随机动力系统引论

黄建华 黎育红 郑 言 编著

科 学 出 版 社

随机动力系统引论

黄建华　黎育红　郑　言　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了几种典型随机过程及其随机积分的定义与性质，系统讲述了高斯过程、分数布朗运动和 Lévy 过程驱动的随机偏 (常) 微分方程解生成的随机动力系统的理论，详细给出了随机吸引子、测度吸引子、大偏差原理和随机不变流形的研究方法和主要结论，最后介绍了随机分数阶偏微分方程解的存在唯一性和遍历性研究结果.

本书可作为高校随机动力系统理论研究和应用及相关专业的研究生教材或教师参考书，亦可供从事相关理论研究的科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

随机动力系统引论/黄建华，黎育红，郑言编著. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033017-8

Ⅰ.① 随… Ⅱ. ① 黄… ② 黎… ③ 郑… Ⅲ. ① 随机系统：动力系统(数学) Ⅳ. ① O231 ② O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 258440 号

责任编辑：徐园园　赵彦超／责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 1 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2012 年 1 月第一次印刷　印张：17 3/4
字数：347 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随机现象在自然界中普遍存在, 复杂系统经常受到随机因素或者不确定性因素的影响, 甚至起着决定性的作用, 使其长期行为发生根本性的变化, 蝴蝶效应就是一个很好的例子. 另外, 由于观测手段及技术的局限, 被忽略的以及物理原因暂时还不明白的过程、不可靠的观测量和被忽略的小/快尺度运动对大/慢尺度运动的影响通常也可用随机因素来描述或近似描述. 随机动力系统 (包括各种随机方程, 特别是随机偏微分方程) 就是这些在随机因素影响下的复杂系统的合适的数学模型. 随机动力系统由于能够描述一些确定性动力系统所不能描述的现象而越来越受到其他学科的关注.

随机分析为研究随机动力系统带来了极大的机遇与挑战. 20 世纪 80 年代, Elworthy, Baxendale, Bismut, Kunita, Ikeda 以及 Watanabe 等发现随机微分方程的解不仅具有 Markov 性质, 还具有同胚流的性质. 这样人们就可以从动力学的角度出发来研究随机流, 从而获得比随机过程更丰富的结构内容. 通过对随机微分方程生成随机动力系统有关理论的研究, 有助于构建起随机分析与随机动力系统研究的桥梁, 人们对作为随机分析和动力系统的结合的随机动力系统理论及其长期演化行为分析的关注, 使得随机动力系统在近几年也得到了快速发展. 同时, 随机分析和动力系统的研究在过去几十年的成功应用也证明了随机动力系统理论可以有效地应用到其他学科.

对随机动力系统的研究也来源于数学自身的发展. 从理论的角度来看, 作为跨学科研究的随机动力系统, 主要有两个研究学派：用与之相关的 Markov 半群的不变测度的存在唯一性来讨论相关动力学性质的随机分析学派, 以及从研究轨道的几乎处处的渐近行为出发的随机动力系统学派. 国际上关于随机动力系统动力学研究始于 20 世纪 90 年代, 德国的 Ludwig Arnold 教授领导的 Bremen 课题小组历经 10 年的研究, 从随机方程入手发展了随机动力系统的基本理论, 并完善了有限维随机动力系统的线性理论, 1998 年出版了奠基性的专著《随机动力系统》, 引起了动力系统和随机分析领域的极大关注, 人们开始利用随机动力系统的框架来研究随机非线性发展方程解的长期性态, 并成功地应用到很多领域中. 20 世纪 90 年代, 意大利的 Flandoli 等建立了随机无穷维动力系统的基本概念和框架, 并对 Burgers 方程、Navier-Stokes 方程、非线性波方程、非线性扩散方程等证明了随机整体吸引

子的存在性. 对无穷维随机动力系统的动力学研究, 目前主要有：英国 Warwick 大学的 Robinson 领导的研究小组、西班牙的 Caraballo 等领导的研究小组、德国的 Crauel 和意大利的 Flandoli 为代表的研究团队, 以及俄罗斯数学家 Chueshov 关于单调随机动力系统研究的群体. 目前, 作为核心数学研究课题的随机动力系统的研究处于重要的发展阶段, 随机微分方程、随机偏微分方程以及随机动力系统的研究已经成为当前的研究热点和前沿课题. 据不完全统计, 自 2003 年 3 月以来, 在世界范围内举办的有关随机动力系统 (随机偏微分方程) 的主流国际会议不少于 20 次.

国内随机动力系统的研究是近几年才开始的, 2004 年 3 月 1 日至 4 月 15 日, 在中国科学院数学与系统科学研究院晨兴数学研究中心举办了第一次 “非自治和随机动力系统” 高级研讨班, 并且形成了一些以课题小组为核心的研究群体, 取得了一些处于国际领先地位的研究成果. 现有关于随机微分方程、随机偏微分方程及其生成随机动力系统的研究成果主要集中在对高斯噪声驱动的情形, 尤其值得指出的是这些噪声通常也是时间连续的, 而对分数维布朗运动、Lévy 噪声、脉冲噪声等非连续噪声驱动的情形则较少涉及, 并且国内目前尚无合适的关于随机动力系统的研究生教材.

近年来, 我们对高斯噪声、Lévy 噪声和分数布朗运动驱动的随机偏微分方程的资料进行收集和整理, 并在国家自然科学基金和湖南省自然科学基金的资助下, 对不同噪声驱动的随机偏微分方程生成的随机动力系统开展研究, 取得了一些研究成果. 在几位教授的鼓励和支持下, 我们根据在国防科技大学和华中科技大学数学系的研究生讲授的随机动力系统课程的讲义整理成书, 对随机过程及其相应的随机积分做了较为系统的介绍. 我们希望本书的出版能够帮助对随机动力系统感兴趣的读者尽快进入该领域, 并能在阅读本书的基础上, 进入研究前沿.

郭柏灵院士、李继彬教授、蒋继发教授和段金桥教授对本书的写作给予了极大的鼓励和支持, 科学出版社的责任编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动, 在此表示深深的谢意. 在本书的撰写过程中, Z. Brzezniak 教授、吕克宁教授、JiangLun Wu 教授、辛杰教授、孙旭教授、王伟副教授、黄代文副研究员、柳振鑫副教授、蒲学科副教授、孙成峰副教授、史可华博士等提供了很多参考文献, 为本书的顺利完成提供很多帮助. 在本书的试用过程中, 朱健民教授和王海怒老师给予了很多帮助, 博士生李劲、硕士生唐照阳对书稿进行了认真的校对, 在此表示感谢. 本书的出版得到了国防科技大学数学学科建设基金的资助, 并得到了国家自然科学基金 (No:10971225)、留学回国科研启动基金和湖南省自然科学基金 (No:11JJ3004) 以及国防科技大学基础研究基金的资助, 在此一并表示感谢.

本书第 1 章由郑言编写、第 2 章由黎育红和黄建华编写、第 3 章由黎育红编

写, 第 4~8 章由黄建华编写, 最后由黄建华进行统稿. 由于作者水平有限, 收集和掌握的资料不是很全面, 书中存在一些不足和错误, 敬请读者批评指正.

作　者

2011 年 8 月

目　录

第 1 章　随机过程与随机积分

本章先介绍随机变量与随机过程、条件期望等基本概念, 然后分别介绍 Wiener 过程及其随机积分, Lévy 及其随机积分和分数布朗运动及其随机积分, 最后给出 Nuclear 算子和 Hilbert-Schmidt 算子的定义及其性质.

§1.1　随机过程与条件期望

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是概率空间. 对任意的 $A\in\mathcal{F}$, 记 A 的补集为 A^c, 1_A 为集合 A 的特征函数. 本节内容取自于文献 [4], [21] 和 [22].

定义 1.1.1　设 $(E,\mathcal{E})$ 是一个可测空间. 称任意可测映射 $X:\Omega\to E$ 为一个 E- 值随机变量, 或 E 上的随机元素 (随机变量).

记 $\mathcal{L}(X)(\Gamma)=P\circ X^{-1}(\Gamma):=P(\omega\in\Omega:X(\omega)\in\Gamma)$, $\Gamma\in\mathcal{E}$ 为随机变量 X 的分布, 即 E 中随机元素的分布.

定义 1.1.2　记 I 是时间变量区间 (连续时间情形时, I 是非负实数 $\mathbb{R}^+$, 或有限区间 $[0,T]$; 离散时间情形时, I 是非负整数 $\mathbb{Z}^+=\{0,1,\cdots\}$ 的子集), 记 I 上的 Borel σ- 域为 $\mathcal{B}(I)$. 称 E 上的随机元素的任意簇 $X=(X(t),t\in I)$ 为 E 上的随机过程, 或者为 E- 值的随机过程.

