

最优控制理论与系统

(第二版)

胡寿松 王执铨 胡维礼 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书从理论及工程应用的角度,系统地介绍了最优控制理论及最优控制系统的各个基本方面。全书共分10章。第2~4章介绍变分法、极小值原理和动态规划的基本内容、方法及应用;第5、6章对状态调节器、输出调节器以及跟踪系统进行了较为深入的讨论;第7~9章介绍了最优控制理论中较为新颖的分支——鲁棒最优控制、奇异最优控制以及随机最优控制;第10章介绍各种典型的实用最优控制系统。

本书深入浅出,结构严谨,实例丰富,便于自学。既可作为高等院校自动控制专业研究生教材和自动化类专业高年级本科生教材,亦可供从事自动控制、信息处理、系统工程及计算机应用等专业的科研人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论与系统/胡寿松,王执铨,胡维礼编著.—2版.—北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-016035-5

I. 最… II. ①胡… ②王… ③胡… III. ①最佳控制-自动控制理论 ②最佳控制-控制系统 IV. TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第085553号

责任编辑:刘俊来 资丽芳 潘继敏 / 责任校对:张 琪
责任印制:黄晓靖 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1994年12月第一版

东南大学出版社

2005年9月第二版 开本:787×1092 1/16

2006年2月第二次印刷 印张:23 1/4

印数:3 001—6 000 字数:541 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环纬〉)

前 言

20世纪60年代初,由于空间技术的迅猛发展和数字计算机的广泛应用,动态系统的优化理论得到迅速发展,形成了最优控制理论这一重要的学科分支。时至今日,动态系统优化理论不仅有了许多成功的应用,而且远远超出了自动控制的传统界限,在系统工程、经济管理与决策、人口控制等许多领域都有越来越广泛的应用,取得了显著的成效。同时,最优控制理论自身在不断完善和充实的过程中又产生了许多需要解决的理论和实践问题。也许,正是因为这些原因,最优控制目前仍然是一个相当活跃的学科领域。

本书试图从理论及工程应用的角度,系统地介绍最优控制理论的各个基本方面。全书共分10章。第2~4章系统介绍变分法、极小值原理和动态规划的基本内容、方法及应用;第5、6章对状态调节器、输出调节器以及跟踪系统进行了较为深入的讨论;第7~9章介绍了最优控制理论中较为新颖的分支——鲁棒最优控制、奇异最优控制以及随机最优控制;第10章集中介绍各种典型的实用最优控制系统。

在编著过程中,我们在注重理论的严谨性,保持内容的先进性、完整性和系统性的同时,力求深入浅出,便于读者自学。书中编入了相当数量的例题、习题和应用实例,以利于深入理解和应用最优控制理论。

本书由胡寿松教授、王执铨教授和胡维礼教授编著。在编著过程中,得到了史维教授、刘士中教授、肖迪博士、葛龙博士及马苏女士的协助。对此,我们表示衷心的感谢。

本书是编著者在多年教学和科研的基础上,经充实和提高而写成的,其中大部分内容都已为控制专业研究生、高年级本科生以及有关工程技术人员多次讲授过,但由于编著者水平所限,书中疏漏和不妥之处在所难免,殷切希望广大读者不吝指正。

编著者

2005年5月

目 录

前言

第 1 章 导论	1
1.1 引言	1
1.2 最优控制问题	2
1.3 性能指标类型	6
第 2 章 最优控制中的变分法	8
2.1 泛函与变分	8
2.2 欧拉方程	15
2.3 横截条件	22
2.4 用变分法解最优控制问题	28
2.5 角点条件与内点约束	43
习题	46
第 3 章 极小值原理及其应用	50
3.1 连续系统的极小值原理	50
3.2 离散系统的极小值原理	77
3.3 时间最优控制	87
3.4 燃料最优控制	108
3.5 时间-燃料最优控制	116
习题	122
第 4 章 动态规划	130
4.1 多级决策问题	130
4.2 离散动态规划	138
4.3 连续动态规划	145
4.4 动态规划与极小值原理和变分法	152
习题	157
第 5 章 线性最优状态调节器	162
5.1 线性二次型问题	162
5.2 状态调节器	165
5.3 具有给定稳定度的状态调节器	181
5.4 逆最优调节器	184
5.5 离散状态调节器	189
习题	193

第 6 章 线性最优输出调节器与跟踪系统	197
6.1 输出调节器	197
6.2 离散输出调节器	207
6.3 跟踪系统	212
习题	222
第 7 章 鲁棒最优控制	225
7.1 鲁棒控制问题	225
7.2 鲁棒控制的基本概念与数学基础	228
7.3 H^∞ 最优控制理论	231
7.4 H^∞ 最优控制的直接状态空间法	254
习题	262
第 8 章 奇异最优控制	263
8.1 最优控制问题的奇异解	263
8.2 线性系统的奇异最优控制	269
8.3 非线性系统的奇异最优控制	281
8.4 奇异最优调节器	286
8.5 奇异最优控制的应用	292
习题	295
第 9 章 随机最优控制	297
9.1 随机噪声作用下的状态响应	297
9.2 随机状态反馈调节器	302
9.3 随机输出反馈调节器	310
9.4 离散系统的随机最优控制	318
习题	327
第 10 章 实用最优控制系统	330
10.1 高速高精度数字伺服系统的时间次优控制	330
10.2 III 型数字伺服系统的 ITAE 性能指标最优控制	340
10.3 交直流混合电力系统直流制动的时-能量双指标最优控制	345
10.4 二级倒立摆的二次型最优控制	349
10.5 电动公交车直流牵引电动机驱动系统最优控制	356
参考文献	364

第 1 章 导 论

1.1 引 言

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分,其形成与发展奠定了整个现代控制理论的基础。早在 20 世纪 50 年代初,就开始了对最短时间控制问题的研究;随后,由于空间技术的发展,越来越多的学者和工程技术人员投身于这一领域的研究和开发,逐步形成了一套较为完整的最优控制理论体系。

最优控制理论研究的主要问题是:根据已建立的被控对象的时域数学模型或频域数学模型,选择一个容许的控制律,使得被控对象按预定要求运行,并使给定的某一性能指标达到最优值。从数学观点来看,最优控制理论研究的问题是求解一类带有约束条件的泛函极值问题,属于变分学的理论范畴。然而,经典变分理论只能解决容许控制属于开集的一类最优控制问题,而工程实践中所遇到的多是容许控制属于闭集的一类最优控制问题。对于这一类问题,经典变分理论变得无能为力,因而为了适应工程实践的需要,20 世纪 50 年代中期出现了现代变分理论。在现代变分理论中,最常用的两种方法是动态规划和极小值原理。

动态规划是美国学者 R. E. 贝尔曼于 1953~ 1957 年为了优化多级决策问题的算法而逐步创立的。贝尔曼依据最优性原理,发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论,解决了控制有闭集约束的变分问题。极小值原理是前苏联科学院院士 Л. С. 庞特里亚金于 1956 年至 1958 年间逐步创立的。庞特里亚金在力学哈密顿原理启发下,进行推测,并证明了极小值原理的结论,同样解决了控制有闭集约束的变分问题。动态规划与极小值原理是现代变分理论中的两种卓有成效的方法,推动了最优控制理论的发展。

近年来,由于数字计算机的飞速发展和完善,逐步形成了最优控制理论中的数值计算方法。当性能指标比较复杂,或者不能用变量显函数表示时,可以采用直接搜索法,经过若干次迭代,搜索到最优点。常用的数值算法有邻近极值法、梯度法、共轭梯度法及单纯形法等。同时,由于可以把计算机作为控制系统的一个组成部分,以实现在线控制,从而使最优控制理论的工程实现成为现实。因此,最优控制理论提出的求解方法,既是一种数学方法,又是一种计算机算法。

时至今日,最优控制理论的研究,无论在深度和广度上,都有了很大的发展,并日益与其他控制理论相互渗透,形成了更为实用的学科分支。如鲁棒最优控制、随机最优控制、分布参数系统的最优控制及大系统的次优控制等。可以说,最优控制理论目前仍然是正在发展中的、极其活跃的学科领域之一。

1.2 最优控制问题

1.2.1 最优控制实例

例 1-1 最大面积问题。

设一渔轮进行围网作业,如图 1-1 所示。已知渔轮相对海流的速度为 v ,其大小不变。作业区海流速度 w 的大小和方向一定。求渔轮方位角 $\theta(t)$ 的最优变化律,使渔轮在给定时间 t_f 内所围的海域面积 A 最大。

