

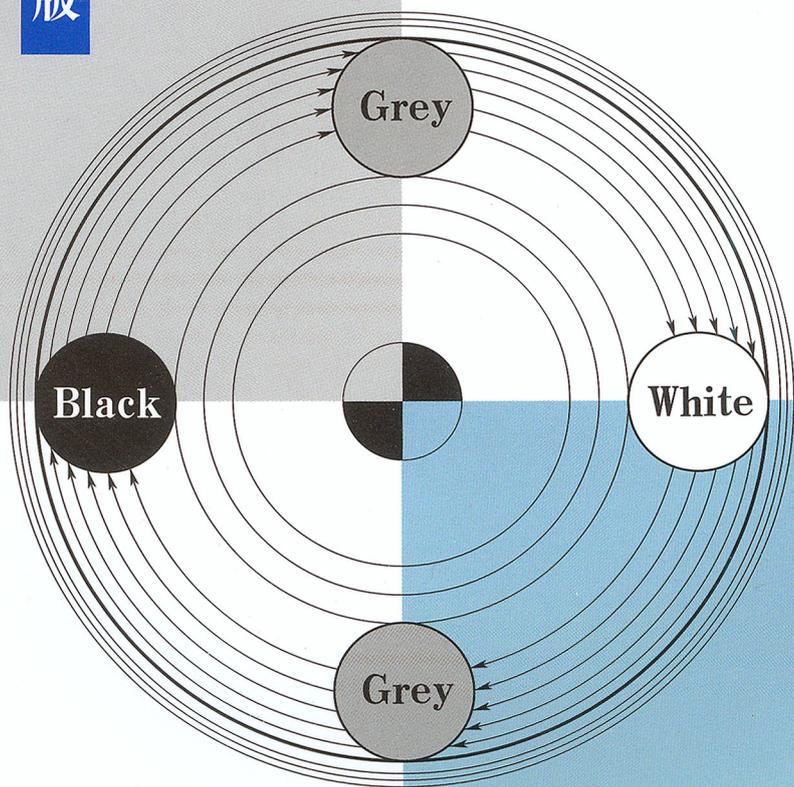


普通高等教育“十一五”国家级规划教材

灰色系统理论及其应用

第四版

刘思峰 谢乃明 等 编著



科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

灰色系统理论及其应用

(第四版)

刘思峰 谢乃明 等 编著

国家自然科学基金资助项目

教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目

江苏省高等学校优秀科技创新团队科研基金资助项目

国家级精品课程建设基金资助项目

江苏省精品课程建设基金资助项目

南京航空航天大学精品课程群和研究生培养规划基金资助项目

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,是应广大读者要求,在前三版基础上针对教师教学和学生需要编写的普及版。本书系统地论述了灰色系统的基本理论、基本方法和应用技术,是作者长期从事灰色系统理论探索、实际应用和教学工作的结晶,同时还吸收了国内外同行近年来取得的理论和应用研究新成果,精辟地向读者展示出灰色系统理论这一新学科的概貌及其前沿发展动态。

全书共9章,包括灰色系统的概念与基本原理、序列算子与灰色序列生成、灰色关联分析、灰色聚类评估、灰色系统模型、灰色系统预测、灰色组合模型、灰色决策、课程实验等内容。其中,序列算子、缓冲算子公理系统及系列弱化和强化算子、灰数灰度测度公理、广义灰色关联度(灰色绝对关联度、灰色相对关联度、灰色综合关联度)、定权灰色聚类评估和基于三角白化权函数的灰评估新方法、GM(1,1)模型的适用范围以及灰色经济计量学模型(G-E)、灰色生产函数模型(G-C-D)、灰色投入产出模型(G-I-O)、灰色马尔可夫模型(G-M)和离散灰色模型等系作者首次提出。另外,本书附有灰色建模系统软件包。

本书适合作为高等学校各相关专业本科生和研究生教材,亦可作为政府部门、科研机构及企事业单位的科技工作者、管理干部以及系统分析、市场预测、金融决策、资产评估和企业策划人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

灰色系统理论及其应用/刘思峰,谢乃明等编著.—4版.—北京:科学出版社,2008

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

ISBN 978-7-03-022847-5

I. 灰… II. ①刘…②谢… III. 灰色系统理论-高等学校-教材 IV. N941.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第132349号

责任编辑:林建 马长芳 / 责任校对:桂伟利

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1991年5月第1版 开本:B5(720×1000)

1999年6月第2版 印张:15

2004年11月第3版 字数:275 000

2008年12月第4版 2008年12月第九次印刷

印数:1—3 000

定价:29.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换(科印))

主要作者简介

刘思峰,男,工学博士,1955年生于河南省平舆县。先后就读于河南大学(基础数学)、山东大学(应用数学)和华中理工大学(数量经济学、系统工程)。曾赴美国宾夕法尼亚州州立SR大学国际系统科学研究所和澳大利亚悉尼大学高等教育研究中心任访问教授。1994年,在河南农业大学破格晋升为管理学教授。现任南京航空航天大学特聘教授、博士生导师、经济与管理学院院长、管理科学与工程一级学科(江苏省重点学科)博士点和博士后科研流动站首席学科带头人。

主要从事“灰色系统理论”和“系统评价方法与模型”研究。主持国家、省部级课题和国际合作项目50多项;在国内外学术期刊发表论文200多篇,其中,英文论文60余篇;出版著作16部,其中,英文著作2部,分别由美国IIGSS学术出版社和德国Springer-Verlag出版公司出版;论文被SCI, EI, ISTP等国际重要文摘机构收录100多次,论著被国内外学者引用6000多次。获省部级以上教学成果奖9项、科技成果奖12项,其中,“十一五”国家级规划教材3项,省部级一等奖3项、二等奖6项、三等奖5项。2002年获系统与控制世界组织奖(著作奖)。

担任国家教育部管理科学与工程学科教学指导委员会委员(2001~2005, 2006~2010)、江苏省管理学科门类教学指导委员会副主任兼管理科学与工程学科教学指导委员会主任(2007~2010)、IEEE灰色系统委员会主席、IEEE SMC中国(北京)分会副主席、中国优选法统筹法与经济数学研究会副理事长兼灰色系统专业委员会主任、江苏省系统工程学会副理事长、江苏省数量经济与管理科学学会副会长等学术职务。被聘为英国《系统与控制国际杂志》客座主编及美国《科学探索》、英国《灰色系统学报》、《中国管理科学》和中国台湾《灰色系统杂志》等10余种国际国内学术期刊编委和数十种重要期刊审稿人。

曾被评为“全国优秀教师”、“河南省优秀专家”、“江苏省优秀科技工作者”、“享受政府特殊津贴的专家”和“国家有突出贡献的中青年专家”等。2003年被评为“全国留学回国先进个人”,并获“留学回国成就奖”。2005年被评为“国防科技工业优秀博士学位获得者”,2006年被评为“江苏省高等学校教学名师”。

谢乃明,男,管理学博士,1981年生于安徽省天长市。1998~2008年就读于南京航空航天大学(工业工程、系统工程、灰色系统理论)。现任南京航空航天大学经济与管理学院讲师。主要从事灰色系统理论和工业工程领域的研究工作。主持、参加国家、省部级科研课题近10项,在 *Applied Mathematical Modelling*,