定义 1.1.3　对于任意的 $k\in\mathbb{N}$, E 值随机过程 X 的有限维分布是在乘积空间 E^k 上的前向测度 $P^X_{i_1,\cdots,i_k}$, 其中

$$P^X_{i_1,\cdots,i_k}(S):=P\{\omega\in\Omega|(X_{i_1}(\omega),\cdots,X_{i_k}(\omega))\in S\}.$$

定义 1.1.4　对任意的 $t\in I$, 滤子是任意非减的 σ 域 $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$ 构成的集族. 如果

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}:=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s,\quad \forall t\in I,$$

则称 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续的. 如果 $(\mathcal{F}_t)$ 是一个右连续的滤子, 并包含 $\mathcal{F}$ 中的所有 P 测度为 0 的集合 (零测集), 则称 $(\mathcal{F}_t)$ 是正则滤子. 称四元组 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ 为滤子概率空间. 称 E- 值的随机过程 X 关于滤子 $(\mathcal{F}_t)$ 是适应的, 如果对每个 $t\in I$, $X(t)$ 都是 $\mathcal{F}_t$- 可测的.

附注 1.1.1　对任意的滤子 $(\mathcal{F}_t)$, 滤子 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是右连续的. 设 X 是给定 E-值随机过程, 则 $(\mathcal{F}^X_t)$ 表示由 X 生成的滤子, 即对每个 $t\in I$, $\mathcal{F}^X_t:=\sigma(X(s):s\in$

$I, s \leqslant t$), 即使得所有的随机元 $X(s)$, $s \in I$, $s \leqslant t$ 都可测的最小的 σ- 域. $\overline{\mathcal{F}}_t^X$ 表示包含 $\mathcal{F}_t^X$ 及 $\mathcal{F}$ 的所有零测集的最小 σ- 域. 则滤子 $(\overline{\mathcal{F}}_{t+}^X)$ 是正则的, 且 X 关于滤子 $(\overline{\mathcal{F}}_{t+}^X)$ 是适应的.

定义 1.1.5 称 E- 值的随机过程 X 是可测的, 如果 X 是一个从 $I \times \Omega$ 到 E 上的可测映射, 其中在 $I \times \Omega$ 上考虑乘积 σ- 域 $\mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$.

定义 1.1.6 设 $\mathcal{P}_I$ 为可料集的 σ- 域, 即包含所有形如 $(s,t] \cap I \times A$ 集合的 $I \times \Omega$ 子集的最小的 σ- 域, 其中 s, $t \in I$, $s < t$, 且 $A \in \mathcal{F}_s$. 称取值于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程 X 是可料的, 如果 X 是从 $I \times \Omega$ 到 E 上的可测映射, 其中在 $I \times \Omega$ 上考虑 σ- 域 $\mathcal{P}_I$.

附注 1.1.2 如果 Y 是连续的, 且关于 $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$ 是适应的, 则它是可料的. 进一步, 连续性可以减弱为左连续. 事实上, 定义 Y_m :

$$Y_m(t,\omega) = \sum_{k \geqslant 1} Y_{m,k}(t,\omega),$$

其中, 对 $t \in ((k-1)2^{-m}, k2^{-m}]$,

$$Y_{m,k} := Y((k-1)2^{-m}, \omega),$$

则 $\{Y_m\}$ 是可料的, 由过程 Y 的左连续性可知, $\{Y_m\}$ 必定收敛到 Y. 因此过程 Y 也是可料的.

定义 1.1.7 令 $(X(t),\ t \in I)$ 是一个 E- 值的定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程. 一个 E- 值的随机过程 $(Y(t),\ t \in I)$ 称为是 X 的修正, 如果 $P(X(t) = Y(t)) = 1$ 对任意 $t \in I$ 都成立.

附注 1.1.3 X 的任一修正 Y 与 X 具备相同的有限维分布. 如果存在 X 的一个具备 P-a.s. 连续轨道的修正 Y, 则称 X 具备一个连续修正 (连续随机过程的定义参阅定义 1.1.12). 如果存在 X 的一个可测或可料的修正 Y, 则称 X 具备一个可测或可料修正.

定义 1.1.8 令 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ 为一个滤子概率空间. 称 $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ 为关于滤子 $(\mathcal{F}_t)$ 的停时, 如果对任意 $t \in I$, $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

令 τ 为一个停时. 记 $\mathcal{F}_\tau$ 为使得 $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ 对任意 $t \in I$ 成立的事件 $A \in \mathcal{F}$ 的并, 容易验证 $\mathcal{F}_\tau$ 是一个 σ- 域, 并且 τ 关于 $\mathcal{F}_\tau$ 是可测的. 以后称 $\mathcal{F}_\tau$ 为停时 σ- 域.

令 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, $\mathcal{B}(X)$ 是 X 上的 Borel σ- 域. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是可测空间, μ 是定义在其上的有限测度.

下面介绍定义在 Banach 空间上的 Bochner 积分的定义及其性质.

考虑简单函数类:

$$\Xi := \left\{ f:\Omega\to X \mid f=\sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k},\ x_k\in X,\ A_k\in\mathcal{F},\ 1\leqslant k\leqslant n,\ n\in\mathbb{N} \right\}.$$

定义向量空间 Ξ 上的半范数 $\|\cdot\|_\Xi$ 为

$$\|f\|_\Xi := \int \|f\| \mathrm{d}\mu, \quad \forall f\in\Xi.$$

为使 $(\Xi, \|\cdot\|_\Xi)$ 构成一个赋范向量空间, 考虑关于 $\|\cdot\|_\Xi$ 的等价类.

对任意的 $f\in\Xi$, $f=\sum_{k=1}^{n} x_k 1_{A_k}$, 不妨设 A_k 是两两不交, 定义 Bochner 积分为

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(A_k).$$

容易验证, 该定义与 f 的表示无关, 而且关于被积函数是线性的. 定义映射:

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}: (\Xi, \|\cdot\|_\Xi) &\to (X, \|\cdot\|),\\ f &\mapsto \int f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

由于 $\left\|\int f\mathrm{d}\mu\right\| \leqslant \int \|f\|\mathrm{d}\mu$ 对任意 $f\in\Xi$ 成立 (注意到 A_k 是两两不交的). 因此该映射是线性的, 并且一致连续. 而且可将映射 Int 拓展到 Ξ 关于 $\|\cdot\|_\Xi$ 的完备化空间 $\overline{\Xi}$ 上.

下面给出 $\overline{\Xi}$ 的表示.

定义 1.1.9 函数 $f:\Omega\to X$ 称为是强可测的, 如果它是 $\mathcal{F}/\mathcal{B}(X)$- 可测的.

定义 1.1.10 令 $1\leqslant p<\infty$. 定义

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu;X) &:= \mathcal{L}^p(\Omega, X)\\ &:= \left\{ f:\Omega\to X \mid f\text{是强可测的, 而且} \int \|f\|^p \mathrm{d}\mu<\infty \right\}\end{aligned}$$

及半范数

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int \|f\|^p \mathrm{d}u \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f\in\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu;X).$$

$\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mu;X)$ 关于 $\|\cdot\|_{L^p}$ 的所有等价类组成的空间记为 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu;X) := L^p(\Omega,X)$.

引理 1.1.1[4] 令 E 是一个度量为 d 的度量空间, $f:\Omega\to E$ 是强可测的, 并且 $f(\Omega)\subset X$ 是可分的, 则存在简单 E- 值函数序列 f_n, $n\in\mathbb{N}$, 使得对任意 $\omega\in\Omega$, 序列 $d(f_n(\omega), f(\omega))$, $n\in\mathbb{N}$ 单调下降趋于 0.

证明 令 $E_0=\{e_1,e_2,\cdots\}$ 是 E 的可数稠密子集. 对 $m\in\mathbb{N}$, 定义

$$d_m(\omega) = \min\{d(f(\omega), e_k) | k\leqslant m\},$$

$$k_m(\omega) = \min\{k \leqslant m : d_m(\omega) = d(f(\omega), e_k)\},$$

$$f_m(\omega) = e_{k_m}(\omega).$$

显然 f_m 是简单函数, 这是因为

$$f_m(\Omega) \subset \{e_1, e_2, \cdots, e_m\},$$

而且, 由 E_0 的稠密性, 序列 $\{d_m(\omega)\}$ 对任意 $\omega \in \Omega$ 单调下降趋于 0. 由 $d_m(\omega) = d(f(\omega), f_m(\omega))$ 即可证得该引理. □

推论 1.1.1　Ξ 是 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$ 的关于范数 $\|\cdot\|_{L^1}$ 的稠密子集.

命题 1.1.1　令 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是一个可测空间, X 是一个 Banach 空间, 则

(1) 从 Ω 到 X 上的可测函数类关于逐点收敛封闭,

(2) 从 Ω 到 X 上的强可测函数类关于逐点收敛封闭.

证明　本命题的证明简单, 请读者完成证明过程. □

推论 1.1.2　$(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X), \|\cdot\|_{L^1})$ 是完备的.

定理 1.1.1

$$\overline{\Xi} = (L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X), \|\cdot\|_{L^1}).$$

证明　由推论 1.1.1 和推论 1.1.2 即可得证. □

于是, 由定理 1.1.1 可将 Bochner 积分的定义拓展到空间 $\overline{\Xi} = L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$ 上. 下面给出 Bochner 积分的性质.