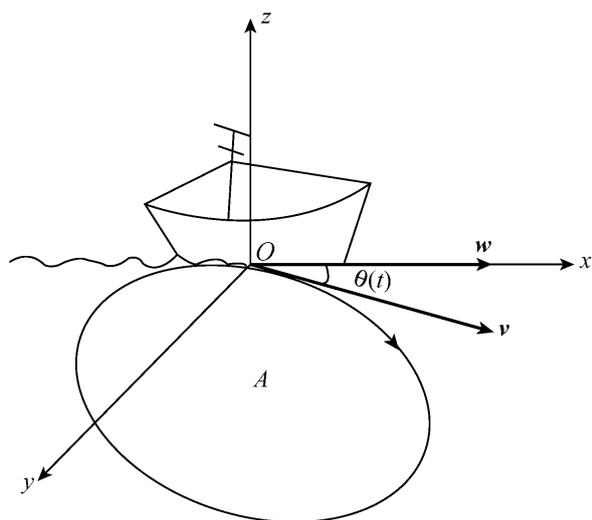


图 1-1 渔轮围网作业图

选海流速度 w 的方向为 x 轴,垂直方向为 y 轴,则渔轮的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v \cos \theta(t) + w \\ \dot{y}(t) &= v \sin \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

初始条件与末端条件为

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x(t_f) = x_0 \\ y(0) &= y(t_f) = y_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

要求确定最优控制律 $\theta^*(t)$,使下列代表面积的性能指标为最大

$$\begin{aligned} J &= \oint y(t) dx(t) = \int_0^{t_f} y(t) \dot{x}(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} y(t) [v \cos \theta(t) + w] dt \end{aligned} \quad (1-3)$$

例 1-2 最小燃耗问题。

为了使宇宙飞船登月舱在月球表面实现软着陆,即登月舱到达月球表面时的速度为零,要寻求登月舱发动机推力的最优变化律,使燃料消耗最少,以便在完成登月考察任务后,登月舱有足够燃料离开月球与母船会合,从而返回地球。

设飞船登月舱质量为 $m(t)$,高度为 $h(t)$,垂直速度为 $v(t)$,发动机推力为 $u(t)$,月球重力加速度为常数 g ,飞船登月舱不含燃料时的质量为 M ,登月舱所载燃料质量为 F 。已知登月舱登月时的初始高度为 h_0 ,初始垂直速度为 v_0 。登月舱在月球上实现软着陆的示意图如图 1-2 所示。由图可列出登月舱的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{u(t)}{m(t)} - g \\ \dot{m}(t) &= -ku(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中 k 为常数。

初始条件为

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= h_0 \\ v(0) &= v_0 \\ m(0) &= M + F \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

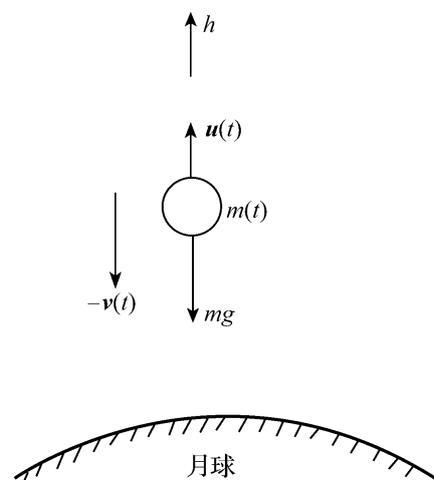


图 1-2 登月舱软着陆示意图

末端条件为

$$\left. \begin{aligned} h(t_f) &= 0 \\ v(t_f) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中 t_f 为登月舱发动机工作的末端时刻。

控制约束条件

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (1-7)$$

式中 u_{\max} 为登月舱发动机最大推力。

性能指标取为表征燃料消耗量的登月舱着陆时的质量,即

$$J = m(t_f) \quad (1-8)$$

最优控制任务是:在满足控制约束条件下,寻求发动机推力最优变化律 $u^*(t)$,使登月舱由已知的初态(初始状态)转移到要求的末态(末端状态),并使式(1-8)为最大,从而使登月过程中燃料消耗量最小。

例 1-3 最快拦截问题。

设空中有一枚敌方导弹 M (称为目标)和一枚我方反导弹 L (称为拦截器)。已知 M 以 v_M 做等速飞行,其重力加速度为 g ; L 的质量为 $m(t)$,满载燃料时的质量为 $m(0)$,燃料消耗完毕时的质量为 m_e ,发动机推力为 $p(t)$,单位推力的燃料消耗率为常数 k ,推力的方位角为 $\theta(t)$,发动机的最大推力限额为 p_M 。作战任务要求确定 L 推力及其方位角的最优变化律 $p^*(t)$ 和 $\theta^*(t)$,以便在空中尽快摧毁目标 M 。

为便于研究起见,假定 L 与 M 在同一平面内运动,如图 1-3 所示。由图可列出目标 M 的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} x_M^{(6)}(t) &= v_{M_x}(t) \\ y_M^{(6)}(t) &= v_{M_y}(t) \\ v_{M_x}^{(6)}(t) &= 0 \\ v_{M_y}^{(6)}(t) &= -g \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中 (x_M, y_M) 表示平面上目标 M 的位置, (v_{M_x}, v_{M_y}) 表示目标 M 的速度。

若以 (x_L, y_L) 表示平面上 L 的位置, (v_{L_x}, v_{L_y}) 表示 L 的速度,则其运动方程为

$$\left. \begin{aligned} x_L^{(6)}(t) &= v_{L_x}(t) \\ y_L^{(6)}(t) &= v_{L_y}(t) \\ v_{L_x}^{(6)}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \cos \theta(t) \\ v_{L_y}^{(6)}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \sin \theta(t) - g \\ m^{(6)}(t) &= kp(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

为了进一步简化运动方程,取相对运动坐标系。令 L 与目标的相对位置及相对速度为

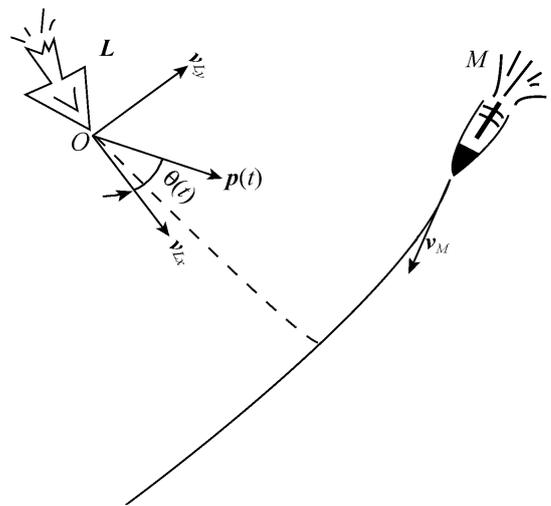


图 1-3 最快拦截问题示意图

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_L(t) - x_M(t) \\ y(t) &= y_L(t) - y_M(t) \\ v_x(t) &= v_{Lx}(t) - v_{Mx}(t) \\ v_y(t) &= v_{Ly}(t) - v_{My}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

于是,拦截器与目标的相对运动方程可写为

$$\left. \begin{aligned} x^{(0)}(t) &= v_x(t) \\ y^{(0)}(t) &= v_y(t) \\ v_x^{(0)}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \cos \theta(t) \\ v_y^{(0)}(t) &= \frac{p(t)}{m(t)} \sin \theta(t) \\ m^{(0)}(t) &= kp(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

初始状态

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= x(0), \quad y(t_0) = y(0), \quad m(t_0) = m(0) \\ v_x(t_0) &= v_x(0), \quad v_y(t_0) = v_y(0) \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中 t_0 为初始时刻。

末态要求为

$$\left. \begin{aligned} x(t_f) &= y(t_f) = 0 \\ m(t_f) &\geq m_e \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

其意义是要求拦截器在燃料消耗完毕前击中目标。

控制约束为

$$\left. \begin{aligned} |p(t)| &\leq p_M \\ \theta(t) &\text{不限} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

性能指标取为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (1-16)$$

最优控制任务是:在容许控制中确定 $p^*(t)$ 和 $\theta^*(t)$,使拦截器 L 从已知初态转移到要求的末态,并使给定的性能指标极小(时间最短)。

例 1-4 最大半径轨道转移问题。

已知宇宙飞船沿环形地球轨道飞行,现要求用有限推力的小火箭发动机在预定时间 t_f 内,使飞船转移到最大半径的环形火星轨道上,试确定小火箭发动机推力方位角的最优变化律。

设宇宙飞船小火箭发动机的推力为 p ,其大小恒定;推力方位角为 $\theta(t)$,宇宙飞船到引力中心的径向距离为 $r(t)$,地球轨道的径向距离为 $r(0)$,火星轨道的径向距离为 $r(t_f)$,宇宙飞船速度向量的径向分量为 $u(t)$,切向分量为 $v(t)$,宇宙飞船的质量为 m ,燃料消耗率为常数 m ,引力中心的引力常数为 λ 。低推力最大半径轨道转移问题如图 1-4 所示。

根据力学规律,可以列出系统的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} r^{(6)}(t) &= u(t) \\ u^{(6)}(t) &= \frac{\dot{v}^2(t)}{r(t)} - \frac{\lambda}{r^2(t)} + \frac{p \sin \theta(t)}{m_0 - \frac{1}{m} \dot{q} t} \\ v^{(6)}(t) &= -\frac{u(t)v(t)}{r(t)} + \frac{p \cos \theta(t)}{m_0 - \frac{1}{m} \dot{q} t} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