Kybernetes 和《系统工程理论与实践》、《系统工程学报》、《控制与决策》等国内外重要学术刊物发表论文 20 余篇,其中多篇被 SCI, EI, ISTP 等国际重要检索机构收录。2006 年被评为南京航空航天大学“十大科创之星”,2007 年获 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议优秀论文一等奖。



With human knowledge maturing and scientific exploration deepening and largely expanding in the course of time, mankind finally realizes the fundamental fact that due to both internal and external disturbances and limitations of human and technical sensing organs, all information received or collected contains some kind of uncertainty. Accompanying the progress of science and technology and the afore-mentioned realization, our understanding about various kinds of uncertainties have gradually been deepened. Attesting to this end, in the second half of the 20th century, the continual appearance of several influential and different types of theories and methods on unascertained systems and information has become a major aspect of the modern world of learning. Each of these new theories was initiated and followed-up by some of the best minds of our modern time.

In their recent book, entitled “Grey Information: Theory and Practical Applications” published in its traditionally excellent way by Springer, Professors S. F. Liu and Y. Lin presented in a systematic fashion the theory of grey systems, which was first proposed by J. L. Deng in early 1980s and enthusiastically supported by hundreds of scientists and practitioners in the following years. Based on the hard work of these scholars in the past (nearly) thirty years, scholars from many countries currently are studying and working on the theory and various applications of this fruitful scientific endeavor. With this book published by

such a prestigious leading publisher of the world, it can be expected that more scientific workers from different parts of the world will soon join hands and together make grey system and information a powerful theory capable of bringing forward practically beneficial impacts to the advancement of the human society.

This book focuses on the study of such unascertained systems that are known with small samples or “poor information”. Different of all other relevant theories on uncertainties, this work introduces a system of many methods on how to deal with grey information. Starting off with a brief historical introduction, this book carries the reader through all the basics of the theory. And, each important method studied is accompanied with a real-life project the authors were involved in during their professional careers.

Many of the methods and techniques the reader will learn in this book were originally introduced by the authors. They show how from our knowledge based on partially and poorly known information can be obtained to accurate descriptions and effective controls of the systems of interest. Because this book shows how the theory of grey systems and information was established and how each method could be practically applied, this book can easily be used as a reference by scholars who are interested in either theoretical exploration or practical applications or both. I recommend this book highly to anyone who has either a desire or a need to learn.

Prof. Dr. Dr. h.c. mult.

Founder of Synergetics

Hermann Haken

序一(中译文)

随着人类科学知识的日益深化和扩展,人们认识到这样一个基本事实:由于来自系统内部和外部的扰动以及人类认知技术的局限,我们所获取的信息通常具有某种不确定性。科学技术的进步使我们对各种不确定性的认识逐步深化。20世纪后半叶,一批优秀学者致力于新理论的创立和发展,多种关于不确定性系统与信息的理论和方法相继出现。

在最近由 Springer-Verlag 出版公司推出的 *Grey Information: Theory and Practical Applications* 一书中,刘思峰教授和林益教授系统地阐述了灰色系统理论。20世纪80年代,邓聚龙教授创立灰色系统理论并受到众多学者和实际工作者的热情支持和关注。在他们的大力推动下,目前许多国家的学者从事灰色系统理论和应用研究,取得了丰硕成果。国际著名出版商出版英文版灰色系统著作,将会使世界各地更多的科学工作者了解灰色系统理论,加入灰色系统研究行列,开展灰色系统与信息理论创新和应用开拓,从而推动人类社会的进步和发展。

该书主要研究小样本或“贫信息”不确定性系统。与其他不确定性理论不同的是,该书提供了许多处理灰色信息的方法。以简短的创立、发展史为导引,该书向读者全面介绍了灰色系统的基本理论,而且所有重要方法都以作者自己参与完成的实际项目为支撑。

该书中的许多方法和技术为作者首次提出,主要针对如何基于我们所能获取的有限信息实现对系统的正确描述和有效控制。正因为具有灰色系统与信息理论的建立和实际应用并重的特点,该书可供对理论探索或实际应用有兴趣的读者参

阅。我向有志于灰色系统理论研究和应用的读者强力推荐这本书。

协同学创始人 H. 哈肯

2007年7月26日

注:本文是哈肯教授为本书英文版写的书评,征得本人同意,作为第四版序。

序二

20 世纪 70 年代末期,沐浴着改革开放的春风,我国的系统科学与系统工程研究热潮蓬勃兴起。在钱学森教授的领导和指引下,我国系统科学与系统工程研究在理论和实践上都取得了辉煌成就,也为系统科学新学科的产生和发展提供了得天独厚的土壤和条件。正是在社会、经济与科学技术迅猛发展的大背景下,灰色系统理论在中国诞生并迅速成长。

刘思峰教授和他领导的研究团队长期致力于灰色系统理论研究,多有建树。他们取得的许多成果被国内外学者大量引用,产生了广泛影响。自 20 世纪 90 年代以来,灰色系统理论的普及推广和国际合作与交流成为团队的重要工作内容,赢得 IEEE, WOSC, IIGSS 和中国高等科学技术中心、中国优选法统筹法与经济数学研究会等国际国内重要学术组织的大力支持。南京航空航天大学灰色系统研究中心先后组织并主持召开了八次全国性灰色系统学术会议和十多次重要国际会议的灰色系统专题会议,并相继成立了中国(双法)灰色系统委员会和全球性的学术组织 IEEE 灰色系统委员会。2007 年 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议的成功召开,标志着灰色系统理论正式登上国际学术舞台。呼应灰色系统理论普及推广的新要求,作为普及版的《灰色系统理论及其应用》(第四版)即将问世。该书具有以下特点:

(1) 注重通俗性、可读性。该书语言流畅,着重讲解灰色系统基本方法,尽量减少繁琐的数学推导,在理论阐述上力求简明扼要、深入浅出、通俗易懂,运用大量的实例说明常用灰色系统方法和模型技术,突出灰色系统思想方法的实际应用。

(2) 更为科学、严谨。注重数学基础的构筑、公理系统的建立和数学推证的严

谨、精炼、准确,以更符合教科书的要求。该书编写人员对灰色系统的理论框架、数学基础和整个模型体系进行了长期、系统的研究,20多年来已逐渐形成一套新颖、独特的理论体系。此前推出的5种中英文版本被国内外高校广泛采用说明这一体系结构已为同行学者所接受。

(3) 创新性突出。该书吸收了作者在研究过程中提出的序列算子、缓冲算子公理系统、灰数与其信息含量测度、定权聚类评估和基于三角白化权函数的灰评估新方法、LPGP 漂移及定位求解、GM(1,1)模型的适用范围、灰色绝对关联度、灰色相对关联度、灰色综合关联度、灰色经济计量学模型(G-E)、灰色生产函数模型(G-C-D)、灰色投入产出模型(G-I-O)、灰色马尔可夫模型(G-M)等新的思想方法和模型技术,以及国内外学者的相关研究成果。