命题 1.1.2 (Bochner 不等式)　令 $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$, 则

$$\left\| \int f \mathrm{d}\mu \right\| \leqslant \int \|f\| \mathrm{d}\mu.$$

证明　对 $f \in \Xi$ 易证命题成立, 然后利用唯一的连续扩张 $\overline{\mathrm{Int}} : \overline{\Xi} = L^1(\mu; X) \to X$ 即可. □

命题 1.1.3　令 $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu; X)$, 则

$$\int L \circ f \mathrm{d}\mu = L\left(\int f \mathrm{d}\mu\right)$$

对所有 $L \in L(X, Y)$ 都成立, 其中 Y 是另一个 Banach 空间.

证明　对 $f \in \Xi$ 易证命题成立, 然后利用唯一的连续扩张 $\overline{\mathrm{Int}} : \overline{\Xi} = L^1(\mu; X) \to X$ 即可. □

设 B 是一个可分的 Banach 空间, 则对任意 B- 值的随机变量, 实值函数 $\omega \mapsto |X(\omega)|_B$ 是可测的. 一个 B- 值的随机变量 X 是可积的当且仅当

$$\mathbf{E}|X|_B := \int_\Omega |X(\omega)|_B P(\mathrm{d}\omega) < \infty.$$

如果 $\mathbf{E}|X|_B^2<\infty$, 则 X 是平方可积的.

定义 1.1.11 设 $X(\omega)$ 为一给定的可积 B- 值随机变量, 称其 Bochner 积分

$$\mathbf{E}X:=\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$$

为 $X(\omega)$ 的期望.

下面的命题给出了随积变量条件期望的定义.

命题 1.1.4[21] 设 B 是一个实值可分的 Banach 空间, X 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 Bochner 可积的 B- 值随机变量, $\mathcal{G}$ 是一个包含在 $\mathcal{F}$ 内的 σ- 域, 则存在唯一的 Bochner 可积的 B- 值随机变量 Z, 关于 $\mathcal{G}$ 是可测的, 且满足

$$\int_A X\mathrm{d}P=\int_A Z\mathrm{d}P,\quad \forall A\in\mathcal{G}.$$

记随机变量 Z 为 $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, 称为 X 在给定 $\mathcal{G}$ 下的条件期望.

证明 先证明存在性. 如果 X 是简单函数, 则存在 $x_1,x_2,\cdots,x_N\in B$ 和两两不交的集合 $A_1,\cdots,A_N\in\mathcal{F}$ 使得

$$X=\sum_{k=1}^N x_k 1_{A_k}.$$

定义

$$Z=\sum_{k=1}^N x_k P(A_k|\mathcal{G}),$$

则 Z 是 X 的条件期望. 进一步地,

$$|Z|_B\leqslant\sum_{k=1}^N|x_k|_B P(A_k|\mathcal{G})=\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^N|x_k|_B 1_{A_k}|\mathcal{G}\right)=\mathbf{E}(|X|_B|\mathcal{G}).$$

由此利用逼近方法即可证明该命题成立.

再证唯一性. 由于 $\tilde{E}$ 是一个可分的 Banach 空间, 则存在可区分 $\tilde{E}$ 中点的线性泛函 $l_n\in\tilde{E}^*$, $n\in\mathbb{N}$. 设 Z_1, Z_2 是 Bochner 可积的从 Ω 到 $\tilde{E}$ 上的 $\mathcal{G}$- 可测映射, 满足

$$\int_A X\mathrm{d}P=\int_A Z_1\mathrm{d}P=\int_A Z_2\mathrm{d}P$$

对任意 $A\in\mathcal{G}$ 成立, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_A(l_n(Z_1)-l_n(Z_2))\mathrm{d}P=0$$

对任意 $A\in\mathcal{G}$ 成立. 对 $A:=\{l_n(Z_1)>l_n(Z_2)\}$ 和 $A:=\{l_n(Z_1)<l_n(Z_2)\}$, 则应用此式有 $l_n(Z_1)=l_n(Z_2)$, P-a.s., 因此

$$\Omega_0 := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{l_n(Z_1) = l_n(Z_2)\}$$

是全测集. 因为 l_n, $n \in \mathbb{N}$ 可以区分 $\tilde{E}$ 中的点, 所以在 Ω_0 上 $Z_1 = Z_2$. □

称取值在 B 上的随机变量族 $X(n)$ 是一致可积的当且仅当

$$\lim_{r\to\infty} \sup_n \int_{\{|X(n)|_B \geqslant r\}} |X(n)|_B \mathrm{d}P = 0.$$

下面列举一些条件期望的常用性质.

命题 1.1.5　令 X, Y 是 B 上可积的随机变量, 令 a, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ- 域,

(1) $\mathbf{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbf{E}(Y|\mathcal{G})$, P-a.s..

(2) 设 T 是一个从 B 到另一个实值可分 Banach 空间 B_1 的连续线性算子, 则 $\mathbf{E}(TX|\mathcal{G}) = T\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, P-a.s..

(3) 设 X 是 $\mathcal{G}$ 可测的, ζ 是一个实值可积的随机变量, 并且使得 ζX 可积, 则 $\mathbf{E}(\zeta X|\mathcal{G}) = X\mathbf{E}(\zeta|\mathcal{G})$, P-a.s..

(4) 设 $\mathcal{G}'$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个子 σ- 域, 则 $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}') = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}')$, P-a.s..

(5) 如果 X 与 $\mathcal{G}$ 独立, 则 $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{E}X$, P-a.s..

(6) 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是凸函数, $f(|X|_B)$ 可积, 则 $f(|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|_B) \leqslant \mathbf{E}(f(|X|_B)|\mathcal{G})$, P-a.s. 特别地, $|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|_B \leqslant \mathbf{E}(|X|_B\ |\mathcal{G})$.

(7) 设 $(X(n))$ 是 B 上的一致可积的随机变量序列, $X(n)$ 几乎处处收敛于 X, 则 $\mathbf{E}(X(n)|\mathcal{G}) \to \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, P-a.s..

(8) 假设 $(\mathcal{G}_n,\ n \in \mathbb{N})$ 是递增的 σ- 域, 满足 $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N})$, 即 $\mathcal{G}$ 是包含所有 $\mathcal{G}_n$ 的最小 σ- 域, 则 $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}_n) \to \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, P-a.s..

证明　利用测度论的经典方法即可, 以 (4) 为例. 设 X 是一个简单函数, 则存在 $x_1, x_2, \cdots, x_N \in B$ 和两两不交的 $A_1, \cdots, A_N \in \mathcal{F}$ 使得

$$X = \sum_{k=1}^{N} x_k 1_{A_k},$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{G}') &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k 1_{A_k} \| \mathcal{G}\right) \| \mathcal{G}'\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{N} x_k P(A_k \| \mathcal{G}) \| \mathcal{G}'\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k P(A_k|\mathcal{G}') = \mathbf{E}(X|\mathcal{G}').\end{aligned}$$

再利用逼近方法即可证明 (4) 成立. □

在本节最后给出几种连续的定义和性质.

定义 1.1.12　称一个 B- 值随机过程 X 是右连续的, 如果

$$X(t+) := \lim_{s\downarrow t, s\in I} X(s) = X(t), \quad \forall t \in I.$$

如果

$$X(t) = \lim_{s\to t, s\in I} X(s), \quad \forall t \in I,$$

则称 X 是连续的.

定义 1.1.13　称一个 B- 值随机过程 $X = (X(t), t \in I)$ 是随机连续或者依概率连续, 如果

$$\lim_{s\to t, s\in I} P(|X(t) - X(s)|_B > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \forall t \in I.$$

附注 1.1.4　如果 $I \subset \mathbb{R}$ 是紧的, 则任意随机连续的过程 X 还是一致随机连续的, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得对 $\forall t, s \in I, |t-s| \leqslant \delta$,

$$P(|X(t) - X(s)|_B > \varepsilon) < \varepsilon.$$

定义 1.1.14　称一个 B- 值平方可积的随机过程 $X = (X(t), t \in I)$ 是均方连续的, 如果

$$\lim_{s\to t, s\in I} \mathbf{E}|X(t) - X(s)|_B^2 = 0, \quad \forall t \in I.$$

下面的定理给出了 $\mathbb{R}^d$ 中的随机变量存在一个 Hölder 连续版本的矩判别条件, 详见文献 [4].

定理 1.1.2 (Kolmogorov-Loéve-Chentsov 定理)　设 (E, ρ) 是一个完备度量空间, $(X(v), v \in \mathbb{R}^d)$ 是一族 E- 值随机变量. 假设存在 $a, b, c > 0$ 满足

$$\mathbf{E}[\rho(X(v), X(u))]^a \leqslant c|u-v|^{d+b}, \quad u, v \in \mathbb{R}^d,$$

则 X 存在一个指数为 $\alpha \in (0, b/a)$ 的局部 Hölder 连续的版本.

引理 1.1.2 (Borel-Cantelli 引理)　如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, 则 $P(\omega; \omega$ 属于无穷多个 $A_n) = 1$.

证明　该引理的证明可参阅高等概率的教材. □

命题 1.1.6[4]　任意可测的随机连续 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的 B- 值过程 $(X(t),\ t \geqslant 0)$ 存在一个可料的版本.

