上面的模型.

同样，存在

$$\alpha_1=\begin{cases} d_1/f_1, & \text{如果 } \boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1\geqslant \boldsymbol{0} \\ \max\left\{\dfrac{d_1h_{1,k}-e_1g_{1,k}}{f_1h_{1,k}-d_1g_{1,k}}\,\middle|\, f_1h_{1,k}-d_1g_{1,k}>0,k\in I_1\right\}, & \text{否则} \end{cases}$$

当 $\alpha_1\leqslant\mu<\alpha_0$ 时，模型(2.13)的唯一最优解是

$$x_k=\begin{cases} [e_1g_{1,k}-d_1h_{1,k}+(f_1h_{1,k}-d_1g_{1,k})\mu]/\delta_1, & k\in I_1 \\ 0, & k=p \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1=(g_{1,1},\cdots,g_{1,p-1},g_{1,p+1},\cdots,g_{1,n})'$;

$\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1=(h_{1,1},\cdots,h_{1,p-1},h_{1,p+1},\cdots,h_{1,n})'$;

$e_1=\boldsymbol{R}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{R}_1$;

$f_1=\boldsymbol{l}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1$;

$d_1=\boldsymbol{R}_1'\boldsymbol{V}_1^{-1}\boldsymbol{l}_1$;

$\delta_1=e_1f_1-d_1^2,I_1=I\backslash\{p\}$.

如果 $\alpha_1=d_1/f_1$，那么对于 $\mu<\alpha_1$，模型(2.13)的唯一最优解是

$$x_k=\begin{cases} g_{1,k}/f_1, & k\in I_1 \\ 0, & k\in I\backslash I_1 \end{cases}$$

如果 $\alpha_1\neq d_1/f_1$，那么同样的理由淘汰在 α_1 处为零的变量得到一个新的资产子集 I_2 和点 α_2.

对于 $\alpha_2\leqslant\mu<\alpha_1$，模型(2.13)的最优解满足 $x_k=0,k\in I\backslash I_2$.

我们继续上面的过程直到存在资产子集 $I_s=\{i_1,\cdots,i_m\}\subseteq \boldsymbol{I}$，使得 $\alpha_s=d_s/f_s$，其中，$f_s=\boldsymbol{l}_s'\boldsymbol{V}_s^{-1}\boldsymbol{l}_s$;

$d_s=\boldsymbol{R}_s'\boldsymbol{V}_s^{-1}\boldsymbol{l}_s$;

$\boldsymbol{l}_s=(1,\cdots,1)'$;

R_s 是 I_s 的收益向量；

V_s 是 I_s 的协方差矩阵.

当 $\mu\leqslant\alpha_s=d_s/f_s$ 时，模型(2.13)的唯一最优解是

$$x_k=\begin{cases} g_{s,k}/f_s, & k\in I_s \\ 0, & k\in I\backslash I_s \end{cases}$$

这里

$$\boldsymbol{V}_s^{-1}\boldsymbol{l}_s=(g_{s,i_1},\cdots,g_{s,i_m})'$$