(4) 实用性强。该书所提供的方法和模型具有实用性强的特点,已在实践中被大量采用。《中国软科学——中国科学技术蓝皮书[第8号]》曾对此充分肯定。所附的计算机软件更是便于学生实验、实习,并运用所学方法解决实际问题。

(5) 已在国内外产生广泛影响。该书第一版1991年由河南大学出版社出版;1999年科学出版社推出第二版,2004年推出第三版,在同行中引起较大反响,2008年第八次印刷。该书英文版1998年由美国 IIGSS 学术出版社出版,是第一本系统介绍灰色系统理论的英文著作,2002年获系统与控制世界组织奖。另一本英文版于2006年1月由 Springer-Verlag 出版公司推出,在西方国家产生了广泛影响。

获悉这本普及版被评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,我由衷地感到高兴,科学普及的意义与创新同样重要。在此,特向读者推荐这本集科学性、创新性、通俗性、可读性、实用性于一体的灰色系统理论普及版,深信这本书的出版将会大大促进这门新学科的普及和发展。

中国工程院院士

王众托

2008年2月16日

前 言

本书(第四版)是江苏省教学改革项目“管理定量方法精品课程群教学改革探索与实践”的重点子项目之一,其所依托的南京航空航天大学“灰色系统理论”课程在2005年被评为江苏省精品课程,2008年被评为国家级精品课程。本书第一版、第二版、第三版均先后获奖。其中,第一版1991年由河南大学出版社出版,1998年获河南省科技进步奖(著作类)二等奖;第二版1999年由科学出版社出版,2001年获中国高校科学技术奖(著作类)二等奖;第三版2003年获中国科学院科学出版基金资助,2004年由科学出版社出版,2005年获江苏省哲学社会科学优秀成果奖(著作类)一等奖,是2004、2005年度全省管理科学领域唯一的一项一等奖。两种英文版分别于1998年和2006年由美国 IIGSS 学术出版社和世界著名出版商德国 Springer-Verlag 出版公司出版,产生了一定的国际影响。

第四版是应广大读者要求,在此前各版本基础上针对教师教学和学生需要编写的普及版。根据近年来读者反馈的意见和建议,精简内容,压缩篇幅;着重讲解灰色系统基本方法,尽量减少繁琐的数学推导;在理论阐述上力求简明扼要、深入浅出、通俗易懂;运用大量的实例说明常用灰色系统方法和模型技术,突出灰色系统思想方法的实际应用;同时注重数学基础的构筑、公理系统的建立和数学推证的严谨、精炼、准确,以更符合教科书的要求;增加练习题和课程实验等新内容,以更适合教学需要;注意吸收课题组及国内外同行的最新研究成果,力求用较少的篇幅较为系统地向读者展示灰色系统理论这一新学科的概貌及其前沿发展动态。

本书由刘思峰提出总体写作方案并组织撰稿。第1~3章由刘思峰执笔;第4~6章由谢乃明执笔;第7章由党耀国执笔;第8章由方志耕执笔;第9章由米传

民执笔;所附的计算机软件由刘斌编写。全书由刘思峰审定。

灰色系统理论创始人邓聚龙教授、协同学创始人 H. 哈肯教授、系统与控制世界组织主席 R. 瓦利教授、国际系统科学研究联合会主席顾基发教授、中国科学院院士陈达教授、中国工程院院士王众托教授、已故的原中国科学院系统科学研究所许国志院士都曾在百忙之中为本书各版作序,许多领导、专家和灰色系统研究同仁对我们的工作鼎力支持,科学出版社有关同志更是给予通力合作,在此,作者一并表示衷心感谢!

限于作者水平,书中的缺点和疏漏在所难免,殷切期望有关专家和广大读者批评指正。

作者

2008年6月



目 录

序一
序一(中译文)
序二
前言

第1章

灰色系统的概念与基本原理	1
1.1 灰色系统理论的产生与发展动态	1
1.2 灰色系统的概念与基本原理	6
1.3 灰数及其运算	9
1.4 灰数白化与灰度	17
1.5 灰数灰度的一种公理化定义	20
复习思考题	23

第2章

序列算子与灰色序列生成	25
2.1 引言	25
2.2 冲击扰动系统与序列算子	26

2.3	均值生成算子	34
2.4	光滑比与级比	36
2.5	累加生成算子与累减生成算子	37
2.6	累加生成的灰指数律	39
	复习思考题	41

第3章

	灰色关联分析	44
3.1	灰色关联因素和关联算子集	45
3.2	灰色关联公理与灰色关联度	48
3.3	广义灰色关联度	52
3.4	关联序	64
3.5	优势分析	65
	复习思考题	71

第4章

	灰色聚类评估	74
4.1	灰色关联聚类	74
4.2	灰色变权聚类	77
4.3	灰色定权聚类	80
4.4	基于三角白化权函数的灰色评估	83
	复习思考题	93

第5章

	灰色系统模型	95
5.1	引言(五步建模思想)	95
5.2	GM(1,1)模型	96
5.3	残差GM(1,1)模型	100
5.4	GM(1,1)模型群	104
5.5	GM(1,1)模型的适用范围	108
5.6	GM(1, N)和GM(0, N)模型	112

5.7	Verhulst 模型	116
5.8	离散灰色模型	118
	复习思考题	122
第 6 章		
	灰色系统预测	124
6.1	引言	124
6.2	数列预测	126
6.3	区间预测	128
6.4	灰色灾变预测	131
6.5	波形预测	133
	复习思考题	138
第 7 章		
	灰色组合模型	141
7.1	灰色经济计量学模型	142
7.2	灰色生产函数模型	149
7.3	灰色-周期外延组合模型	151
7.4	灰色人工神经网络模型	155
7.5	显性灰色组合模型的基本建模方法	157
7.6	灰色线性回归组合模型	159
7.7	灰色马尔可夫模型	162
	复习思考题	165
第 8 章		
	灰色决策	168
8.1	灰色决策基本概念	168
8.2	灰靶决策	170
8.3	单目标化局势决策	175
8.4	灰色层次决策	178
	复习思考题	183

第9章	
	课程实验 185
9.1	灰色建模系统(IV版)软件安装与使用 185
9.2	序列算子与灰色序列生成实验 188
9.3	灰色关联分析实验 191
9.4	灰色聚类评估实验 194
9.5	灰色系统建模与预测实验 197
9.6	灰色决策实验 200
	参考文献 203
	名词术语中英文对照 221



灰色系统的概念与基本原理

■ 1.1 灰色系统理论的产生与发展动态

1.1.1 灰色系统理论产生的科学背景

现代科学技术在高度分化的基础上出现了高度综合的大趋势,导致了具有方法论意义的系统科学学科群的涌现。系统科学揭示了事物之间更为深刻、更具本质性的内在联系,大大促进了科学技术的整体化进程;许多科学领域中长期难以解决的复杂问题随着系统科学新学科的出现迎刃而解;人们对自然界和客观事物演化规律的认识也由于系统科学新学科的出现而逐步深化。20世纪40年代末诞生的系统论、信息论、控制论,60年代末70年代初产生的耗散结构理论、协同学、突变论、分形理论以及70年代中后期相继出现的超循环理论、动力系统理论、泛系理论等都是具有横向性、交叉性的系统科学新学科。