证明　由随机连续性知存在一个分划 $0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \cdots < t_{m,n(m)} = T$, 使得对 $t \in (t_{m,k}, t_{m,k+1}]$,

$$P(|X(t_{m,k}) - X(t)|_B > 2^{-m}) \leqslant 2^{-m}, \quad k = 0, 1, \cdots, n(m) - 1.$$

定义

$$X_m(\omega,t)=1_{\{0\}}(t)X(\omega,0)+\sum_{k=0}^{n(m)-1}1_{(t_{m,k},t_{m,k+1}]}(t)X(\omega,t_{m,k}),$$

则 X_m 是可料的. 记 A 为使得 $X_m(\omega,t)$ 收敛的 $(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]$ 构成的集合, 则 A 是一个可料集, 并且过程

$$\tilde{X}(\omega,t)=1_A(\omega,t)\lim_{m\to\infty}X_m(\omega,t)$$

是可料的. 下面证明 $\tilde{X}$ 是 X 的一个版本. 由 Borel-Cantelli 引理, 对任意固定的 $t\in[0,T]$, 存在一个全测集 $\Omega_t\in\mathcal{F}$ 使得对 $\omega\in\Omega_t$ 存在一个 $m_0\in\mathbb{N}$ 满足

$$|X_m(\omega,t)-X(\omega,t)|_B\leqslant 2^{-m},\quad \forall m\geqslant m_0.$$

因此, $\{t\}\times\Omega_t\subset A$, 并且 $X(\omega,t)=\tilde{X}(\omega,t)$ 对 $\omega\in\Omega_t$ 成立, 再由 Fubini 定理命题得证. □

定义 1.1.15　称一族在 $(E,\mathcal{E})$ 上的概率测度 $P_t(x,\cdot)$ 为转移概率, 如果

(1) 对任意的 $x\in E$, $P_0(x,\cdot)=\delta_x$,

(2) 对任意 $\Gamma\in\mathcal{E}$ 和 $t\geqslant 0$, 函数 $E\ni x\mapsto P_t(x,\Gamma)\in\mathbb{R}$ 是可测的,

(3) 测度族满足 Chapman-Kolmogorov 方程

$$P_{t+s}(x,\Gamma)=\int_E P_t(x,\mathrm{d}y)P_s(y,\Gamma),\quad \forall t,s\geqslant 0,\ \forall\Gamma\in\mathcal{E}.$$

由此可以定义作用在 E 上的有界可测函数 $B_b(E)$ 的算子转移半群为

$$P_t\varphi(x):=\int_E P_t(x,\mathrm{d}y)\varphi(y),\quad x\in E,\ t\geqslant 0,\ \varphi\in B_b(E).$$

转移概率和转移半群常用 (P_t) 表示.

定义 1.1.16　称一个 E- 值 $(\mathcal{F}_t)$- 适应的过程 $X=(X(t),t\geqslant 0)$ 为关于 $(\mathcal{F}_t)$ 和 $(\mathcal{P}_t)$ 是 Markov 的, 如果对任意 $t,h\geqslant 0$ 以及 $\varphi\in B_b(E)$,

$$\mathbf{E}(\varphi(X(t+h))|\mathcal{F}_t)=P_h\varphi(X(t)),\qquad P\text{-a.s.}.$$

附注 1.1.5　一般只考虑关于滤子 $\mathcal{F}_t=\sigma(X(s),s\leqslant t)$ 是否是 Markov 的.

§1.2　Wiener 过程及其随机积分

这一节介绍 Wiener 过程及其随机积分, 内容取自于文献 [4], [21] 和 [22] 等.

给定两个可分的 Hilbert 空间 $(U,\langle,\rangle_U)$ 和 $(H,\langle,\rangle)$, $W(t),t\in[0,t]$ 是 U 上的无穷维 Wiener 过程, Φ 是一个从 U 到 H 的线性算子但不一定有界, 下面定义随机 Itô 积分

$$\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s),\quad \forall t\in[0,t].$$

§1.2.1　无穷维 Wiener 过程

记 $L(U)$ 为 U 上的所有有界线性算子构成的集合.

定义 1.2.1　称 $(U,\mathcal{B}(U))$ 上的概率测度 μ 为高斯测度, 如果对任意 $v\in U$, 有界线性映射

$$v':U\to\mathbb{R}$$

$$u\mapsto\langle u,v\rangle_U$$

的分布是高斯分布, 即对任意 $v\in U$, 存在 $m:=m(v)\in\mathbb{R}$ 和 $\sigma:=\sigma(v)\in[0,\infty)$ 使得, 当 $\sigma(v)>0$ 时,

$$(\mu\circ(v')^{-1})(A)=\mu(v'\in A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_A \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x,\quad \forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

当 $\sigma(v)=0$ 时,

$$\mu\circ(v')^{-1}=\delta_{m(v)}.$$

引理 1.2.1[4]引理 2.14　令 ν 是 $(U,\mathcal{B}(U))$ 上的一个概率测度, $k\in\mathbb{N}$ 满足

$$\int_U |\langle z,x\rangle_U|^k\nu(\mathrm{d}x)<\infty,\quad \forall z\in U,$$

则存在常数 $C=C(k,\nu)>0$, 使得对任意的 $h_1,\cdots,h_k\in U$

$$\int_U |\langle h_1,x\rangle_U\cdots\langle h_k,x\rangle_U|\nu(\mathrm{d}x)\leqslant C\|h_1\|_U\cdots\|h_k\|_U.$$

特别地, 对称 k- 线性形式

$$U^k\ni(h_1,\cdots,h_k)\mapsto\int\langle h_1,x\rangle_U\cdots\langle h_k,x\rangle_U\nu(\mathrm{d}x)\in\mathbb{R}$$

是连续的.

定义 1.2.2　设 $X,Y\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$, H 是一个内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 Hilbert 空间, 分别定义 X 的协方差算子和 (X,Y) 的相关算子如下

$$\mathrm{Cov}(X)=\mathbf{E}(X-\mathbf{E}(X))\otimes(X-\mathbf{E}(X))$$

和

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbf{E}(X-\mathbf{E}(X))\otimes(Y-\mathbf{E}(Y)).$$

附注 1.2.1 $\mathrm{Cov}(X)$ 是一个对称、正定的 Nuclear 算子, 由简单的计算知 $\mathrm{Tr}\ \mathrm{Cov}(X) = \mathbf{E}(|X - \mathbf{E}(X)|^2)$.

定理 1.2.1[4] 一个在 $(U, \mathcal{B}(U))$ 上的测度 μ 是高斯测度当且仅当

$$\hat{\mu}(u) := \int_U \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle u,v\rangle_U} \mu(\mathrm{d}v) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle m,u\rangle_U - \frac{1}{2}\langle Qu,u\rangle_U}, \quad u \in U,$$

其中 $m \in U$, $Q \in L(U)$ 是非负、对称、迹有限的有界线性算子.

进一步地, 对任意 $h, g \in U$

$$\int \langle x, h\rangle_U \mu(\mathrm{d}x) = \langle m, h\rangle_U,$$

$$\int (\langle x, h\rangle_U - \langle m, h\rangle_U)(\langle x, g\rangle_U - \langle m, g\rangle_U)\mu(\mathrm{d}x) = \langle Qh, g\rangle_U,$$

$$\int \|x - m\|_U^2 \mu(\mathrm{d}x) = \mathrm{Tr}Q.$$

附注 1.2.2 记 μ 为 $N(m, Q)$, 其中 m 称为是均值或者期望, Q 称为是协方差算子. 由定理 1.2.1 可知, 测度 μ 由 m 和 Q 唯一决定.

下面的命题用于将 U- 值的高斯随机变量表示成实值的高斯随机变量.

命题 1.2.1 设 $Q \in L(U)$ 是非负、对称、迹有限的有界线性算子, 则存在一个 U 中的正交基 e_k, $k \in \mathbb{N}$, 使得

$$Qe_k = \lambda_k e_k, \quad \lambda_k \geqslant 0, \ k \in \mathbb{N},$$

并且 0 是序列 $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的唯一凝聚点.

证明 此命题由 Hilbert-Schmidt 定理直接可得. □

命题 1.2.2[21],[22] 设 $m \in U$, $Q \in L(U)$ 是非负、对称、迹有限的有界线性算子, e_k, $k \in \mathbb{N}$ 是 U 中的 Q 的特征向量构成的正交基, 对应的特征值 λ_k, $k \in \mathbb{N}$ 以递减的方式排序, 则概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 U- 值随机变量 X 是高斯型的, 且分布为 $P \circ X^{-1} = N(m, Q)$ 当且仅当

$$X = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k + m,$$

其中, β_k, $k \in \mathbb{N}$ 是独立实值的随机变量, 对任意使得 $\lambda_k > 0$ 的 $k \in \mathbb{N}$, β_k 的分布为 $P \circ \beta_k^{-1} = N(0, 1)$. 此级数在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; U)$ 中收敛.