初始状态为

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0, \quad u(0) = 0 \\ v(0) &= \sqrt{\frac{\lambda}{r_0}}, \quad m(0) = m_0 \end{aligned} \quad (1-18)$$

末态要求为

$$u(t_f) = 0, \quad v(t_f) = \sqrt{\frac{\lambda}{r(t_f)}} \quad (1-19)$$

性能指标为

$$J = r(t_f) \quad (1-20)$$

最优控制任务是确定 $\theta^*(t)$, 使宇宙飞船在预定时间 t_f 内, 由已知初态转移到要求的末态, 并使性能指标(轨道转移半径)最大。

1.2.2 最优控制问题的基本组成

从上述几个最优控制的实例可见, 任何一个最优控制问题均应包含以下四个方面内容。

(1) 系统数学模型

在集中参数情况下, 被控系统的数学模型通常以定义在时间间隔 $[t_0, t_f]$ 上的状态方程来表示

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \quad t \in [t_0, t_f] \quad (1-21)$$

式中 $x \in R^n$, 为系统状态向量; $u \in R^m$, 为系统控制向量。在确定的初始状态 $x(t_0) = x_0$ 情况下, 若已知控制律 $u(t)$, 则状态方程(1-21)有唯一解 $x(t)$ 。

(2) 边界条件与目标集

动态系统的运动过程, 归根结底是系统从其状态空间的一个状态到另一个状态的转移, 其运动轨迹在状态空间中形成一条轨线 $x(t)$ 。为了确定要求的轨线 $x(t)$, 需要确定轨线的两点边界值。因此, 要求确定初始状态和末端状态, 这是求解状态方程(1-21)所必需的边界条件。

在最优控制问题中, 初始时刻 t_0 及初始状态 $x(t_0)$ 通常是已知的, 但末端时刻 t_f 和末端状态 $x(t_f)$ 则视具体问题而异。例如, 末端时刻 t_f 可以是固定的(如例 1-1, 例 1-2 和例 1-4), 也可以是自由的(如例 1-3); 末端状态 $x(t_f)$ 可以是固定的(如例 1-1 和例 1-2), 也可以是自由的(如例 1-3), 或者是部分固定、部分自由的(如例 1-4)。一般, 可用如下目标集加以概括:

$$\Psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (1-22)$$

式中 $\Psi \in R^r, r \leq n; x(t_f) \in \Psi(\cdot)$ 。若末端状态 $x(t_f) = x_f$ 为一固定向量, 则目标集 $\Psi(\cdot)$ 仅有一列元素 x_f ; 若 $x(t_f)$ 应满足某些约束条件, 则目标集 $\Psi(\cdot)$ 为 n 维空间中的 r 维超

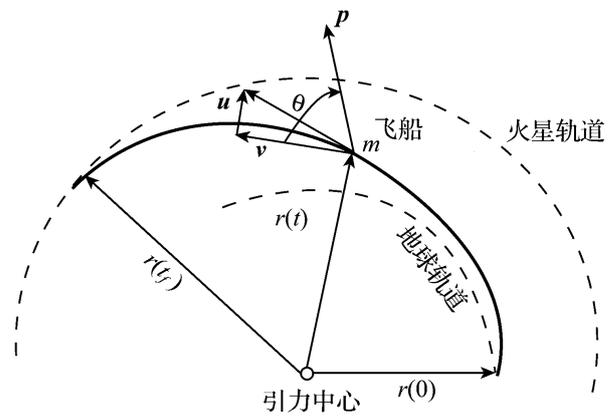


图 1-4 最大半径轨道转移示意图

曲面;若 $x(t_f)$ 自由,则目标集 $\psi(\cdot)$ 扩展到整个 n 维空间。因此,目标集又称为终点流形。

(3) 容许控制

在实际控制系统中,存在两类控制:一类是变化范围受限制的控制,如例 1-2 中的发动机推力和例 1-3 中拦截器的推力等,这一类控制属于某一闭集;另一类是变化范围不受限制的控制,如例 1-1 中的渔轮方位角和例 1-3 中拦截器推力的方位角以及例 1-4 中宇宙飞船小火箭发动机推力的方位角等,这一类控制属于某一开集。

在属于闭集的控制中,控制向量 $u(t)$ 的取值范围称为控制域,以 Ω 标志。 Ω 是 m 维控制空间 R^m 中的一个闭点集。由于 $u(t)$ 可在 Ω 的边界上取值,故凡属于集合 Ω 且分段连续的控制向量 $u(t)$,称为容许控制,以 $u(t) \in \Omega$ 标志。

(4) 性能指标

在状态空间中,可采用不同的控制向量函数去实现从已知初态到要求的末态(或目标集)的转移。性能指标则是衡量系统在不同控制向量函数作用下工作优良度的标准。

性能指标的内容与形式主要取决于最优控制问题所要完成的任务。不同的最优控制问题,有不同的性能指标。然而,即使是同一个最优控制问题,其性能指标的选取也可能因设计者的着眼点而异。例如,有的要求时间最短,有的注重燃料最省,有的时间与燃耗兼顾。应当指出,性能指标选取的合适与否,是决定系统是否存在最优解的关键所在。

在控制术语中,性能指标又称为性能泛函、目标函数或代价函数。

1.2.3 最优控制问题的提法

根据最优控制问题的基本组成部分,可以概括最优控制问题的一般提法如下。

设系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \quad x(t_0) = x_0 \quad (1-23)$$

式中 $x \in R^n$; $f(x, u, t) \in R^n$, 是 $x(t)$ 、 $u(t)$ 和 t 的连续向量函数,并对 $x(t)$ 和 t 连续可微; $u(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上分段连续,且 $u(t) \in \Omega \subset R^m$, 其中 Ω 为有界闭集, R^m 为 m 维完备线性赋范空间。要求确定最优控制函数 $u^*(t)$, 使系统从已知初态 $x(t_0)$ 转移到要求的末态 $x(t_f)$, 并使性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1-24)$$

达到极值,同时满足:

① 控制不等式约束

$$g[x(t), u(t), t] \geq 0 \quad (1-25)$$

② 目标集等式的约束

$$\psi[x(t_f), t_f] = 0 \quad (1-26)$$

式中 $\varphi[x(t_f), t_f]$ 和 $L[x(t), u(t), t]$ 是连续可微的纯量函数; $g[x(t), u(t), t]$ 是 p 维连续可微向量函数, $p \leq m$; $\psi[x(t_f), t_f]$ 是 r 维连续可微向量函数, $r \leq n$ 。

1.3 性能指标类型

性能指标是衡量系统在任一容许控制作用下,性能优劣的尺度,其内容与形式取决于

最优控制问题所要完成的主要任务。不同的控制问题,应取不同形式的性能指标。

(1) 积分型性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1-27)$$

表示在整个控制过程中,状态 $x(t)$ 和控制 $u(t)$ 应达到某些要求。例如:

1) 最短时间控制。

取 $L[x(t), u(t), t] = 1$, 则有

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

2) 最少燃耗控制。

取 $L[x(t), u(t), t] = \sum_{j=1}^m |u_j(t)|$, 则有

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^m |u_j(t)| dt$$

3) 最小能量控制。

取 $L[x(t), u(t), t] = u^T(t)u(t)$, 则有

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)u(t) dt$$

在变分法中,积分型性能指标的泛函极值最优控制问题称为拉格朗日问题。

(2) 末值型性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] \quad (1-28)$$

表示系统在控制过程结束后,末端状态 $x(t_f)$ 应达到某些要求。例如,要求导弹的脱靶量最小。末端时刻 t_f 可以固定,也可自由,视最优控制问题的性质而定。在变分法中,末值型性能指标的泛函极值最优控制问题称为迈耶尔问题。

(3) 复合型性能指标

复合型性能指标如式(1-24)所示,表示对控制过程中的状态 $x(t)$ 、控制 $u(t)$ 及控制过程结束后的末端状态 $x(t_f)$ 均有要求,是最一般的性能指标形式。例如:

1) 有限时间线性状态调节器问题。

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (1-29)$$

式中 $F = F^T \geq 0, Q(t) = Q^T(t) \geq 0, R(t) = R^T(t) > 0$, 均为加权矩阵。

2) 有限时间线性跟踪系统问题。

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) F e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (1-30)$$

式中 $F = F^T \geq 0, Q(t) = Q^T(t) \geq 0, R(t) = R^T(t) > 0$, 且

$$e(t) = z(t) - y(t)$$

为输出误差向量,而 $z(t)$ 为希望输出向量, $y(t)$ 为输出向量。

在变分法中,复合型性能指标的泛函极值问题称为波尔扎问题。

第 2 章 最优控制中的变分法

最优控制问题是在一定的约束条件下,寻求使性能指标达到极值时的控制函数。当被控对象的运动特性由向量微分方程来描述,性能指标由泛函来表示时,确定最优控制函数(最优控制律)的问题,就成了在微分方程约束下求泛函的条件极值问题。变分法是研究泛函极值问题的数学方法,可以确定容许控制为开集时的最优控制函数。掌握变分法的基本概念,还有助于理解以极小值原理和动态规划为代表的现代变分法的思想和内容。