在对系统的研究过程中,由于系统内外扰动的存在和认识水平的局限,人们所得到的信息往往带有某种不确定性。随着科学技术的发展和人类社会的进步,人们对各类系统不确定性的认识逐步深化,对不确定性系统的研究也日益深入。20世纪后半叶,在系统科学和系统工程领域,各种不确定性系统理论和方法不断涌现。例如,扎德(L. A. Zadeh)教授于60年代创立的模糊数学,邓聚龙教授于80年代创立的灰色系统理论,帕夫拉克(Z. Pawlak)教授于80年代创立的粗糙集理论(rough sets theory)和王光远教授于90年代创立的未确知数学等,都是不确定

性系统研究的重要成果。这些成果从不同角度、不同侧面论述了描述和处理各类不确定性信息的理论和方法。

1982年,中国学者邓聚龙教授创立的灰色系统理论,是一种研究少数据、贫信息不确定性问题的新方法。该理论以“部分信息已知,部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象,主要通过“部分”已知信息的生成、开发,提取有价值的信息,实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控。现实世界中普遍存在的“小样本”、“贫信息”不确定性系统,为灰色系统理论提供了十分丰富的研究资源。

1.1.2 灰色系统理论的产生与发展动态

1982年,北荷兰出版公司出版的《系统与控制通讯》(*Systems & Control Letters*)杂志刊载了中国学者邓聚龙教授的第一篇灰色系统论文“灰色系统的控制问题”(The Control Problems of Grey Systems);同年,《华中工学院学报》刊载了邓聚龙教授的第一篇中文灰色系统论文“灰色控制系统”。这两篇开创性论文的公开发表,标志着灰色系统理论这一新兴横断学科的问世。这一新理论的诞生,受到国内外学术界和广大实际工作者的积极关注,不少著名学者和专家给予了充分肯定和大力支持,许多中青年学者纷纷加入灰色系统理论研究行列,以极大的热情开展理论探索及在不同领域中的应用研究工作。尤其是它在众多科学领域中的成功应用,赢得了国际学术界的肯定和关注。目前,英国、美国、德国、日本、澳大利亚、加拿大、奥地利、俄罗斯、中国台湾、中国香港、联合国等国家、地区及国际组织有许多知名学者从事灰色系统的研究和应用。1989年在英国创办的英文版国际学术刊物《灰色系统学报》(*The Journal of Grey System*)已成为《英国科学文摘》(SA)、《美国数学评论》(MR)等重要国际文摘机构的核心期刊。全世界有数千种学术期刊接受、刊登灰色系统论文,美国计算机学会会刊、中国台湾《模糊数学通讯》、系统与控制国际杂志 *Kybernetes*(SCI 源期刊) 出版了灰色系统专辑。

国内外许多著名大学,如华中科技大学、中国人民大学、清华大学、浙江大学、山东大学、南京航空航天大学、美国马里兰大学、日本丰桥大学、神奈川大学、维也纳经济大学、法国宇航中心、中国台湾中央大学、成功大学、大同工学院开设了灰色系统理论课程。中国的华中科技大学、南京航空航天大学、武汉理工大学、福州大学和中国台湾的多所大学招收、培养灰色系统专业方向的博士研究生,世界各国高等学校计有上万名硕士、博士研究生运用灰色系统的思想方法开展科学研究、撰写学位论文。

国内外许多出版机构,如科学出版社、国防工业出版社、华中科技大学出版社、江苏科学技术出版社、山东人民出版社、科学技术文献出版社、台湾全华科技图书出版社、台湾高立图书有限公司、日本理工出版社、美国 IIGSS 学术出版社、德国

Springer-Verlag 出版公司等,出版灰色系统学术著作 100 余种。一批新兴边缘学科,如灰色水文学、灰色地质学、灰色育种学、区域经济灰色系统分析、灰色哲学等应运而生。国家及各省、市科学基金积极资助灰色系统研究,每年都有一大批灰色系统理论或应用研究项目获得各类基金资助。据统计,全国各地有 200 多项灰色系统成果获得国家或省部级奖励;2002 年,我国灰色系统学者获系统与控制世界组织奖(著作奖)。

据不完全统计,SCI, EI, ISTP, SA, MR, MA 等国际权威性检索机构收录我国学者的灰色系统论著 8000 多次;据中国科学引文数据库(CSCD)发布的信息(《中国科学时报》,1997 年 11 月 26 日),华中科技大学邓聚龙教授的灰色系统理论被引用次数连续多年居全国第一。

中华人民共和国科学技术部(科技部)编撰出版的《中国科学技术蓝皮书(第 8 号)》把灰色系统理论作为中国学者创立的软科学新方法加以肯定。

2006 年,灰色系统理论及应用学术会议受到中国高等科学技术中心(李政道先生任中心主任,周光召院士、路甬祥院士任副主任)资助在北京成功召开。2008 年,第 16 届全国灰色系统学术会议再次受到中国高等科学技术中心资助。

许多重要国际会议,如不确定性系统建模国际会议、系统预测控制国际会议、国际一般系统研究会年会、系统与控制世界组织年会、IEEE 系统、人与控制国际会议、计算机与工业工程国际会议等把灰色系统理论列为讨论专题。例如,2002 年 3 月在美国匹兹堡召开的系统与控制世界组织(WOSC)12 届年会和国际一般系统研究会(IIGSS)4 届年会联合大会共为灰色系统理论安排了 6 场专题会议;2003 年 8 月在爱尔兰利默瑞克召开的第 32 届计算机与工业工程国际会议,为灰色系统理论安排了 4 场专题会议;2004 年 10 月在荷兰海牙召开的 IEEE 系统、人与控制国际会议,2005 年 3 月在美国亚利桑那召开的 IEEE 网络、感知、控制国际会议,2005 年 7 月在斯洛文尼亚马里波尔系统与控制世界组织(WOSC)第 13 届年会,2005 年 10 月在美国夏威夷召开的 IEEE 系统、人与控制国际会议,2006 年 10 月在中国台湾召开的 IEEE 系统、人与控制国际会议,2007 年 10 月在加拿大蒙特利尔召开的 IEEE 系统、人与控制国际会议以及于 2008 年 9 月在波兰弗罗茨瓦夫召开的系统与控制世界组织(WOSC)第 14 届年会,2008 年 10 月在新加坡召开的 IEEE 系统、人与控制国际会议等都安排了灰色系统专题会议。灰色系统理论成为许多重要国际会议关注、讨论的热点,对于世界系统科学界同行进一步了解灰色系统理论无疑会起到积极作用。

2007 年 11 月 18~20 日,首届 IEEE 灰色系统与智能服务国际会议在南京隆重召开,出席这次会议的有来自世界及全国各地的学者近 300 人。这次会议经 IEEE 总部批准并主办,由中国国家自然科学基金委员会、南京航空航天大学、中国(双法)灰色系统专业委员会协办,并由南京航空航天大学经济与管理学院和灰