证明 必要性. 假设 X 是一个均值为 m、协方差为 Q 的高斯随机变量. 下面记 $\langle , \rangle := \langle , \rangle_U$. 由于 $X = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \langle X, e_k\rangle e_k$, 其中 $\langle X, e_k\rangle$ 是均值为 $\langle m, e_k\rangle$, 方差为 λ_k 的实值高斯随机变量. 对使得 $\lambda_k > 0$ 的 $k \in \mathbb{N}$ 定义

$$\beta_k := \frac{\langle X, e_k\rangle - \langle m, e_k\rangle}{\sqrt{\lambda_k}},$$

其他情况定义 $\beta_k\equiv 0$, 则有 $P\circ\beta_k^{-1}=N(0,1)$, 并且 $X=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k+m$. 由于 β_k, $k\in\mathbb{N}$ 是一族高斯分布, 为证明独立性, 只需检验对 $i\neq j$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\beta_i\beta_j)&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\mathbf{E}(\langle X-m,e_i\rangle\langle X-m,e_j\rangle)\\&=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\langle Qe_i,e_j\rangle=\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\langle e_i,e_j\rangle=0.\end{aligned}$$

由于空间 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;U)$ 是完备的, 且

$$\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{k=m}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k\right\|^2\right)=\sum_{k=m}^n\lambda_k\mathbf{E}(|\beta_k|^2)=\sum_{k=m}^n\lambda_k.$$

对充分大的 m 和 n 可任意小, 注意到 $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k=\mathrm{Tr}Q<\infty$, 因此序列 $\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k$, $n\in\mathbb{N}$ 在 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;U)$ 中收敛.

充分性. 由必要性的证明可知, 序列 $\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k+m$, $n\in\mathbb{N}$ 在空间 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;U)$ 内收敛于 $X:=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k+m$. 下面固定 $u\in U$, 则有

$$\left\langle\sum_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k e_k+m,u\right\rangle=\sum_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k\langle e_k,u\rangle+\langle m,u\rangle$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都是正态分布, 并且此序列在 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ 内收敛. 这表明 $\langle X,u\rangle$ 也是正态分布的, 其期望为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\langle X,u\rangle)&=\mathbf{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\sqrt{\lambda_k}\beta_k\langle e_k,u\rangle+\langle m,u\rangle\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k\langle e_k,u\rangle\right)+\langle m,u\rangle=\langle m,u\rangle.\end{aligned}$$

协方差为

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}((\langle X,u\rangle-\langle m,u\rangle)(\langle X,v\rangle-\langle m,v\rangle))\\&=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k\langle e_k,u\rangle\sum_{k=1}^n\sqrt{\lambda_k}\beta_k\langle e_k,v\rangle\right)\\&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k\langle e_k,u\rangle\langle e_k,v\rangle=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle Qe_k,u\rangle\langle e_k,v\rangle\\&=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle e_k,Qu\rangle\langle e_k,v\rangle=\langle Qu,v\rangle,\end{aligned}$$

对任意 $u, v \in U$ 成立. 因此 U- 值随机变量 X 是高斯型的, 且具备分布 $P \circ X^{-1} = N(m, Q)$. □

推论 1.2.1 设 $m \in U, Q \in L(U)$ 是一个非负、对称、迹有限的有界线性算子, 则在 $(U, \mathcal{B}(U))$ 上存在一个高斯测度 $\mu = N(m, Q)$.

下面给出标准 Q-Wiener 过程的定义. 从现在起, 固定一个非负、对称、迹有限的有界线性算子 Q 和一个正数 T.

定义 1.2.3 一个定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 U- 值随机过程 $W(t)$, $t \in [0, T]$ 称为是一个 (标准) Q-Wiener 过程, 如果

(1) $W(0) = 0$,

(2) W 具有几乎处处的连续轨道,

(3) W 的增量是独立的, 即随机变量

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

对任意 $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$, $n \in \mathbb{N}$ 都是独立的,

(4) 增量具备高斯分布:

$$P \circ (W(t) - W(s))^{-1} = N(0, (t-s)Q), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

类似于高斯测度的存在性证明, U- 值 Q-Wiener 过程的存在性证明也可以化简到实值情形.

命题 1.2.3 [21],[22] 设 e_k, $k \in \mathbb{N}$ 是 U 的一族正交基, 由 Q 的对应于特征值 λ_k, $k \in \mathbb{N}$ 的特征向量构成, 则一个 U- 值随机过程 $W(t)$, $t \in [0, T]$ 是一个 Q-Wiener 过程当且仅当

$$W(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k, \quad t \in [0, T],$$

其中 β_k, $k \in \{n \in \mathbb{N} | \lambda_n > 0\}$ 是定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的独立实值布朗运动. 进一步地, 级数在空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; C([0, T]; U))$ 内收敛, 并且总存在一个 P-a.s. 的连续修正. 特别地, 对任意非负、对称、迹有限的有界线性算子 Q, 存在一个 U 上的 Q-Wiener 过程.

证明 必要性. 设 $W(t)$, $t \in [0, T]$ 是一个 U 上的 Q-Wiener 过程. 因为 $P \circ W(t)^{-1} = N(0, tQ)$, 由命题 1.2.2 的证明可以看到

$$W(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k, \quad t \in [0, T],$$

其中 $\lambda_k > 0$ 时,

$$\beta_k(t) := \frac{\langle W(t), e_k \rangle}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

对其余情形, 定义 $\beta_k \equiv 0$. 进一步地, 对任意 $t \in [0,T]$, $P \circ \beta_k^{-1}(t) = N(0,t)$, $k \in \mathbb{N}$ 并且 $\beta_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$ 是相互独立的.

为证明 $\beta_k(t)$, $t \in [0,T]$ 是相互独立的布朗运动, 注意到

$$\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle W(t), e_k \rangle$$

以及

$$\beta_k(t) - \beta_k(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \langle W(t) - W(s), e_k \rangle,$$

因此 $\beta_k(t)$ 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 是 P-a.s. 连续的, $P \circ (\beta_k(t) - \beta_k(s))^{-1} = N(0, t-s)$ 对 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 成立, 以及对任意 $k \in \mathbb{N}$, β_k 的增量也是独立的. 最后只需证明 $\beta_k(t)$, $t \in [0,T]$ 是相互独立的即可, 证明过程留给读者.

充分性. 定义

$$W(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k, \quad t \in [0,T],$$

则 $W(t)$, $t \in [0,T]$ 在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; U)$ 内有定义, 且过程 $W(t)$ 的起始点为 0, 由命题 1.2.2 可知其分布为

$$P \circ (W(t) - W(s))^{-1} = N(0, (t-s)Q), \quad 0 \leqslant s < t \leqslant T.$$

因此, $W(t)$ 的增量是相互独立的. 最后只需证明上面的序列在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; C([0,T]; U))$ 内收敛, 这可由范数估计结合 $\sum_{k \in N} = \mathrm{Tr} Q < \infty$ 完成证明. □

定义 1.2.4 (关于滤子的 Q-Wiener 过程) 称 Q-Wiener 过程 $W(t)$, $t \in [0,T]$ 为关于滤子 $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,t]$ 的 Q-Wiener 过程, 如果

(1) $W(t)$, $t \in [0,T]$ 是 $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$ 适应的;

(2) 对任意 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $W(t) - W(s)$ 关于 $\mathcal{F}_s$ 是独立的.

命题 1.2.4 设 $W(t)$, $t \in [0,t]$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 U- 值 Q-Wiener 过程, 则它是关于某个正则滤子 $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$ 的 Q-Wiener 过程.

证明 定义

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} | P(A) = 0\}, \quad \mathcal{F}_t^w := \sigma(W(s) | s \leqslant t), \quad \bar{\mathcal{F}}_t^w := \sigma(F_t^w \cup \mathcal{N}).$$

可直接验证

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{s > t} \bar{\mathcal{F}}_s^w, \quad t \in [0,T]$$

是一个正则滤子并且满足命题所求. □

§1.2.2 Banach 空间中的鞅

定义 1.2.5 令 $M(t)$, $t \geqslant 0$ 是某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程, 取值在

某个可分的 Banach 空间 B 内, 设 $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的滤子. 称过程 M 是 $\mathcal{F}_t$- 鞅, 如果

(1) $\mathbf{E}(\|M(t)\|) < \infty$ 对任意 $t \geqslant 0$ 成立;

(2) 对任意 $t \geqslant 0$, $M(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$- 可测的;

(3) 对任意 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) = M(s)$, P-a.s..

Banach 空间中的鞅与经典概率论中的实值下鞅有下面的联系.

命题 1.2.5 设 $M(t)$, $t \geqslant 0$ 是一个 B- 值的 $\mathcal{F}_t$- 鞅, $p \in [1, \infty)$, 则 $\|M(t)\|^p$, $t \geqslant 0$ 是一个实值 $\mathcal{F}_t$- 下鞅.