2.1 泛函与变分

泛函是函数概念的一种扩充。求泛函极值的方法与求函数极值的方法有许多类似之处。由于性能指标是一种泛函,因此本节将简要介绍有关泛函及其变分的若干基本概念。

2.1.1 线性赋范空间

控制系统的状态可由观测决定,而观测值总是近似的,若要求近似值能任意逼近准确值,需要在状态之间定出距离量度,以便确切规定“任意逼近”的概念。因此,我们先给出距离空间的概念,再进一步引出赋范空间与内积空间。

定义 2-1 设 X 为非空集合, X 称为距离空间是指 $\forall x, y \in X$, 实函数 $d(x, y)$ 满足:

① $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$; 当且仅当 $x = y$ 时, $d(x, y) = 0$;

② $d(x, y) = d(y, x)$;

③ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ 。

式中 $d(x, y)$ 称为 X 上的距离。由定义 2-1 知,若动点 x 无限逼近定点 x_0 , 必有 $d(x, x_0) \rightarrow 0$; 反之亦然。

定义 2-2 若点列 $x_n \in X$, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

则称点列 x_n 以点 x_0 为极限, 或称 x_n 收敛于 x_0 。

定义 2-3 设点列 $x_n \in X$, 若对任意的 $\varepsilon > 0$ 均存在一个足够大的数 N , 使得当 $m, n > N$ 时, 有

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

则称 x_n 为 X 的柯西序列。若 X 中的每个柯西序列均收敛于 X 中的一点, 则称 X 为完备的距离空间。

定义 2-4 在 X 中, 点集

$$S(x_0; \tau) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \tau, \tau > 0\}$$

称为以点 x_0 为中心, 以 τ 为半径的开球。设对于子集 $M \subset X$, 存在以 x 为中心的开球 $S(x; \varepsilon) \subset M$, 则点 $x \in X$ 称为集 M 的内点。 M 所有内点的全体叫做 M 的内部, 记作 $\text{Int}M$ 。若 $M = \text{Int}M$, 即 M 的一切点都是其内点, 则 M 称为开集。

定义 2-5 设子集 $M \subset X$, 若以点 x 为中心的开球 $S(x; \varepsilon)$ 与 M 之交集非空, 即

$$S(x; \varepsilon) \cap M \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0$$

则点 $x \in X$ 称为 M 的附着点。 M 所有附着点的集称为 M 的闭包, 记作 \overline{M} 。若 $M = \overline{M}$, 则 $M \subset X$ 叫做闭集。

定义 2-6 若对于线性空间 R^n 中每一个元素 $x \in R^n$ 都可定义范数 $\|x\|: x \rightarrow R$, 满足:

① $\|x\| \geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时, $\|x\| = 0$;

② $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in R^n$;

③ $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \alpha$ 为任意常数。

则 R^n 称为线性赋范空间。

定义 2-7 在 n 维线性空间 R^n 中, 若用数积定义内积

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in R^n$$

用内积定义范数

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

再用范数定义距离

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad \forall x, y \in R^n$$

则 R^n 也称为希尔伯特空间。

定义 2-8 设 m 个控制函数 $u_i(t), i=1, 2, \dots, m$, 定义在时间闭区间 $[t_0, t_f]$ 上, 则对于每一个固定的 $t \in [t_0, t_f]$, 函数向量

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_m(t)]^T$$

是 m 维空间中的一个点, 即 $u(t) \in R^m$, 且设 $u(t)$ 平方可积。若在 m 维线性空间 R^m 中定义内积

$$\begin{aligned} \langle u(t), v(t) \rangle &= \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) v(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i(t) v_i(t) dt, \quad \forall u(t), v(t) \in R^m \end{aligned}$$

用内积定义范数

$$\|u(t)\| = \left[\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

则 R^m 称为控制向量函数空间。

定义 2-9 在控制向量函数空间 R^m 中, 若可用范数定义距离

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u(t) - v(t)\| \\ &= \left[\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m (u_i - v_i)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u(t), v(t) \in R^m \end{aligned}$$

则 R^m 也是线性赋范空间。若对于任一 $\varepsilon > 0$, 都存在一个充分大的自然数 N , 使得 $r > N$ 时, 均有

$$d(u_r, u_0) < \varepsilon, \quad \forall u_r, u_0 \in R^m$$

或

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r = u_0, \quad \forall u_r, u_0 \in R^m$$

则称向量函数序列 u_r 收敛于向量函数 u_0 , 或称 R^m 也是完备的线性赋范空间。

2.1.2 泛函及其定义域

一般地说, 若对于某类函数中的所有函数 $x(t)$, 变量 J 都有一确定的值与之对应, 则称 J 为依赖于函数 $x(t)$ 的泛函, 记作 $J = J[x(t)]$ 。泛函可以理解为“函数的函数”, 其值由函数的选取而定。例如, 函数的定积分是一个泛函。设

$$J(x) = \int_0^1 x(t) dt$$

则 $J(x)$ 的值由函数 $x(t)$ 而定。当 $x(t) = t$ 时

$$J(x) = \frac{1}{2}$$

当 $x(t) = \cos t$ 时

$$J(x) = \sin 1$$

又如, 平面上给定两点之间的曲线长度是一个泛函。设 (x, y) 平面上有 A, B 两点, 其坐标取为 $A(x_0, y_0)$ 和 $B(x_1, y_1)$, 如图 2-1 所示。设两点间曲线长度为 $J = l$, 取单元弧长为 dl , 则有

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

单元弧长变化率

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

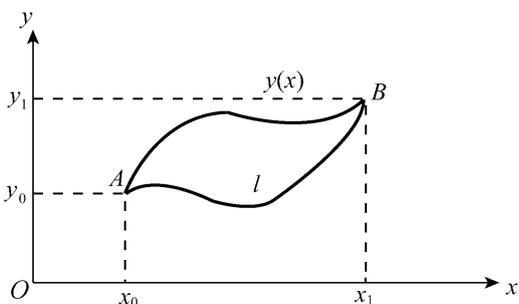


图 2-1 平面上给定两点间的曲线长度

因而 A, B 两点间曲线长度

$$J[y(x)] = l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

其值取决于函数 $y(x)$ 的选取。

因此, 最优控制问题中的性能指标, 由于其值取决于控制 $u(t)$ 和状态 $x(t)$ 的选取, 必定是一个泛函, 故又称为性能泛函。性能泛函可以看作是线性赋范空间中的某个子集到实数集的算子, 其定义如下。

定义 2-10 设 R^n 为 n 维线性赋范空间, R 为实数集, 若存在一一对应关系

$$y = J(x), \quad \forall x \in R^n, y \in R \quad (2-1)$$

则 $J(x)$ 称为 R^n 到 R 的泛函算子。若式 (2-1) 满足下列线性条件:

$$\textcircled{1} \quad J(x_1 + x_2) = J(x_1) + J(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in R^n \quad (2-2)$$

$$\textcircled{2} \quad J(\alpha x) = \alpha J(x), \quad \forall x \in R^n \quad (2-3)$$

则 $J(x)$ 称为线性泛函算子。

在许多问题中, 只确定所用的函数空间是不够的, 因为泛函算子 J 不一定在空间的任意元上都有定义, 因此引出泛函定义域的概念。

定义 2-11 在线性赋范空间 R^n 上, 使泛函算子 J 作用有意义的元的全体, 称为 J 的

定义域,记作 $D(J)$; $D(J)$ 在 J 作用下的集合,称为 J 的值域,记作

$$Z(J) = \{ y \mid y = J(x), x \in D(J) \}$$

为了讨论泛函 $J(x)$ 的性质和运算,需要 $J(x)$ 为连续的条件。如果在线性赋范空间 R^n 中,当 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ 时, $x_n \in R^n, x_0 \in R^n$, 对应 $J(x_n) \rightarrow J(x_0) (n \rightarrow \infty)$, 则这样的泛函算子 $J(x)$ 是连续的。

定义 2-12 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 中子集 $D(J)$ 到实数集 R 中的泛函算子,若对于每一个收敛于 $x_0 \in D(J)$ 的序列 $x_n \in D(J)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = J(x_0) \quad (2-4)$$

则称泛函算子 J 在 x_0 处连续。若泛函算子 $J(x)$ 在子集 $D(J)$ 上的每一点都连续,则称泛函算子在 $D(J)$ 中连续。

由于泛函 $J(x)$ 定义在线性赋范空间上,因此对于线性泛函 $J(x)$, 若

$$\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \forall x_n, x \in R^n$$

时,必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = J(x)$$

则线性泛函 $J(x)$ 是连续的。实际上,这种泛函最重要,因为它在任何一点上的值可用该点附近的泛函值任意逼近。在有限维线性空间上,任何线性泛函都是连续的。

2.1.3 泛函的变分

研究泛函的极值问题,需要采用变分法。变分在泛函研究中的作用,如同微分在函数研究中的作用一样。泛函的变分与函数的微分,其定义式几乎完全相当。

为了定义泛函的变分,应先研究宗量的变分。设 $J(x)$ 为连续泛函, $x(t) \in R^n$ 为宗量,其变分表示式为

$$\delta x = x(t) - x_0(t), \quad x(t), x_0(t) \in R^n \quad (2-5)$$

变分 δx 表示 R^n 中点 $x(t)$ 与 $x_0(t)$ 之间的差。由于 δx 存在,必然引起泛函数值的变化,并以 $J(x + \varepsilon \delta x)$ 表示。其中 ε 为参变数,其值 $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 。当 $\varepsilon = 1$ 时,得增加后的泛函值 $J(x + \delta x)$; 当 $\varepsilon = 0$ 时,得泛函原来的值 $J(x)$ 。泛函变分的定义如下。