色系统研究所具体承办。中国优选法统筹法与经济数学研究会副理事长兼灰色系统专业委员会主任、南京航空航天大学经济与管理学院院长兼灰色系统研究所所长刘思峰教授担任本届大会主席。本次会议共收到来自中国、美国、英国、日本、南非、俄罗斯、土耳其、马来西亚、伊朗、中国台湾、中国香港等 17 个国家和地区学者的投稿 1019 篇,根据大会预定规模和专家审稿意见,最后决定录用论文 332 篇,其中,192 篇作为专题报告论文,140 篇作为张贴展示交流论文。

大会组织委员会主席、南京航空航天大学经济与管理学院副院长张卓教授主持了开幕式。灰色系统理论创始人邓聚龙教授、南京航空航天大学校长王福平教授、中国优选法统筹法与经济数学研究会理事长徐伟宣教授、国家自然科学基金委员会管理科学部刘作仪处长出席大会开幕式并致辞。刘思峰教授代表国际程序委员会和组委会致欢迎辞。协同学创始人 H. 哈肯教授和系统与控制世界组织主席 R. 瓦利教授发来了贺信。刘思峰教授和国际程序委员会主席、美国宾夕法尼亚州州立 Slippery Rock 大学教授、国际一般系统研究会主席 Jeffrey Forrest 博士,美国工程院院士、IEEE 原执行主席、迈阿密大学教授 James Tien,中国科学院徐伟宣教授,国际服务科学研究会创始主席、美国宾州州立大学终身教授 Robin Qiu,南非 Cape Town 大学教授 R. Guo 和山东大学王子亮教授作了大会报告。

会议就灰色关联理论及其应用、灰色聚类理论及其应用、灰色决策及灰算子、灰色评价理论及其应用、灰色预测理论及其应用、模糊数学、粗糙集理论等不确定性系统理论以及智能服务模型及其应用等领域安排了 32 场专题会议,与会代表围绕相关议题进行了充分的研讨和交流。

根据与会代表的提议,大会国际程序委员会和组织委员会联席会议决定授予邓聚龙教授灰色系统理论创始人奖,授予南京航空航天大学经济与管理学院大会组织突出贡献奖。这次会议共评出大会优秀论文 5 篇,其中,一等奖 1 篇、二等奖 2 篇、三等奖 2 篇,南京航空航天大学灰色系统研究所博士研究生谢乃明荣获一等奖。大会名誉主席、美国工程院院士、IEEE 原执行主席 James Tien 为邓聚龙教授颁发了证书,国际服务科学研究会创始主席 Robin Qiu 为南京航空航天大学经济与管理学院颁发了证书,灰色系统理论创始人邓聚龙教授为论文获奖者颁发了证书。

与会代表普遍认为,本次会议内容丰富,组织有序,大会报告和专题报告水平高,展示了灰色系统理论和服务科学的最新研究进展和应用成果,对于促进国际交流合作,推动我国及世界各国在灰色系统理论和服务科学领域的学术研究具有重大意义。

从下届会议开始,IEEE 灰色系统与智能服务国际会议(IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services)将更名为 IEEE 灰色系统与服务科学国际会议(IEEE International Conference on Grey Systems and Service

Sciences, IEEE GSSS), 每两年举办一次。来自美国、英国、中国台湾、土耳其、南非和日本的学者明确表示希望有机会承办 IEEE GSSS。

2008 年初, IEEE 灰色系统委员会正式成立。依托 IEEE 这样一个全球性的学术平台, 灰色系统理论将迅速走向世界。

1.1.3 几种不确定性方法的比较

概率统计、模糊数学和灰色系统理论是三种最常用的不确定性系统研究方法。其研究对象都具有某种不确定性, 这是三者的共同点。正是研究对象在不确定性上的区别, 派生出三种各具特色的不确定性学科。

模糊数学着重研究“认知不确定”问题, 其研究对象具有“内涵明确, 外延不明确”的特点。例如, “年轻人”就是一个模糊概念。因为每一个人都十分清楚“年轻人”的内涵。但是要让你划定一个确切的范围, 在这个范围之内的是年轻人, 范围之外的都不是年轻人, 则很难办到。因为年轻人这个概念外延不明确。对于这类内涵明确、外延不明确的“认知不确定”问题, 模糊数学主要是凭经验借助于隶属函数进行处理。

概率统计研究的是“随机不确定”现象, 着重于考察“随机不确定”现象的历史统计规律, 考察具有多种可能发生的结果之“随机不确定”现象中每一种结果发生的可能性大小。其出发点是大量样本, 并要求对象服从某种典型分布。

灰色系统理论着重研究概率统计、模糊数学所难以解决的“小样本”、“贫信息”不确定性问题, 并依据信息覆盖, 通过序列算子的作用探索事物运动的现实规律。其特点是“少数据建模”。与模糊数学不同的是, 灰色系统理论着重研究“外延明确, 内涵不明确”的对象。例如, 到 2050 年, 中国要将总人口控制在 15 亿到 16 亿之间, 这“15 亿到 16 亿之间”就是一个灰概念, 其外延是很清楚的, 但如果要进一步问到底是 15 亿到 16 亿之间的哪个具体数值, 则不清楚。

综上所述, 可以把三者之间的区别归纳如表 1-1 所示。

表 1-1 三种不确定性方法的比较

项 目	灰色系统	概率统计	模糊数学
研究对象	贫信息不确定	随机不确定	认知不确定
基础集合	灰色朦胧集	康托尔集	模糊集
方法依据	信息覆盖	映射	映射
途径手段	灰序列算子	频率统计	截集
数据要求	任意分布	典型分布	隶属度可知
侧重	内涵	内涵	外延
目标	现实规律	历史统计规律	认知表达
特色	小样本	大样本	凭经验

1.2 灰色系统的概念与基本原理

1.2.1 灰色系统的基本概念

社会、经济、农业、工业、生态、生物等许多系统,是根据研究对象所属的领域和范围命名的,而灰色系统却是按颜色命名的。在控制论中,人们常用颜色的深浅形容信息的明确程度,如艾什比(Ashby)将内部信息未知的对象称为黑箱(black box)。这种称谓已为人们普遍接受。再如,在政治生活中,人民群众希望了解决策及其形成过程的有关信息,就提出要增加“透明度”。用“黑”表示信息未知,用“白”表示信息完全明确,用“灰”表示部分信息明确、部分信息不明确。相应地,信息完全明确的系统称为白色系统,信息未知的系统称为黑色系统,部分信息明确、部分信息不明确的系统称为灰色系统。

请注意“系统”与“箱”这两个概念的区别。通常地,“箱”侧重于对象外部特征而不重视其内部信息的开发利用,往往通过输入输出关系或因果关系研究对象的功能和特征。“系统”则通过对象、要素、环境三者之间的有机联系和变化规律研究其结构和功能。

灰色系统理论的研究对象是“部分信息已知、部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统,它通过对“部分”已知信息的生成、开发实现对现实世界的确切描述和认识。