证明 因为 B 是可分的, 于是存在一列泛函 $l_k \in B^*$, $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\|z\| = \sup l_k(z)$ 对任意 $z \in B$ 成立. 则当 $s < t$ 时,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|M_t\| \mid \mathcal{F}_s) &\geqslant \sup_k \mathbf{E}(l_k(M_t)|\mathcal{F}_s) \\ &= \sup_k l_k(\mathbf{E}(M_t|\mathcal{F}_s)) = \sup_k l_k(M_s) = \|M_s\|. \end{aligned}$$

此即对 $p = 1$ 的情形证明了命题. 对 $p \in [1, \infty)$ 的情形可以应用 Jensen 不等式证明. □

定理 1.2.2 (极大不等式) 设 $p > 1$, B 是一个可分的 Banach 空间. 设 $M(t)$, $t \in [0, T]$ 是一个右连续的 B- 值 $\mathcal{F}_t$- 鞅, 则

$$\left(\mathbf{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \|M(t)\|^p\Big)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{p}{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbf{E}(\|M(t)\|^p)\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \left(\mathbf{E}(\|M(T)\|^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 此不等式的证明只需应用上一个命题并结合实值下鞅的 Doob 极大不等式即可. □

附注 1.2.3 此定理的结论表明对于右连续的 B- 值 $\mathcal{F}_t$- 鞅, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; C([0,T]; B))$ 范数和 $C([0,T]; L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; E))$ 范数是等价的.

下面固定 $0 < T < \infty$ 并记 $\mathcal{M}_T^2(B)$ 为所有的 B- 值连续平方可积鞅 $M(t)$, $t \in [0, T]$ 构成的空间. 这一空间将在定义随机积分时发挥重要作用.

命题 1.2.6 将空间 $\mathcal{M}_T^2(B)$ 赋以范数

$$\begin{aligned} \|M\|_{\mathcal{M}_T^2} &:= \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbf{E}(\|M(t)\|^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{E}(\|M(T)\|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\mathbf{E}\Big(\sup_{t\in[0,T]} \|M(t)\|^2\Big)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2 \cdot \left(\mathbf{E}(\|M(T)\|^2)\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

则 $\mathcal{M}_T^2(B)$ 是一个 Banach 空间.

证明 由 Riesz-Fischer 定理, 空间 $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; C([0,T]; B))$ 是完备的. 因此只需证明 $\mathcal{M}_T^2$ 是闭的. 这是显然的, 因为鞅在 $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P; B)$ 空间中是闭的. □

命题 1.2.7　设 $T>0$, $W(t),\ t\in[0,T]$ 是一个定义在某个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 B- 值的关于某个正则滤子 $\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]$ 的 Q-Wiener 过程, 则 $W(t),\ t\in[0,T]$ 是一个连续平方可积 $\mathcal{F}_t$- 鞅, 即 $W\in\mathcal{M}_T^2(B)$.

证明　由 Wiener 过程的定义, 连续性是显然的, 而且对任意的 $t\in[0,T]$, 计算可得 $\mathbf{E}(\|W(t)\|_B^2)=t\ \mathrm{Tr}Q<\infty$.

$W(t)$ 是鞅可以直接证明, 设 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(W(t)|\mathcal{F}_s)&=\mathbf{E}(W(s)+W(t)-W(s)|\mathcal{F}_s)\\&=\mathbf{E}(W(s)|\mathcal{F}_s)+\mathbf{E}(W(t)-W(s))\\&=W(s),\end{aligned}$$

因为 $W(t)-W(s)$ 关于 $\mathcal{F}_s$ 是独立的. □

§1.2.3　随机积分的定义

本小节构造随机积分的过程分四步:

下面固定正实数 T 和概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$, 定义 $\Omega_T:=[0,T]\times\Omega$ 和 $P_T:=\mathrm{d}x\otimes P$, 其中 $\mathrm{d}x$ 是 Lebesgue 测度. 设 $Q\in L(U)$ 是对称、非负、迹有限的, 考虑关于某个正则滤子 $\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]$ 的 Q-Wiener 过程 $W(t),\ t\in[0,T]$.

定义 1.2.6　称定义在 $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t))$ 上的 $L=L(U,H)$- 值过程 $\Phi(t),\ t\in[0,T]$ 是基本的, 如果存在 $0=t_0<\cdots<t_k=T,\ k\in\mathbb{N}$ 使得

$$\Phi(t)=\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m 1_{(t_m,t_{m+1}]}(t),\quad t\in[0,T],$$

其中

(1) $\Phi_m:\Omega\to L(U,H)$, $0\leqslant m\leqslant k-1$ 关于 $L(U,H)$ 上的强 Borel σ- 代数是 $\mathcal{F}_{t_m}$- 可测的,

(2) $\Phi_m,\ 1\leqslant m\leqslant k-1$ 取 $L(U,H)$ 中的有限个值.

第一步：首先考虑对 $L(U,H)$- 值基本过程类 Ξ 中的元素 $\Phi\in\Xi$, 定义积分映射 Int：

$$\Phi\mapsto\int_0^t\Phi(s)\mathrm{d}W(s):=\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t)),\quad t\in[0,T],$$

虽然 $\Phi\in\Xi$ 可以有多种表示形式, 读者可以验证这个定义与 $\Phi\in\Xi$ 的具体形式无关.

命题 1.2.8[4],[22]　设 $\Phi\in\Xi$, 则随机积分 $\displaystyle\int_0^t\Phi(s)\mathrm{d}W(s),\ t\in[0,T]$ 是一个关于滤子 $\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]$ 的连续平方可积鞅, 即

$$\mathrm{Int}:\Xi\to\mathcal{M}_T^2.$$

证明　设 $\Phi\in\mathcal{E}$ 的具体形式为

$$\Phi(t)=\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m 1_{(t_m,t_{m+1}]}(t),\quad t\in[0,T],$$

则由 Wiener 过程的连续性和算子 $\Phi_m(\omega):U\to H,\ 0\leqslant m\leqslant k-1,\ \omega\in\Omega$ 的连续性知

$$t\mapsto\int_0^t\Phi(s)\mathrm{d}W(s):=\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t)),\quad t\in[0,T]$$

是几乎处处连续的. 而且

$$\|\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t))\|\leqslant\|\Phi_m\|_{L(U,H)}\|(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t))\|_U.$$

由于 $W(t),\ t\in[0,T]$ 是平方可积的, 所以对任意 $t\in[0,T]$, $\int_0^t\Phi(s)\mathrm{d}W(s)$ 也是平方可积的.

为了证明鞅性选取 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 和某个 $\mathcal{F}_s$ 中的集合 A. 设 $\{\Phi_m(\omega)\mid\omega\in\Omega\}:=\{L_1^m,\cdots,L_{k_m}^m\}$, 则由 Wiener 过程的鞅性知

$$\begin{aligned}
&\int_A\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t))\mathrm{d}P\\
=&\sum_{0\leqslant m\leqslant k-1,t_{m+1}<s}\int_A\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge s)-W(t_m\wedge s))\mathrm{d}P\\
&+\sum_{0\leqslant m\leqslant k-1,s\leqslant t_{m+1}}\sum_{j=1}^{k_m}\int_{A\cap\{\Phi_m=L_j^m\}}L_j^m(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t))\mathrm{d}P\\
=&\sum_{0\leqslant m\leqslant k-1,t_{m+1}<s}\int_A\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge s)-W(t_m\wedge s))\mathrm{d}P\\
&+\sum_{0\leqslant m\leqslant k-1,s\leqslant t_{m+1}}\sum_{j=1}^{k_m}L_j^m\int_{A\cap\{\Phi_m=L_j^m\}}(W(t_{m+1}\wedge t)-W(t_m\wedge t))\mathrm{d}P\\
=&\sum_{0\leqslant m\leqslant k-1,t_{m+1}<s}\int_A\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge s)-W(t_m\wedge s))\mathrm{d}P\\
&+\sum_{0\leqslant m\leqslant k-1,s\leqslant t_{m+1}}\sum_{j=1}^{k_m}L_j^m\int_{A\cap\{\Phi_m=L_j^m\}}(W(t_{m+1}\wedge s)-W(t_m\wedge s))\mathrm{d}P\\
=&\int_A\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m(W(t_{m+1}\wedge s)-W(t_m\wedge s))\mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

□

第二步：证明空间 Ξ 上存在某个范数, 使得

$$\mathrm{Int}:\Xi\to\mathcal{M}_T^2$$

是一个同构. 下面的命题涉及 Hilbert-Schmidt 算子的定义和性质, 参阅 §1.5.