定义 2-13 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 上的连续泛函,若其增量可表示为

$$\begin{aligned} \Delta J(x) &= J(x + \delta x) - J(x) \\ &= L(x, \delta x) + r(x, \delta x) \end{aligned} \quad (2-6)$$

式中 $L(x, \delta x)$ 是关于 δx 的线性连续泛函, $r(x, \delta x)$ 是关于 δx 的高阶无穷小,则

$$\delta J = L(x, \delta x)$$

称为泛函 $J(x)$ 的变分。

由定义 2-13 知,泛函的变分就是泛函增量的线性主部。当一个泛函具有变分时,也称该泛函可微。像函数的微分一样,泛函的变分可以利用求导方法来确定。

定理 2-1 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 上的连续泛函,若在 $x = x_0$ 处 $J(x)$ 是可微的, $x, x_0 \in R^n$, 则其变分为

$$\delta J(x_0, \delta x) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0, \varepsilon \delta x) \right|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2-7)$$

证明 因在 $x = x_0$ 处 $J(x)$ 可微, 必在 x_0 处存在变分。由定义 2-13 有

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(x_0 + \varepsilon \delta x) - J(x_0) \\ &= L(x_0, \varepsilon \delta x) + \gamma(x_0, \varepsilon \delta x)\end{aligned}$$

由于 $L(x_0, \varepsilon \delta x)$ 是关于 $\varepsilon \delta x$ 的线性连续泛函, 故

$$L(x_0, \varepsilon \delta x) = \varepsilon L(x_0, \delta x)$$

又因 $r(x_0, \varepsilon \delta x)$ 是关于 $\varepsilon \delta x$ 的高阶无穷小, 故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r(x_0, \varepsilon \delta x)}{\varepsilon} = 0$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0, \varepsilon \delta x) \Big|_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(x_0 + \varepsilon \delta x) - J(x_0)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [L(x_0, \varepsilon \delta x) + r(x_0, \varepsilon \delta x)] \\ &= \delta J(x_0, \delta x)\end{aligned}$$

例 2-1 试求下列连续泛函的变分 δJ :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt$$

式中 x 和 \dot{x} 为标量。

解 由定理 2-1, 得

$$\begin{aligned}\delta J &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{t_0}^{t_f} L(x + \varepsilon \delta x, \dot{x} + \varepsilon \delta \dot{x}, t) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt\end{aligned}$$

可以证明, 泛函变分的取值仅是判断泛函极值存在的必要条件。为了确定泛函的极小值或极大值, 需要考察泛函的二次变分。

定义 2-14 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 上的连续泛函, 若在 $x = x_0$ 处二次可微, 其中 $x \in R^n, x_0 \in R^n$, 则泛函的二次微分 $J^{(2)}(x_0)(\delta x)^2$ 称为泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处的二次变分, 记为 $\delta^2 J(x_0, \delta x)$ 。

根据定义 2-14, 可用下述定理确定泛函的二次变分。

定理 2-2 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 上的连续泛函, 若在 $x = x_0$ 处 $J(x)$ 是二次可微的, 则其二次变分为

$$\delta^2 J(x_0, \delta x) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} J(x_0, \varepsilon \delta x) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2-8)$$

证明 由定义 2-14

$$\begin{aligned}\delta^2 J(x_0, \delta x) &= J^{(2)}(x_0)(\delta x)^2 \\ &= [J'(x_0)\delta x]' \delta x\end{aligned}$$

式中

$$J'(x_0)\delta x = \delta J(x_0, \delta x)$$

由定理 2-1 知

$$\delta J(x_0, \delta x) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0, \varepsilon \delta x) \right|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

所以

$$\begin{aligned} \delta^2 J(x_0, \delta x) &= \left[\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0, \varepsilon \delta x) \right|_{\varepsilon=0} \right]' \delta x \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0, \varepsilon \delta x) + \eta \delta x \right\} \Big|_{\varepsilon=0, \eta=0} \end{aligned}$$

式中 $0 \leq \eta \leq 1$ 。于是证得

$$\delta^2 J(x_0, \delta x) = \left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} J(x_0, \varepsilon \delta x) \right|_{\varepsilon=0}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

2.1.4 泛函极值与变分引理

泛函极值及其达到极值的条件,与函数极值及其达到极值的条件类同。

(1) 泛函极值的定义

定义 2-15 设 $J(x)$ 是线性赋范空间 R^n 中某个子集 D 上的线性连续泛函, 点 $x_0 \in D$, 若存在某一正数 σ , 使集合

$$U(x_0, \sigma) = \{x \mid \|x - x_0\| < \sigma, x \in R^n\}$$

在

$$x \in U(x_0, \sigma) \subset D$$

时, 均有

$$\Delta J(x) = J(x) - J(x_0) \geq 0 \quad (2-9)$$

则称泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极小值; 若

$$\Delta J(x) = J(x) - J(x_0) \leq 0 \quad (2-10)$$

则称泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极大值。

(2) 泛函极值的必要条件与一次变分

定理 2-3 设 $J(x)$ 是在线性赋范空间 R^n 中某个开子集 D 上定义的可微泛函, 且在 $x = x_0$ 处达到极值, 其中 $x \in R^n, x_0 \in R^n$, 则泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处必有

$$\delta J(x_0, \delta x) = 0 \quad (2-11)$$

证明 对于任意给定的 $\delta x, J(x_0 + \varepsilon \delta x)$ 是实变量 ε 的函数, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ 。由假设, 泛函 $J(x_0 + \varepsilon \delta x)$ 在 $\varepsilon = 0$ 时达到极值, 故其导数在 $\varepsilon = 0$ 时应为零, 即

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0 + \varepsilon \delta x) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

因泛函 $J(x)$ 可微, 其一次变分存在, 由定理 2-1 得

$$\delta J(x_0, \delta x) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(x_0 + \varepsilon \delta x) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

由定理 2-3 可知, 一次变分为零是泛函达到极值的必要条件。

(3) 泛函极小值的充要条件与二次变分

定理 2-4 设 $J(x)$ 是在线性赋范空间 R^n 中某个开子集 D 上定义的泛函, 且在 $x = x_0$ 处存在二次变分, 其中 $x \in R^n, x_0 \in R^n$ 。如果

$$\delta J(x_0, \delta x) = 0, \quad \delta^2 J(x_0, \delta x) > 0 \quad (2-12)$$

则泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极小值。

证明 对于给定的 x_0 和 δx , 泛函 $J(x_0 + \varepsilon \delta x)$ 是实变量 ε 的函数。令

$$\varphi(\varepsilon) = J(x_0 + \varepsilon \delta x), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

则由函数极小值的充要条件知, 对于 $\varphi(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 时达到极小值, 应有

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varphi(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \varphi(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} > 0$$

于是, 由定理 2-1 及定理 2-2 得泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极小值的充要条件为

$$\delta J(x_0, \delta x) = 0, \quad \delta^2 J(x_0, \delta x) > 0$$

类似于定理 2-4, 可证得泛函 $J(x)$ 在 $x = x_0$ 处达到极大值的充要条件为

$$\delta J(x_0, \delta x) = 0, \quad \delta^2 J(x_0, \delta x) < 0 \quad (2-13)$$

(4) 变分引理

为了深入研究控制系统在无约束条件和有约束条件下的动态最优化问题, 需要应用如下变分引理。

定理 2-5 设 $\xi(t)$ 是时间区间 $[t_0, t_1]$ 上的 n 维连续向量函数, 若对于 n 维任意的连续向量函数 $\eta(t)$, 其边界条件为

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$$

均有

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi^T(t) \eta(t) dt = 0 \quad (2-14)$$

则

$$\xi(t) \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

证明 采用反证法。设 $\xi(t) \neq 0, t \in [t_0, t_1]$ 。因为

$$\xi(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \cdots \ \xi_n(t)]^T$$

不失一般性, 令 $\xi_1(t) > 0$, 而 $\xi_i(t) = 0, i = 2, 3, \dots, n, t \in [t_0, t_1]$ 。

由于 $\xi(t)$ 连续, 故必存在一个邻域

$$(t_0, t_1) \subset [t_0, t_1]$$

使得 $t_0 \leq t_0 < t < t_1 \leq t_1$ 时, 有

$$\xi_1(t) > 0, \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

取连续标量函数 $\eta(t)$ 在邻域 (t_0, t_1) 内为正, 邻域外为零, 即

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq t_0 \\ (t - t_0)^2 (t - t_1)^2, & t_0 < t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