在人们的社会、经济活动或科研活动中,经常会遇到信息不完全的情况。例如,在农业生产中,即使是播种面积、种子、化肥、灌溉等信息完全明确,但由于劳动力技术水平、自然环境、气候条件、市场行情等信息不明确,仍难以准确地预计出产量、产值;再如,生物防治系统,虽然害虫与其天敌之间的关系十分明确,但因人们对害虫与饵料、天敌与饵料、某一天敌与别的天敌、某一害虫与别的害虫之间的关联信息了解不够,生物防治往往难以收到预期效果;价格体系的调整或改革,常常因缺乏民众心理承受力的信息,以及某些商品价格变动对其他商品价格影响的确切信息而举步维艰;在证券市场上,即使最高明的系统分析人员亦难以稳操胜券,因为测不准金融政策、利率政策、企业改革、政治风云和国际市场变化及某些板块价格波动对其他板块之影响的确切信息;一般的社会经济系统,由于没有明确的“内”“外”关系,系统本身与系统环境、系统内部与系统外部的边界若明若暗,难以分析输入(投入)对输出(产出)的影响。而同一个经济变量,有的研究者把它视为内生变量,另一些研究者却把它视为外生变量,这是因为缺乏系统结构、系统模型及系统功能信息所致。

综上所述,可以把系统信息不完全的情况分为以下4种:

- (1) 元素(参数)信息不完全;
- (2) 结构信息不完全;
- (3) 边界信息不完全;
- (4) 运行行为信息不完全。

“信息不完全”是“灰”的基本含义。从不同场合、不同角度看,还可以将“灰”的含义加以引申,详见表 1-2。

表 1-2 “灰”概念引申

场合	概念		
	黑	灰	白
从信息上看	未知	不完全	已知
从表象上看	暗	若明若暗	明朗
从过程上看	新	新旧交替	旧
从性质上看	混沌	多种成分	纯
从方法上看	否定	扬弃	肯定
从态度上看	放纵	宽容	严厉
从结果上看	无解	非唯一解	唯一解

1.2.2 灰色系统的基本原理

在灰色系统理论创立和发展过程中,邓聚龙教授提炼了灰色系统所必须满足的几条基本原理。读者不难看出,这些基本原理,具有十分深刻的哲学内涵。

公理 1.2.1(差异信息原理) “差异”是信息,凡信息必有差异。

说“事物 A 不同于事物 B”,即含有事物 A 相对于事物 B 之特殊性的有关信息。客观世界中万事万物之间的“差异”提供了认识世界的基本信息。

信息 I 改变了我们对某一复杂事物的看法或认识,信息 I 与人们对该事物的原认识信息有差异。科学研究中的重大突破为人们提供了认识世界、改造世界的重要信息,这类信息与原来的信息必有差异。信息 I 的信息含量越大,它与原信息的差异就越大。

公理 1.2.2(解的非唯一性原理) 信息不完全、不确定情况下的解是非唯一的。

“解的非唯一性原理”在决策上的体现是灰靶思想。灰靶是目标非唯一与目标可约束的统一。例如,升学填报志愿,一个认定了“非某校不上”的考生,如果考分不具有绝对优势,其愿望就很可能落空。相同条件对于愿意退而求其“次”,多目标、多选择的考生,其升学的机会更多。

“解的非唯一性原理”也是目标可接近、信息可补充、方案可完善、关系可协调、

思维可多向、认识可深化、途径可优化的具体体现。在面对多种可能的解时,能够通过定性分析,补充信息,确定出一个或几个满意解。因此,“非唯一性”的求解途径是定性分析与定量分析相结合的求解途径。

公理 1.2.3(最少信息原理) 灰色系统理论的特点是充分开发利用已占有的“最少信息”。

“最少信息原理”是“少”与“多”的辩证统一,灰色系统理论的特色是研究“小样本”、“贫信息”不确定性问题。其立足点是“有限信息空间”,“最少信息”是灰色系统的基本准则。所能获得的信息“量”是判别“灰”与“非灰”的分水岭,充分开发利用已占有的“最少信息”是灰色系统理论解决问题的基本思路。

公理 1.2.4(认知根据原理) 信息是认知的根据。

认知必须以信息为依据,没有信息,无以认知。以完全、确定的信息为根据,可以获得完全确定的认知,以不完全、不确定的信息为根据,只能得到不完全、不确定的灰认知。

公理 1.2.5(新信息优先原理) 新信息对认知的作用大于老信息。

“新信息优先原理”是灰色系统理论的信息观,赋予新信息较大的权重可以提高灰色建模、灰色预测、灰色分析、灰色评估、灰色决策等的功效。“新陈代谢”模型体现了“新信息优先原理”。新信息的补充为灰元白化提供了科学依据。“新信息优先原理”是信息的时效性的具体体现。

公理 1.2.6(灰性不灭原理) “信息不完全”(灰)是绝对的。

信息不完全、不确定具有普遍性。信息完全是相对的、暂时的。原有的不确定性消失,新的不确定性很快出现。人类对客观世界的认识,通过信息的不断补充而一次又一次地升华。信息无穷尽,认知无穷尽,灰性永不灭。

1.2.3 灰色系统理论的主要内容

灰色系统理论经过 20 年的发展,现已基本建立起一门新兴学科的结构体系。其主要内容包括以灰色哲学为基础的思想体系,以灰色代数系统、灰色方程、灰色矩阵等为基础的理论体系,以灰色序列生成为基础的方法体系,以灰色关联空间为依托的分析体系,以灰色模型(GM)为核心的模型体系,以系统分析、评估、建模、预测、决策、控制、优化为主体的技术体系。

本书作为灰色系统理论的普及版,重点探讨灰数运算与灰代数系统、序列算子、灰色关联分析、灰色聚类评估、灰色系统模型、灰色预测、灰色组合模型、灰色决策等基本内容。

灰数及其运算是灰色系统理论的基础,从学科体系自身的优美、完善出发,这里有许多问题值得进一步深入研究,尤其在灰色代数系统、灰色矩阵、灰色方程、灰函数等方面亟待完善。

灰色序列生成在本书中被统一到序列算子的概念之下,主要包括缓冲算子(弱化缓冲算子、强化算子)、均值生成算子、级比生成算子、累加生成算子和累减生成算子等。

灰色系统分析除灰色关联分析外,还包括灰色聚类和灰色统计评估等方面的内容。

灰色模型按照五步建模思想构建,通过灰色生成或序列算子的作用弱化随机性,挖掘潜在的规律,经过差分方程与微分方程之间的互换,实现了利用离散的数据序列建立连续的动态微分方程模型的新飞跃。

灰色预测是基于GM模型作出的定量预测,按照其功能和特征可分成数列预测、区间预测、灾变预测、季节灾变预测、波形预测和系统预测等几种类型。

灰色组合模型包括灰色经济计量学模型(G-E)、灰色生产函数模型(G-C-D)、灰色马尔可夫模型(G-M)、灰色时序组合模型等。

灰色决策包括灰靶决策、灰色关联决策、灰色统计、聚类决策、灰色局势决策和灰色层次决策等。

1.3 灰数及其运算

1.3.1 灰数的基本概念

灰色系统用灰数、灰色方程、灰色矩阵、灰色函数等来描述,其中,灰数是灰色系统的基本“单元”或“细胞”。

在系统研究中,由于人的认知能力有局限,对反映系统运行行为的信息难以完全认知,所以人们只知道系统元素或参数的取值范围,通常把这种只知道取值范围而不知其确切值的数称为灰数。在应用中,灰数实际上指在某个区间或某个一般的数集内取值的不确定数。通常用记号“ \otimes ”表示灰数。