直接计算

$$\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s),\quad t\in[0,T]$$

的 $\mathcal{M}_T^2$- 范数, 则有

命题 1.2.9[4],[22] 设 $\Phi=\sum\limits_{m=0}^{k-1}\Phi_m 1_{(t_m,t_{m+1}]}$ 是一个 $L(U,H)$- 值基本过程, 则

$$\left\|\int_0^\cdot \Phi(s)\mathrm{d}W(s)\right\|_{\mathcal{M}_T^2}^2=\mathbf{E}\left(\int_0^T\|\Phi(s)\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L_2}^2\mathrm{d}s\right)=:\|\Phi\|_T^2.$$

证明 令 $\Delta_m:=W(t_{m+1})-W(t_m)$, 则

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\cdot \Phi(s)\mathrm{d}W(s)\right\|_{\mathcal{M}_T^2}^2&=\mathbf{E}\left(\left\|\int_0^T\Phi(s)\mathrm{d}W(s)\right\|_H^2\right)=\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{m=0}^{k-1}\Phi_m\Delta_m\right\|_H^2\right)\\&=\mathbf{E}\left(\sum_{m=0}^{k-1}\|\Phi_m\Delta_m\|_H^2\right)+2\mathbf{E}\left(\sum_{0\leqslant m<n\leqslant k-1}\langle\Phi_m\Delta_m,\Phi_n\Delta_n\rangle_H\right).\end{aligned}$$

断言 1：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\sum_{m=0}^{k-1}\|\Phi_m\Delta_m\|_H^2\right)&=\sum_{m=0}^{k-1}(t_{m+1}-t_m)\mathbf{E}\left(\|\Phi_m\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(U,H)}^2\right)\\&=\int_0^T\mathbf{E}(\|\Phi(s)\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L^2}^2)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

选取空间 H 的某组正交基 f_k, $k\in\mathbb{N}$, 则由 Parseval 等式和 Levi 单调收敛定理知

$$\mathbf{E}(\|\Phi_m\Delta_m\|_H^2)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\mathbf{E}(\langle\Phi_m\Delta_m,f_l\rangle_H^2)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\mathbf{E}(\mathbf{E}(\langle\Delta_m,\Phi_m^*f_l\rangle_U^2\mid\mathcal{F}_{t_m})).$$

选取空间 U 的某组正交基 $e_k,k\in\mathbb{N}$, 则有

$$\Phi_m^*f_l=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle f_l,\Phi_m e_k\rangle_H e_k.$$

因为 $\langle f_l,\Phi_m e_k\rangle_H$ 是 $\mathcal{F}_{t_m}$- 可测的, 所以由命题 1.1.1 知 $\Phi_m^*f_l$ 是 $\mathcal{F}_{t_m}$- 可测的. 再由于 $\sigma(\Delta_m)$ 关于 $\mathcal{F}_{t_m}$ 是独立的, 对 P-a.e. $\omega\in\Omega$ 有

$$\mathbf{E}(\langle\Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2 \mid \mathcal{F}_{t_m})(\omega) = (t_{m+1} - t_m)\langle Q(\Phi_m^*(\omega) f_l), \Phi_m^*(\omega) f_l\rangle_U,$$

这是因为 $\mathbf{E}(\langle\Delta_m, u\rangle_U^2) = (t_{m+1} - t_m)\langle Qu, u\rangle_U, \forall\, u \in U$. 最后由 $Q^{\frac{1}{2}}$ 的对称性可以证明断言

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\|\Phi_m\Delta_m\|_H^2) &= \sum_{l\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\langle\Delta_m, \Phi_m^* f_l\rangle_U^2 \mid \mathcal{F}_{t_m}))\\
&= (t_{m+1} - t_m)\sum_{l\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(\langle Q(\Phi_m^* f_l), \Phi_m^* f_l\rangle_U)\\
&= (t_{m+1} - t_m)\sum_{l\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(\|Q^{\frac{1}{2}}\Phi_m^* f_l\|_U^2)\\
&= (t_{m+1} - t_m)\mathbf{E}\left(\|(\Phi_m \circ Q^{\frac{1}{2}})^*\|_{L_2(H,U)}^2\right)\\
&= (t_{m+1} - t_m)\mathbf{E}\left(\|\Phi_m \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(U,H)}^2\right)\\
&= \int_{t_m}^{t_{m+1}} \mathbf{E}(\|\Phi(s) \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L^2}^2)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

断言 2：

$$\mathbf{E}(\langle\Phi_m\Delta_m, \Phi_n\Delta_n\rangle_H) = 0, \quad 0 \leqslant m < n \leqslant k-1.$$

这个可以类似断言 1 证明：

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\langle\Phi_m\Delta_m, \Phi_n\Delta_n\rangle_H) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\langle\Phi_n^*\Phi_m\Delta_m, \Delta_n\rangle_U \mid \mathcal{F}_{t_n}))\\
&= \int \mathbf{E}(\langle\Phi_n^*(\omega)\Phi_m(\omega)\Delta_m(\omega), \Delta_n\rangle_U)P(\mathrm{d}\omega) = 0,
\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{E}(\langle u, \Delta_n\rangle_U) = 0, \forall\, u \in U$, 因而命题得证. □

因此

$$\mathrm{Int} : (\Xi, \|\cdot\|_T) \to (\mathcal{M}_T^2, \|\cdot\|_{\mathcal{M}_T^2})$$

是一个同构变换. 所以可以将 Int 唯一地拓展到 Ξ 关于 $\|\cdot\|_T$ 的完备化 $\overline{\Xi}$ 上.

第三步：给出 $\overline{\Xi}$ 的一个显式表示.

引入子空间 $U_0 := Q^{\frac{1}{2}}(U)$, 并定义其上的内积为

$$\langle u_0, v_0\rangle_0 := \langle Q^{-\frac{1}{2}}u_0, Q^{-\frac{1}{2}}v_0\rangle_U,$$

其中 $u_0, v_0 \in U_0$, 当 Q 不单时, $Q^{-\frac{1}{2}}$ 是 $Q^{\frac{1}{2}}$ 的伪逆.

下面的命题可以借助泛函知识证明:

命题 1.2.10　(1) $(U_0, \langle,\rangle_0)$ 是一个可分的 Hilbert 空间.

(2) 设 $g_k,\ k \in \mathbb{N}$ 是空间 $(\mathrm{Ker}\ Q)^\perp$ 的一组正交基, 则 $Qg_k,\ k \in \mathbb{N}$ 是 $(U_0, \langle,\rangle_0)$ 的一组正交基.

可分 Hilbert 空间 $L_2(U_0,H)$ 以后记为 L_2^0. 由上一命题知, 对任意 $L\in L_2^0$,

$$\|L\|_{L_2^0}=\|L\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L_2}.$$

定义 $L(U,H)_0:=\{T|_{U_0}\mid T\in L(U,H)\}$, 则 $L(U,H)_0\subset L_2^0$. 进一步地, $\Phi\in\Xi$ 的 $\|\cdot\|_T$ 范数可以改写成

$$\|\Phi\|_T=\left(\mathbf{E}\left(\int_0^T\|\Phi(s)\circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L_2}^2\mathrm{d}s\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\mathbf{E}\left(\int_0^T\|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2\mathrm{d}s\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 1.2.2 L_2^0 空间存在一组完全由 $L(U,H)_0$ 的元素构成的正交基, 即 $L(U,H)_0$ 是 L_2^0 的稠密子集.

证明 因为 Q 是对称的、非负的, 且 $\mathrm{Tr}\ Q<\infty$, 则存在 U 的一组正交基 e_k, $k\in\mathbb{N}$, 使得 $Qe_k=\lambda_ke_k$, $\lambda_k\geqslant 0$, $k\in\mathbb{N}$. 进一步地, 当 $\lambda_k>0$ 时, $Q^{\frac{1}{2}}e_k=\sqrt{\lambda_k}e_k$, $k\in\mathbb{N}$ 是空间 U_0 的一组正交基.

设 f_k, $k\in\mathbb{N}$ 是空间 H 的一组正交基, 易知

$$f_j\otimes\sqrt{\lambda_k}e_k=f_j\langle\sqrt{\lambda_k}e_k,\cdot\rangle_{U_0}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}f_j\langle e_k,\cdot\rangle_U,\quad j,k\in\mathbb{N},\ \lambda_k>0$$

是 $L(U,H)$ 中的算子簇, 它们构成了一组 L_0^2 的正交基. 显然, 集合 $\mathrm{span}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}f_j\otimes e_k\mid j,\ k\in\mathbb{N},\ \lambda_k>0\right\}\right)$ 的闭包是 L_2^0. □

下面需要考虑可料 σ- 代数:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T:=&\sigma(\{(s,t]\times F_s\mid 0\leqslant s<t\leqslant T,\ F_s\in\mathcal{F}_s\}\cup\{\{0\}\times F_0\mid F_0\in\mathcal{F}_0\})\\=&\sigma(Y:\Omega_T\to\mathbb{R}\mid Y\ \text{是左连续的, 关于}\ \mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]\ \text{是适应的}).\end{aligned}$$

命题 1.2.11[22],[23] 设 Φ 是一个 L_2^0- 值的可料过程, 且 $\|\Phi\|_T<\infty$, 则存在一个 $L(U,H)_0$- 值的基本过程列 Φ_n, $n\in\mathbb{N}$, 满足

$$\|\Phi-\Phi_n\|_T\to 0,$$

当 $n\to\infty$ 时.

证明 第一步: 设 Φ 是一个 L_2^0- 值的可料过程且 $\|\Phi\|_T<\infty$. 因为 L_2^0 是一个 Hilbert 空间, 由引理 1.1.1 和 Lebesgue 控制收敛定理知, 存在一个简单随机变量列 $\Phi_n=\sum\limits_{k=1}^{M_n}L_k^n1_{A_k^n}$, $A_k^n\in\mathcal{P}_T$ 及 $L_k^n\in L_2^0$, $n\in\mathbb{N}$, 使得

$$\|\Phi-\Phi_n\|_T\to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时.