并取

$$\eta_j(t) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

由于 $\eta(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续, 且有 $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$, 故积分式

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi^T(t) \eta(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \xi_1(t) \eta(t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \xi_1(t) (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 dt > 0$$

与原有条件式(2-14)矛盾,因此本定理结论成立。

2.2 欧拉方程

变分法总是从推导泛函极值的必要条件开始。本节将根据 2.1 节给出的泛函及其变分的一般概念,针对拉格朗日问题,导出无约束及有约束情况下泛函极值的必要条件——欧拉方程,又称为欧拉-拉格朗日方程。同时,为了判断欧拉方程求出的泛函极值是极小值还是极大值,我们还讨论了泛函极小值的充分条件——勒让德条件。

2.2.1 无约束泛函极值的必要条件

研究使泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (2-15)$$

达到极小值的问题。其中 $x \in R^n$, 在时间区间 $[t_0, t_f]$ 上, $x(t)$ 及被积函数 $L(x, \dot{x}, t)$ 连续可微。要求确定一个容许函数 $x^*(t)$, 使泛函(2-15)取极小值。用几何语言说, 要求找出一条容许曲线 $x^*(t)$, 使给定函数 $L(x, \dot{x}, t)$ 沿 $x^*(t)$ 的积分取极小值。

如果 $x(t)$ 代表控制系统的状态向量, 则式(2-15)代表系统的性能指标。变分问题是要求在状态空间中确定一条最优轨线, 使给定性能指标(2-15)达到极小值。由于控制问题是多种多样的, 因而变分问题也不尽相同。

假定现在考虑最简单的两端固定问题, 其 t_0 及 t_f 固定, 两点边界条件已知为

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (2-16)$$

则无约束泛函极值问题可以描述如下。

问题 2-1 无约束泛函极值问题为

$$\min_x J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (2-17)$$

式中 $L(x, \dot{x}, t)$ 及 $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续可微, t_0 及 t_f 固定。已知 $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f, x(t) \in R^n$, 求满足式(2-17)的极值轨线 $x^*(t)$ 。

设 $x^*(t)$ 是满足边界条件(2-16)的极值轨线, $x(t)$ 是 $x^*(t)$ 邻域中的一条容许轨线, 如图 2-2 所示。 $x(t)$ 与 $x^*(t)$ 之间有下列关系:

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad (2-18)$$

$$x(\dot{t}) = x^*(\dot{t}) + \delta x(\dot{t}) \quad (2-19)$$

以及

$$x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) = x^*(t_f) = x_f$$

式中 $\delta x(t)$ 是 $x(t)$ 的一次变分, $\delta x(\dot{t})$ 是 $x(\dot{t})$ 的一次变分。

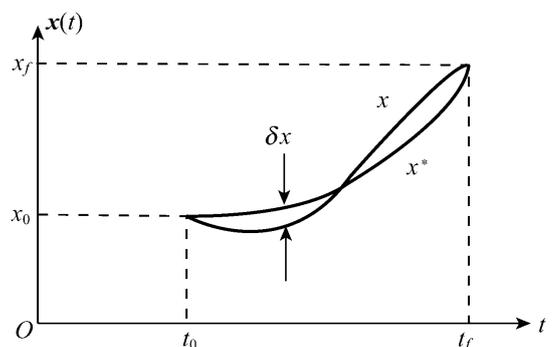


图 2-2 端点固定的极值曲线

将式(2-18)和式(2-19)代入泛函(2-15),则有

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) dt \quad (2-20)$$

因为被积函数 $L(\cdot)$ 连续可微,所以泛函 $J(x)$ 连续可微。只要 $x(t)$ 任意逼近 $x^*(t)$, 必可求出使泛函(2-20)取极值的必要条件。

定理 2-6 对于问题 2-1,使性能泛函(2-15)取极值的必要条件,是轨线 $x(t)$ 满足下列欧拉方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-21)$$

证明 对于式(2-20),由于 $L(\cdot)$ 及 $x(t)$ 连续可微,故可将 $L(\cdot)$ 在极值轨线 $x^*(t)$ 处展成泰勒级数

$$L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) = L(x^*, x^{*6}, t) + \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]^T \Big|_{x=x^*} \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \Big|_{\dot{x}=\dot{x}^*} \delta \dot{x} + \text{HOT}$$

式中 HOT 代表泰勒展开式中的高阶项。于是,泛函增量可表示为

$$\begin{aligned} \Delta J(x) &= J(x^* + \delta x) - J(x^*) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) - L(x^*, x^{*6}, t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]^T \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta \dot{x} + \text{HOT} \right] dt \end{aligned}$$

由定义 2-13 知,泛函变分是泛函增量的线性主部,故

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]^T \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta \dot{x} \right] dt \quad (2-22)$$

利用分部积分公式,式(2-22)中的第二项为

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta \dot{x} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta x dt \quad (2-23)$$

于是,式(2-22)可写为

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta x dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (2-24)$$

由定理 2-3 知,泛函取极值的必要条件是 $\delta J = 0$ 。再由变分定理 2-5 知,由于 δx 任意,故式(2-24)为零等价于

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-25)$$

以及

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \Big|_{t=t_f} \delta x(t_f) - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]^T \Big|_{t=t_0} \delta x(t_0) = 0 \quad (2-26)$$

式(2-25)即为要求证的欧拉方程,或称欧拉-拉格朗日方程,而式(2-26)则是求解时变非线性二阶欧拉方程(2-25)所需要的两点边界值。对于问题 2-1,因为两端固定,必有

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \delta x(t_f) = 0$$

因此式(2-26)自然成立。求解式(2-25)所需的两点边界值就是问题 2-1 中已知的端点条件: $x(t_0) = x_0$ 和 $x(t_f) = x_f$ 。式(2-26)一般称为横截条件,将在下节专题讨论。

例 2-2 设泛函

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} [x^2(t) - x^2(t)] dt$$

边界条件

$$x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

求使泛函达到极值的极值轨线 $x^*(t)$ 。

解 对于本例

$$L(x, \dot{x}, t) = x^2 - \dot{x}^2$$

根据欧拉方程(2-25), 得

$$\ddot{x} + x = 0$$

其通解为

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

代入已知边界条件, 求出

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2$$

因此, 泛函极值只能在下列极值轨线上实现

$$x^*(t) = 2 \sin t$$

2.2.2 有等式约束的泛函极值的必要条件

了解无约束泛函极值的必要条件, 对于掌握变分法的基本概念是重要的。然而, 实际系统都有其自身的运动规律, 这种规律的数学描述就是系统的运动微分方程式。在求解实际系统的最优控制问题时, 我们要求使性能泛函取极值的极值轨线, 同时满足系统的运动微分方程式。因此, 控制系统的最优化问题, 是要求确定在微分方程式约束条件下的泛函极值, 即条件极值的变分问题。

在讨论条件极值的变分问题时, 我们仍然先考虑最简单的两端固定问题。设性能泛函为拉格朗日问题, 系统运动微分方程取为

$$f(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (2-27)$$

式中 $x \in R^n$, $f(\cdot)$ 为 n 维向量函数。于是, 有等式(2-27)约束的泛函极值问题可以描述如下。

问题 2-2 有等式约束的泛函极值问题为

$$\min_x J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t) dt \quad (2-28)$$

$$\text{s. t. } f(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (2-29)$$

式中 $g(x, \dot{x}, t)$ 及 $x(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上连续可微, t_0 及 t_f 固定。已知 $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f, x \in R^n, f(\cdot) \in R^n$ 。求满足式(2-28)及式(2-29)的极值轨线 $x^*(t)$ 。

如果引入拉格朗日乘子向量, 可以把有约束的泛函极值问题化为无约束的泛函极值问题, 则由定理 2-6 立即可得条件泛函极值的必要条件。

定理 2-7 对于问题 2-2, 在约束条件(2-29)下, 使泛函(2-28)取极值的必要条件, 是轨线 $x(t)$ 满足下列欧拉方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-30)$$

式中

$$L(x, \dot{x}, \lambda, t) = g(x, \dot{x}, t) + \lambda^T(t) f(x, \dot{x}, t) \quad (2-31)$$

在式(2-31)中, $\lambda \in R^n$, 为待定拉格朗日乘子向量。

证明 设 $\lambda(t) \in R^n$ 为待定拉格朗日乘子, 构造广义泛函

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} [g(x, \dot{x}, t) + \lambda^T(t) f(x, \dot{x}, t)] dt$$

令拉格朗日函数

$$L(x, \dot{x}, \lambda, t) = g(x, \dot{x}, t) + \lambda^T(t) f(x, \dot{x}, t)$$

则广义泛函可表示为

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, \lambda, t) dt$$

于是, 原性能泛函的条件极值问题转化为广义泛函的无条件极值问题。根据定理 2-6, 立即得到式(2-30)。由于两端固定, 因此求解欧拉方程(2-30)的两点边界值, 就是问题 2-2 中已知的两点边界条件, $x(t_0) = x_0$ 及 $x(t_f) = x_f$ 。