灰数有以下几类:

1) 仅有下界的灰数

有下界而无上界的灰数记为 $\otimes \in [a, \infty)$,其中, a 为灰数 \otimes 的下确界,它是一个确定的数。称 $[a, \infty)$ 为 \otimes 的信息覆盖或取数域,简称 \otimes 的覆盖或灰域。

一个遥远的天体,其质量便是有下界的灰数,因为天体的质量必大于零,但不可能用一般手段知道其质量的确切值,若用 \otimes 表示天体的质量,便有 $\otimes \in [0, \infty)$ 。

2) 仅有上界的灰数

有上界而无下界的灰数记为 $\otimes \in (-\infty, \bar{a}]$,其中, \bar{a} 是灰数 \otimes 的上确界,是确定的数。

一项投资工程,要有个最高投资限额,一件电器设备要有个承受电压或通过电

流的最高临界值。工程投资,电器设备的电压、电流容许值都是有上界的灰数。

3) 区间灰数

既有下界 \underline{a} 又有上界 \bar{a} 的灰数称为区间灰数,记为 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ 。

海豹的质量为 $60 \sim 85 \text{kg}$,某人的身高为 $1.8 \sim 1.9 \text{m}$,可分别记为

$$\otimes_1 \in [60, 85], \quad \otimes_2 \in [1.8, 1.9]$$

4) 连续灰数与离散灰数

在某一区间内取有限个值或可数个值的灰数称为离散灰数,取值连续地充满某一区间的灰数称为连续灰数。

某人的年龄为 $30 \sim 35$ 岁,此人的年龄可能是 $30, 31, 32, 33, 34, 35$ 这几个数,因此年龄是离散灰数。人的身高、体重等是连续灰数。

5) 黑数与白数

当 $\otimes \in (-\infty, +\infty)$, 即当 \otimes 的上、下界皆为无穷时,称 \otimes 为黑数;当 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ 且 $\underline{a} = \bar{a}$ 时,称 \otimes 为白数。

为讨论方便,将黑数和白数看成特殊的灰数。

6) 本征灰数与非本征灰数

本征灰数是指不能或暂时还不能找到一个白数作为其“代表”的灰数,如一般的事前预测值、宇宙的总能量、准确到秒或微秒的“年龄”等都是本征灰数。

非本征灰数是指凭先验信息或某种手段,可以找到一个白数作为其“代表”的灰数。称此白数为相应灰数的白化值,记为 \otimes ,并用 $\otimes(a)$ 表示以 a 为白化值的灰数。例如,估计某人的托福考试成绩可能在 600 分左右,可将 600 作为该考生托福考试成绩 $\otimes(600)$ 的白化数,记为 $\otimes(600) = 600$ 。

从灰数产生的本质来划分,灰数又可以分为信息型、概念型和层次型 3 类。

1) 信息型灰数

信息型灰数指因暂时缺乏信息而不能肯定其取值的数。例如,预计某地区今年国内生产总值在 100 亿以上, $\otimes \in (100, \infty)$; 估计某储蓄所年底居民储蓄存款余额将达 7000 万 ~ 9000 万元, $\otimes \in [7000, 9000]$; 预计南京地区 10 月份最高气温不超过 36°C , $\otimes \in [0, 36]$ 。这些都是信息型灰数。由于暂时缺乏信息,不能肯定某数的确切取值,而到一定时间后,通过信息补充,灰数可以完全变白,如上述 3 个灰数,一旦预言的时间终了,就会变成完全确定的数。

2) 概念型灰数

概念型灰数也称意愿型灰数,指由人们的某种观念、意愿形成的灰数。例如,某高校承担一项国家重点科技攻关课题,希望科研经费投入不低于 3000 万元,并且越多越好, $\otimes \in [3000, \infty)$; 某工厂废品率为 1% ,希望大幅度降低,当然越小越好, $\otimes \in [0, 0.01]$ 。这些都是概念型灰数。

3) 层次型灰数

层次型灰数指由层次改变形成的灰数。有的数,从系统的高层次,即宏观层次、整体层次或认识的概括层次上看是白的;可到更低的层次上,即到系统的微观层次、分部层次或认识的深化层次则可能是灰的。例如,一个人的身高,以厘米为单位度量是白的,若精确到万分之一微米就成灰的了。有的数,在某个小范围内是白的,在大范围内就成灰的了。例如,叫张三的人,某个学校只有1人,全市大学有4~6人, $\otimes \in [4, 6]$ 已是灰数,若在全国范围内考虑,就更加说不清了。

1.3.2 区间灰数的运算

定义 1.3.1(灰数的运算范式) 设有灰数 $\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$, $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$,用符号 $*$ 表示 \otimes_1 与 \otimes_2 间的运算,若 $\otimes_3 = \otimes_1 * \otimes_2$,则 \otimes_3 亦应为区间灰数,因此应有 $\otimes_3 \in [e, f]$, $e < f$,且对任意的 \otimes_1, \otimes_2 ,有 $\otimes_1 * \otimes_2 \in [e, f]$ 。

法则 1.3.1(加法运算) 设 $\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$, $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$,则称

$$\otimes_1 + \otimes_2 \in [a + c, b + d] \quad (1.3.1)$$

为 \otimes_1 与 \otimes_2 的和。

例 1.3.1 设 $\otimes_1 \in [3, 4]$, $\otimes_2 \in [5, 8]$,则 $\otimes_1 + \otimes_2 \in [8, 12]$ 。

法则 1.3.2(灰数的负元) 设 $\otimes \in [a, b]$, $a < b$,则称

$$-\otimes \in [-b, -a] \quad (1.3.2)$$

为 \otimes 的负元。

例 1.3.2 设 $\otimes \in [3, 4]$,则 $-\otimes \in [-4, -3]$ 。

法则 1.3.3(减法运算) 设 $\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$, $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$,则称

$$\otimes_1 - \otimes_2 = \otimes_1 + (-\otimes_2) \in [a - d, b - c] \quad (1.3.3)$$

为 \otimes_1 与 \otimes_2 的差。

例 1.3.3 设 $\otimes_1 \in [3, 4]$, $\otimes_2 \in [1, 2]$,则

$$\otimes_1 - \otimes_2 \in [3 - 2, 4 - 1] = [1, 3], \quad \otimes_2 - \otimes_1 \in [1 - 4, 2 - 3] = [-3, -1]$$

法则 1.3.4(乘法运算) 设 $\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$, $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$,则称

$$\otimes_1 \cdot \otimes_2 \in [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}] \quad (1.3.4)$$