因此只需对 $\Phi = L1_A$ 的情形, 其中 $L \in L_2^0$ 及 $A \in \mathcal{P}_T$, 证明命题.

第二步: 设 $A \in \mathcal{P}_T$ 及 $L \in L_2^0$, 则由引理 1.2.2 知, 存在一个 $L(U,H)_0$ 中的序列 L_n, $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|L1_A - L_n 1_A\|_T \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时.

因此只需对 $\Phi = L1_A$, $L \in L(U,H)_0$ 及 $A \in \mathcal{P}_T$ 的情形证明命题.

第三步: 设 $\Phi = L1_A$, $L \in L(U,H)_0$ 且 $A \in \mathcal{P}_T$, 试图证明存在一个 $L(U,H)_0$-值的基本过程列 Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\|L1_A - \Phi_n\|_T \to 0,$$

当 $n \to \infty$ 时.

为此只需证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个有限并 $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$, 其中

$$A_n \in \{(s,t] \times F_s \mid 0 \leqslant s < t \leqslant T,\ F_s \in \mathcal{F}_s\} \cup \{\{0\} \times F_0 \mid F_0 \in \mathcal{F}_0\} =: \mathcal{A}$$

是两两不交的可料矩形, 使得

$$P_T((A \backslash \Lambda) \cup (\Lambda \backslash A)) < \varepsilon.$$

由此, $\sum\limits_{n=1}^{N} L1_{A_n}$ 与一个基本过程至多相差一个函数 $1_{\{0\}\times F_0}$, $F_0 \in \mathcal{F}_0$, 而 $1_{\{0\}\times F_0}$ 的 $\|\cdot\|_T$- 范数为 0, 且

$$\left\| L1_A - \sum_{n=1}^{N} L1_{A_n} \right\|_T^2 = E\left(\int_0^T \left\| L\left(1_A - \sum_{n=1}^{N} 1_{A_n}\right) \right\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s \right) \leqslant \varepsilon \|L\|_{L_2^0}^2.$$

最后定义

$$\mathcal{K} := \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \mid I \text{ 是有限区间}, A_i \in \mathcal{A},\ i \in I \right\},$$

令 $\mathcal{G}$ 是由所有可以被 $\mathcal{K}$ 中元素近似的 $A \in \mathcal{P}_T$ 构成的集族, 则 $\mathcal{K}$ 是一个代数, 且任意 $\mathcal{K}$ 中的元素可以表示成 $\mathcal{A}$ 中有限个元素的无交并. 进一步地, $\mathcal{G}$ 是一个 Dynkin 系, 因此由 $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ 知, $\mathcal{P}_T = \sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{D}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{G}$. □

为简单起见, 用 $\mathcal{N}_W^2(0,T)$ 或 $\mathcal{N}_W^2$ 表示 $\mathcal{N}_W^2(0,T;H)$.

定理 1.2.3 *存在 Ξ 的一个明确表示, 即为*

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_W^2(0,T;H) &= \{\Phi : [0,T] \times \Omega \to L_2^0 \mid \Phi \text{ 是可料的, 且} \|\Phi\|_T < \infty\} \\ &= L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}_T, \mathrm{d}t \otimes P; L_2^0).\end{aligned}$$

证明 因为 $L(U,H)_0 \subset L_2^0$, 且由构造知任意 $\Phi \in \Xi$ 是 L_2^0- 值可料过程, 所以有 $\Xi \subset \mathcal{N}_W^2$. 再由上面的引理和命题知, $\overline{\Xi} \supset \mathcal{N}_W^2$. 因此仅需证明 $\mathcal{N}_W^2 = L^2(\Omega_T, \mathcal{P}_T, P_T; L_2^0)$ 是完备的, 这可以由 L_2^0 的完备性推得. □

第四步：最后通过所谓的局部化过程将随机积分的定义推广到线性空间

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_W(0,T;H)\\&:=\left\{\Phi:[0,T]\times\Omega\to L_2^0 \mid \Phi \text{ 是可料的且 } P\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s<\infty\right)=1\right\}.\end{aligned}$$

为简单起见也用 $\mathcal{N}_W(0,T)$ 或 $\mathcal{N}_W$ 表示 $\mathcal{N}_W(0,T;H)$. $\mathcal{N}_W$ 称为是 $[0,T]$ 上的随机可积过程类.

对 $\Phi \in \mathcal{N}_W$, 定义

$$\tau_n := \inf\left\{t\in[0,T] \,\middle|\, \int_0^t \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s > n\right\} \wedge T,$$

则由 $\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]$ 的右连续性知

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\left\{\tau_n < t+\frac{1}{m}\right\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in[0,t+\frac{1}{m})\cap\mathbb{Q}} \left\{\int_0^q \|\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s > n\right\} \in \mathcal{F}_t.$$

因此 $\tau_n,\ n\in\mathbb{N}$ 是关于 $\mathcal{F}_t,\ t\in[0,T]$ 的递增停时序列, 满足

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T \|1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\|_{L_2^0}^2 \mathrm{d}s\right) \leqslant n < \infty.$$

进一步地, 过程 $1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi,\ n\in\mathbb{N}$ 是 L_2^0- 可料的. 这是因为 $1_{(0,\tau_n]}$ 是 $\mathcal{F}_t$- 适应的左连续过程, 或者考虑

$$\begin{aligned}\{(s,\omega)\in\Omega_T \mid 0<s\leqslant\tau_n(\omega)\} &= (\{(s,\omega)\in\Omega_T \mid \tau_n(\omega)<s\leqslant T\}\cup\{0\}\times\Omega)^c\\&=\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\,(q,T]\times\{\tau_n\leqslant q\})\cup\{0\}\times\Omega\right)^c \in \mathcal{P}_T.\end{aligned}$$

因此随机积分

$$\int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s), \quad t\in[0,T],$$

对任意 $n\in\mathbb{N}$ 是适定的. 对任意 $t\in[0,T]$, 令

$$\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s) := \int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s),$$

其中 n 是任意一个使得 $\tau_n \geqslant t$ 的自然数 (其实对 P-a.s. $\omega \in \Omega$, 存在 $n(\omega) \in \mathbb{N}$ 使得 $\tau_n(\omega) = T$, 当 $n \geqslant n(\omega)$ 时).

下面证明该定义是协调的, 即对任意自然数 $m < n$ 和 $t \in [0,T]$, 证明在 $\{\tau_m \geqslant t\} \subset \{\tau_n \geqslant t\}$ 上

$$\int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s) = \int_0^t 1_{(0,\tau_m]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s), \quad P\text{-a.s.},$$

这可以由下面的引理推得, 该引理的结果还表明过程 $\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s) := \int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\times \Phi(s)\mathrm{d}W(s)$ 是一个连续 H- 值局部鞅.

引理 1.2.3[4] 设 $\Phi \in \mathcal{N}_W^2$, τ 是一个 $\mathcal{F}_t$- 停时, 满足 $P(\tau \leqslant T) = 1$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^t 1_{(0,\tau]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s) &= \mathrm{Int}(1_{(0,\tau]}\Phi)(t) = \mathrm{Int}(\Phi)(\tau \wedge t)\\ &= \int_0^{\tau\wedge t} \Phi(s)\mathrm{d}W(s), \quad P\text{-a.s.},\end{aligned}$$

对任意 $t \in [0,T]$ 成立.

因此, 对任意自然数 $m < n$, 在 $\{\tau_m \geqslant t\} \subset \{\tau_n \geqslant t\}$ 上

$$\begin{aligned}\int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s) &= \int_0^{\tau_m\wedge t} 1_{(0,\tau_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s)\\ &= \int_0^t 1_{(0,\tau_n]}(s)1_{(0,\tau_m]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s)\\ &= \int_0^t 1_{(0,\tau_m]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s), \quad P\text{-a.s.},\end{aligned}$$

其中第二个等号成立是由引理 1.2.3 推得.

最后, 证明随机积分的定义并不依赖于停时 τ_n, $n \in \mathbb{N}$ 的选择. 如果 σ_n, $n \in \mathbb{N}$ 是另一个停时序列, 满足当 $n \to \infty$ 时, $\sigma_n \uparrow T$, 且对任意 $n \in \mathbb{N}$, $1_{(0,\sigma_n]}\Phi \in \mathcal{N}_W^2$, 则有

$$\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t 1_{(0,\sigma_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s), \quad P\text{-a.s.}, \ \forall\, t \in [0,T].$$

事实上, 令 $t \in [0,T]$, 则在集合 $\{\tau_m \geqslant t\}$ 上

$$\begin{aligned}\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}W(s) &= \int_0^t 1_{(0,\tau_m]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{t\wedge\sigma_n} 1_{(0,\tau_m]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{t\wedge\tau_m} 1_{(0,\sigma_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t 1_{(0,\sigma_n]}(s)\Phi(s)\mathrm{d}W(s), \quad P\text{-a.s.}.\end{aligned}$$