在应用定理 2-7 时, 若将式(2-31)代入式(2-30), 则欧拉方程形式为

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial f^T}{\partial x} \right) \lambda \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} + \left(\frac{\partial f^T}{\partial \dot{x}} \right) \lambda \right] = 0 \quad (2-32)$$

如果问题 2-2 中的约束方程为

$$f(x, t) = 0$$

则欧拉方程(2-32)简化为

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial f^T}{\partial x} \right) \lambda \right] - \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-33)$$

例 2-3 设人造地球卫星姿态控制系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

性能泛函取为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

边界条件

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求使性能泛函取极值的极值轨线 $x^*(t)$ 和极值控制 $u^*(t)$ 。

解 由题意

$$g = \frac{1}{2} u^2$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

则拉格朗日标量函数

$$\begin{aligned} L(x, u, \boldsymbol{\lambda}, t) &= g + \boldsymbol{\lambda}^T f \\ &= \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(u - x_2) \end{aligned}$$

欧拉方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u} &= u + \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a \\ \lambda_2 &= -a + b \\ u &= a - b \end{aligned}$$

式中常数 a, b 待定。

由状态约束方程

$$\begin{aligned} x_2(t) &= u = a - b \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}at^2 - bt + c \\ x_1(t) &= x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 - bt + c \\ x_1(t) &= \frac{1}{6}at^3 - \frac{1}{2}bt^2 + ct + d \end{aligned}$$

式中积分常数 c, d 将待定。代入已知的边界条件,求得

$$a = 3, \quad b = 3.5, \quad c = 1, \quad d = 1$$

于是,极值轨线

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1 \\ x_2^*(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1 \end{aligned}$$

极值控制

$$u^*(t) = 3 - 3.5$$

最优乘子

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(t) &= 3 \\ \lambda_2^*(t) &= -3 + 3.5 \end{aligned}$$

泛函极值

$$J^* = \int_0^2 u^{*2}(t) dt = 15.5$$

2.2.3 泛函极小值的充分条件

欧拉方程只是泛函取极值的必要条件。为了确定极值的性质,需要给出泛函取极小值的充分条件。

(1) 无约束情况

定理 2-8 对于问题 2-1,使性能泛函(2-17)成立的充分条件是:除欧拉方程(2-21)应成立外,下列等价勒让德条件之一应成立:

$$\textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \right]^T & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \end{bmatrix} > 0 \quad (2-34)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \geq 0 \quad (2-35)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \geq 0 \quad (2-36)$$

证明 泛函增量

$$\begin{aligned} \Delta J(x) &= J(x^* + \delta x) - J(x^*) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) - L(x^*, x^{*6}, t)] dt \end{aligned}$$

在极值轨线处,泰勒级数展开式

$$\begin{aligned} L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) &= L(x^*, x^{*6}, t) + \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]^T \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]^T_6 \delta x^6 \\ &+ \frac{1}{2} \left[\delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \delta x + \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \delta x^6 + \delta x^T \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \right]^T_6 \delta x + \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \delta x \right]_6 + \dots \end{aligned} \quad (2-37)$$

将式(2-37)代入 ΔJ ,取其二次项,得泛函 J 的二次变分

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \delta x + 2 \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \delta x^6 + \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \delta x \right]_6 dt \quad (2-38)$$

式(2-32)为二次型积分式,可改写为

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \delta x^T & \delta x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \right]^T & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta x \end{bmatrix}_6 dt \quad (2-39)$$

由定理 2-4 知,在式(2-17)成立时,泛函取极小值的充分条件是 $\delta^2 J > 0$,因此本定理结论①成立。

若对式(2-38)被积函数的第二项进行分部积分,因

$$\delta x^6 \frac{d}{dt} \delta x \quad (2-40)$$

故

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \delta x dt &= \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} d\delta x \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \delta x dt + 2 \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} \end{aligned} \quad (2-41)$$

由于两端固定, $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$, 所以将式(2-41)代入式(2-38)得

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \right] \delta x dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \delta x dt \quad (2-42)$$

由式(2-42)可见, 当本定理结论②或③成立时, 必有 $\delta^2 J > 0$ 。

(2) 有约束情况

定理 2-9 对于问题 2-2, 在约束条件(2-29)下, 使性能泛函(2-28)成立的充分条件是: 除欧拉方程(2-30)应成立外, 下列等价勒让德条件之一应成立:

$$\textcircled{1} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \right]^T & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \end{vmatrix} > 0 \quad (2-43)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} > 0 \quad (2-44)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \geq 0 \quad (2-45)$$

式中 $L = L(x, \dot{x}, \lambda, t)$ 满足式(2-31), λ 为 n 维拉格朗日乘子向量。

证明 令 $\lambda(t) \in R^n$, 构造广义泛函

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, \lambda, t) dt$$

式中 $L(x, \dot{x}, \lambda, t)$ 满足式(2-31)。因为 $L(x, \dot{x}, \lambda, t)$ 连续可微, 故在极值轨线处, 可将广义泛函 J_a 展成泰勒级数, 类似于定理 2-8 的证明过程, 立即证得本定理结论。

例 2-4 设性能泛函为

$$J(x) = \int_1^2 (x^2 \dot{t}^2 + x^6) dt$$

边界条件

$$x(1) = 1, \quad x(2) = 2$$

求使性能泛函 $J(x)$ 为极小值的最优轨线 $x^*(t)$ 。

解 本题为两端固定, 无约束泛函的极小值问题。先求泛函极值。由题意

$$L(x, \dot{x}, t) = x^2 \dot{t}^2 + x^6$$

算得

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2x\dot{t}^2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} = 2t^2$$

由定理 2-6, 欧拉方程为

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} (2x\dot{t}^2) = 0$$

于是

$$1 + 2x\dot{t}^2 = c$$

$$x = \frac{c-1}{2\dot{t}^2} = -\frac{c_1}{t^2}$$

式中

$$c_1 = \frac{1}{2}(1 - c)$$

为待定常数。不难解得极值轨线

$$x^*(t) = \frac{c_1}{t} + c_2$$

代入已知的边界条件,解出常数

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 3$$

故使泛函为极值的极值轨线

$$x^*(t) = 3 - \frac{2}{t}$$

然后,利用定理 2-8 判断泛函 $J(x)$ 在 $x^*(t)$ 上是否为极小值。因为

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \Big|_{x^*} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \Big|_{x^*} = 2t^2 > 0, \quad \forall t \in [1, 2]$$

所以求出的 $x^*(t)$ 为最优轨线,相应的泛函极小值

$$J^*(x^*) = \int_1^2 \frac{6}{t^2} dt = 3$$

2.3 横截条件

求解欧拉方程,需要由横截条件提供两点边界值。两端固定且初始时刻 t_0 和末端时刻 t_f 同时固定只是一种最简单的情况。在实际工程问题中,情况要复杂得多。例如,初始时刻和末端时刻可以自由;初始状态 $x(t_0)$ 和末端状态 $x(t_f)$ 可以自由,也可以受约束。在多数控制工程中,初始时刻往往是固定的。因此,本节将讨论末端时刻固定和末端时刻自由时的各种横截条件,并简要介绍初始时刻自由时的横截条件。

2.3.1 末端时刻固定时的横截条件

当末端时刻固定时,由泛函极值的必要条件可知,横截条件的一般表达式为式(2-26),即

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_{\dot{x}}^T \Big|_{t_f} \delta x(t_f) - \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_{\dot{x}}^T \Big|_{t_0} \delta x(t_0) = 0$$

只要不是两端固定问题,宗量变分 $\delta x(t_f)$ 和 $\delta x(t_0)$ 不可能同时为零,使泛函一次变分 $\delta J = 0$ 所缺少的条件,就应当由极值的基本必要条件来补足:或是 $\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_{\dot{x}}^T \Big|_{t_f} = 0$,或是

$\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_{\dot{x}}^T \Big|_{t_0} = 0$ 。如果把初始状态称为起点,把末端状态称为终点,则因:

起点固定时, $x(t_0) = x_0, \delta x(t_0) = 0$;

起点自由时, $\delta x(t_0) \neq 0$;

终点固定时, $x(t_f) = x_f, \delta x(t_f) = 0$;

终点自由时, $\delta x(t_f) \neq 0$;

所以,可把末端时刻固定时的各种横截条件列成表 2-1 所示。

表 2-1 末端时刻固定时的横截条件

序号	名称	横截条件
1	固定起点和终点	$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f$
2	自由起点和终点	$\left. \frac{\partial L}{\partial x} \right _{t_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right _{t_f} = 0$
3	自由起点和固定终点	$\left. \frac{\partial L}{\partial x} \right _{t_0} = 0, \quad x(t_f) = x_f$
4	固定起点和自由终点	$x(t_0) = x_0, \quad \left. \frac{\partial L}{\partial x} \right _{t_f} = 0$