为 \otimes_1 与 \otimes_2 的积。

例 1.3.4 设 $\otimes_1 \in [3, 4]$, $\otimes_2 \in [5, 10]$,则

$$\otimes_1 \cdot \otimes_2 \in [\min\{15, 30, 20, 40\}, \max\{15, 30, 20, 40\}] = [15, 40]$$

法则 1.3.5(灰数的倒数) 设 $\otimes \in [a, b]$, $a < b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab > 0$,则称

$$\otimes^{-1} \in \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right] \quad (1.3.5)$$

为 \otimes 的倒数。

例 1.3.5 设 $\otimes \in [2, 4]$, 则 $\otimes^{-1} \in [0.25, 0.5]$ 。

法则 1.3.6(除法运算) 设 $\otimes_1 \in [a, b]$, $a < b$, $\otimes_2 \in [c, d]$, $c < d$ 且 $c \neq 0, d \neq 0, cd > 0$, 则称

$$\otimes_1 / \otimes_2 = \otimes_1 \times \otimes_2^{-1} \in \left[\min \left\{ \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d} \right\}, \max \left\{ \frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d} \right\} \right] \quad (1.3.6)$$

为 \otimes_1 与 \otimes_2 的商。

例 1.3.6 $\otimes_1 \in [3, 4]$, $\otimes_2 \in [5, 10]$, 则

$$\otimes_1 / \otimes_2 = \left[\min \left\{ \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{4}{10} \right\}, \max \left\{ \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{4}{10} \right\} \right] = [0.3, 0.8]$$

法则 1.3.7(数乘运算) 设 $\otimes \in [a, b]$, $a < b$, k 为正实数, 则称

$$k \cdot \otimes \in [ka, kb] \quad (1.3.7)$$

为数 k 与灰数 \otimes 的积, 亦称数乘运算。

例 1.3.7 设 $\otimes \in [2, 4]$, $k=5$, 则 $5 \times \otimes \in [10, 20]$ 。

法则 1.3.8(乘方运算) 设 $\otimes \in [a, b]$, $a < b$, k 为正实数, 则称

$$\otimes^k \in [a^k, b^k] \quad (1.3.8)$$

为灰数 \otimes 的 k 次方幂, 亦称乘方运算。

例 1.3.8 设 $\otimes \in [2, 4]$, $k=5$, 则 $\otimes^5 \in [32, 1024]$ 。

1.3.3 基于“核”和灰度的灰数运算

长期以来, 灰色系统理论中关于灰数运算与灰代数系统的研究一直备受学者们的重视, 但迄今尚未取得满意的结果。20世纪80年代, 作者曾提出灰数均值白化数的概念, 当时亦曾试图以此为基础构建新的灰数运算体系, 但由于难以处理棘手的扰动灰元而无果。本节给出灰数“核”的定义, 基于“核”和灰数灰度建立灰数运算公理和灰代数系统, 并对运算的性质进行研究。在这里, 灰数运算被化为实数运算, 灰数运算与灰代数系统构建的难题在一定程度上得到了解决。

定义 1.3.2 设灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$, 在缺乏灰数 \otimes 取值之分布信息的情况下,

(1) 若 \otimes 为连续灰数, 则称 $\hat{\otimes} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \bar{a})$ 为灰数 \otimes 的核;

(2) 若 \otimes 为离散灰数, $a_i \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为灰数 \otimes 的所有可能取值, 则称 $\hat{\otimes} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ 为灰数 \otimes 的核。(注: 若某 $a_i(\otimes)$ 为灰元, $a_i(\otimes) \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$,

$a_k < \bar{a}_k$, 则取 $a_k = \hat{a}_k$.)

定义 1.3.3 设灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$ 为具有取值分布信息的随机灰数, 则称 $\hat{\otimes} = E(\otimes)$ 为灰数 \otimes 的核。

灰数 \otimes 的核 $\hat{\otimes}$ 作为灰数 \otimes 的代表, 在灰数运算转化为实数运算的过程中具有不可替代的作用。事实上, 灰数 \otimes 的核 $\hat{\otimes}$ 作为实数, 可以完全按照实数的运算规则进行加、减、乘、除、乘方、开方等一系列运算, 而且将核的运算结果作为灰数运算结果的核是顺理成章的。

定义 1.3.4 设 $\hat{\otimes}$ 灰数 \otimes 的核, g° 为灰数 \otimes 的灰度, 称 $\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$ 为灰数的简化形式。

按照文献(刘思峰等, 2004)中给出的灰数灰度定义, 灰数的简化形式 $\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$ 包含了灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$ 取值的全部信息。

命题 1.3.1 对于区间灰数而言, 其简化形式 $\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$ 与灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$ 之间具有一一对应关系。

事实上, 给定灰数 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$, 按照核和灰度定义可以分别计算出 $\hat{\otimes}$ 和 g° , 即有 $\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$; 反过来, 当 $\hat{\otimes}_{(g^\circ)}$ 已知时, 可以根据 $\hat{\otimes}$ 确定灰数 \otimes 的位置, 同时根据灰度定义 g° 计算出灰数 \otimes 的测度, 进而得到灰数 \otimes 取值的上限 \bar{a} 和下限 \underline{a} , 从而有 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$ 。

例 1.3.9 已知论域 $\Omega \in [-2, 20]$ 上的区间灰数 $\otimes_1 = [-2, -1]$, $\otimes_2 = [8, 18]$, $\otimes_3 = [-2, 18]$, 若以灰区间长度作为灰数的测度, 试分别求出这 3 个灰数的简化形式。

解 根据已知条件, 可求得论域 Ω , \otimes_1 , \otimes_2 , \otimes_3 的测度分别为 $\mu(\Omega) = 20 - (-2) = 22$, $\mu(\otimes_1) = 1$, $\mu(\otimes_2) = 10$, $\mu(\otimes_3) = 20$; 这 3 个灰数的核与灰度分别为 $\hat{\otimes}_1 = -1.5$, $\hat{\otimes}_2 = 13$, $\hat{\otimes}_3 = 8$; $g_1^\circ(\otimes_1) = 0.045$, $g_2^\circ(\otimes_2) = 0.45$, $g_3^\circ(\otimes_3) = 0.91$, 它们的简化形式分别为

$$\otimes_1 = -1.5_{(0.045)}, \quad \otimes_2 = 13_{(0.45)}, \quad \otimes_3 = 8_{(0.91)}$$

定义 1.3.5 设 Ω 为灰数 \otimes 的论域, 当 $\mu(\Omega) = 1$ 时, 对应的灰数称为标准灰数; 标准灰数的简化形式称为灰数的标准形式。

命题 1.3.2 设 \otimes 为标准灰数, 则 $g^\circ(\otimes) = \mu(\otimes)$ 。

对于标准灰数而言, 其灰度与灰数的测度完全一致。如果进一步将论域 Ω 限定为区间 $[0, 1]$, 则 $\mu(\otimes)$ 就是 $[0, 1]$ 上的小区间的长度。这样, 灰数的标准形式还原到一般形式十分方便。

公理 1.3.1(灰度不减公理) 两个灰度不同的灰数进行加、减、乘、除运算时, 运算结果的灰度不小于灰度较大的灰数的灰度。