在工程问题中, $x(t)$ 一般表示运动轨迹, 如飞机或导弹的飞行轨迹。从地面固定发射架发射, 到达固定地面目标的地对地导弹的飞行轨迹, 属于固定起点和终点问题; 用地对空导弹射击空中目标, 相当于固定起点和自由终点问题; 在空战中, 空对空导弹的飞行轨迹, 属于自由起点和终点问题; 利用空对地导弹袭击地面固定目标, 相当于自由起点和固定终点问题。

2.3.2 末端时刻自由时的横截条件

末端时刻自由问题的实质是, 末端时刻 t_f 不固定, 末端状态或自由、或受约束, 属于变动端点问题。在变动端点问题中, 可以证明, 极值仅在欧拉方程的解 $x = x(t, c_1, c_2)$ 上达到, 其中 c_1 和 c_2 为求解欧拉方程的待定系数, 由横截条件给出。因此, 泛函极值由 $x(t, c_1, c_2)$ 一类函数确定。例如, 敌机按预定轨迹 $c(t)$ 飞行, 我防空导弹从 t_0 时刻发射追击敌机, 末端时刻 t_f 是无法事先规定的, 但要求 $x(t_f) = c(t_f)$ 以保证击落敌机。这就是 t 自由、末端受约束的变分问题, 如图 2-3 所示。在图 2-3 中, $x^*(t)$ 为极值轨线, $x(t)$ 为 $x^*(t)$ 邻域内的任一条容许轨线, (x_0, t_0) 表示起点, 点 (x_f, t_f) 到点 $(x_f + \delta x_f, t_f + \delta t_f)$ 则表示变动端点, $c(t)$ 表示端点约束曲线, δt_f 表示末端时刻变分, 为微变量。由图 2-3 知, 在末端受约束时, 存在如下近似关系式:

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - x'(t_f) \delta t_f \quad (2-46)$$

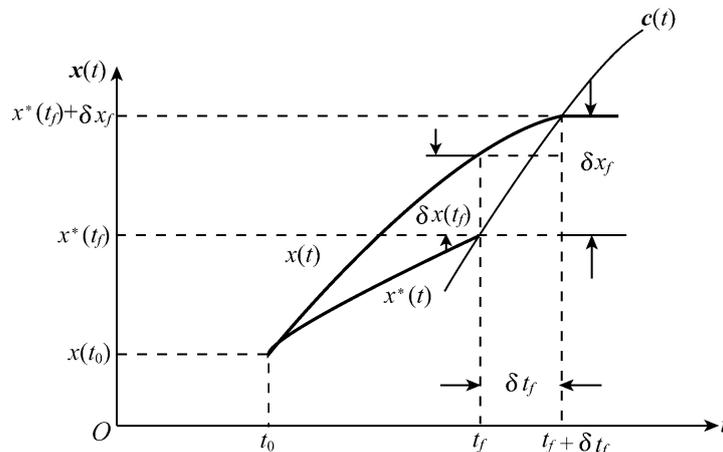


图 2-3 末端时刻自由时的变分问题

和

$$\delta x_f = c(t_f) \delta t_f \quad (2-47)$$

如果末端自由,由于约束曲线 $c(t)$ 不存在,则仅存在近似关系式(2-46)。

通过点 (x_0, t_0) 的容许轨线形成一个容许轨线束 $x = x(t, c_1)$, 泛函 $J[x(t, c_1)]$ 在该束曲线上转换成常数 c_1 和末端时刻 t_f 的函数。因为容许轨线束 $x = x(t, c_1)$ 在所考虑的极值曲线 $x^*(t)$ 的邻域内形成一个中心场,所以可由 t_f 和 x_f 的值确定出束中的极值曲线 $x^*(t)$, 从而也就确定出泛函的极值。

设性能泛函如式(2-15)所示, $x(t)$ 与 $x^*(t)$ 之间关系如式(2-18)和式(2-19)所示,当末端由 (x_f, t_f) 位置移动到 $(x_f + \delta x_f, t_f + \delta t_f)$ 位置时,产生如下泛函增量:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) dt - \int_{t_0}^{t_f} L(x^*, x^{*6}, t) dt \\ &= \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) dt + \int_{t_0}^{t_f} [L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) - L(x^*, x^{*6}, t)] dt \quad (2-48) \end{aligned}$$

式(2-48)右端第一项,根据积分中值定理可变换为

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) dt = L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) \Big|_{t=t_f + \theta \delta t_f} \delta t_f$$

式中 $0 < \theta < 1$ 。由于函数 $L(\cdot)$ 是连续的,因此

$$L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) \Big|_{t=t_f + \theta \delta t_f} = L(x^*, x^{*6}, t) \Big|_{t=t_f} + \varepsilon_1$$

当 $\delta t_f \rightarrow 0, \delta x_f \rightarrow 0$ 时,有 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$,故

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) dt = L(x^*, x^{*6}, t) \Big|_{t=t_f} \delta t_f + \varepsilon_1 \delta t_f \quad (2-49)$$

对于式(2-48)右端第二项,将被积函数在极值轨线处展成泰勒级数,有

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} [L(x^* + \delta x, x^{*6} + \delta x, t) - L(x^*, x^{*6}, t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x + \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x + \text{HOT} \right] dt \quad (2-50) \end{aligned}$$

对式(2-51)中的第二项进行分部积分,得

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x dt = \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x \right] \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x dt \quad (2-51)$$

将式(2-51)代入式(2-50),所得结果代入式(2-48),同时将式(2-49)代入式(2-48),取泛函增量的线性主部,得泛函的一次变分

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x dt + \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \delta x \right] \Big|_{t_0}^{t_f} + L(x^*, x^{*6}, t) \Big|_{t=t_f} \delta t_f$$

由定理 2-3,令 $\delta J = 0$,得末端变动、 t_f 自由时泛函极值的必要条件

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (2-52)$$

以及

$$\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \right] \Big|_{t_f} \delta x(t_f) - \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \right] \Big|_{t_0} \delta x(t_0) + L(x^*, x^{*6}, t) \Big|_{t=t_f} \delta t_f = 0 \quad (2-53)$$

式(2-52)称为欧拉方程,可见 t_f 自由、末端变动时的欧拉方程形式与 t_f 固定时的欧拉方

程完全相同,这一结论同样适用于有等式约束的泛函极值问题;式(2-53)称为横截条件,除提供求解欧拉方程所需的两点边界值外,还提供了一个确定最优末端时刻 t^* 所需的边界条件。

末端时刻自由、末端状态变动时的横截条件,可分成如下两种情况讨论。

(1) 起点固定,末端自由

由于 $x(t_0) = x_0$,故 $\delta x(t_0) = 0$ 。在末端自由情况下,由式(2-46)知

$$\delta x(t_f) = \delta x_f - x^{(6)}(t_f) \delta t_f$$

将上式及 $\delta x(t_0) = 0$ 代入式(2-53),得

$$\left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_f^T [\delta x_f - x^{(6)}(t_f) \delta t_f] + L(x^*, x^{*6}, t) \Big|_{t_f} \delta t_f = 0$$

整理得

$$\left[L - x^{T(6)} \frac{\partial L}{\partial x} \right]_f \delta t_f + \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_f^T \delta x_f = 0 \quad (2-54)$$

在式(2-54)中,因 δt_f 及 δx_f 任意,故横截条件为

$$\left. \begin{aligned} \left[L - x^{T(6)} \frac{\partial L}{\partial x} \right]_f &= 0 \\ \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_f &= 0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-55)$$

(2) 起点固定,末端受约束

设末端约束方程为

$$x(t_f) = c(t_f)$$

此时, δx_f 不能任意。由式(2-47)知

$$\delta x_f = c^{(6)}(t_f) \delta t_f$$

于是,在式(2-54)基础上,横截条件进一步演化为

$$\left[L - x^{T(6)} \frac{\partial L}{\partial x} \right]_f \delta t_f + \left[\frac{\partial L}{\partial x} \right]_f^T c^{(6)}(t_f) \delta t_f = \left[L + (c^{(6)} x)^{6r} \frac{\partial L}{\partial x} \right]_f \delta t_f = 0 \quad (2-56)$$

在式(2-56)中,因 δt_f 任意,故横截条件为

$$\left. \begin{aligned} \left[L + (c^{(6)} x)^{6r} \frac{\partial L}{\partial x} \right]_f &= 0 \\ x(t_f) &= c(t_f) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (2-57)$$

2.3.3 初始时刻自由时的横截条件

初始时刻自由问题的实质是:末端固定 $x(t_f) = x_f$,初始时刻 t_0 不固定,初始状态 $x(t_0)$ 或自由或受约束。例如,空对地导弹的极值控制,就属于起点受约束而终点固定的变分问题。当飞机发射导弹攻击地面固定军事目标时,为了提高命中率并躲避敌方地面防空炮火,应沿某一条飞行轨迹 $\psi_0(t)$ 飞行,故在发射导弹的初始时刻 t_0 ,导弹运动轨线 $x(t)$ 与飞机俯冲轨线 $\psi_0(t)$ 之间,应满足如下关系: