

# 结构可靠度分析

——方法与程序

张明/著

STRUCTURAL RELIABILITY  
ANALYSIS  
—METHODS AND  
PROCEDURES



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 结构可靠度分析—方法与程序

Structural Reliability Analysis:  
Methods and Procedures

张 明 著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

作为一本结构可靠度分析方法的专著,本书系统介绍了结构可靠度分析的基本概念和主要方法。首先简要介绍了结构随机可靠度的基本概念以明确可靠度分析的目的和意义;之后对结构可靠度分析的几种重要方法进行了详细的阐述,包括一次二阶矩方法、二次二阶矩方法、二次四阶矩方法、渐近积分方法、响应面方法、Monte Carlo 方法,还研究了结构体系可靠度分析方法、基于人工神经网络的结构可靠度分析方法;最后对结构模糊随机可靠度分析方法作了阐述。每章介绍一类方法,每节介绍其中一个相对独立的方法,对于每一个方法均给出了典型的例题和用 MATLAB 软件编写的计算机程序。附录按照字母顺序列出了本书程序中所采用的标识符和 MATLAB 函数,以方便读者阅读本书和使用书中的程序。

兼顾可靠度方法理论和方法实施,理论和实践并举,是本书的重要特色,也使本书具有很强的实用性。本书可供科技工作者、大专院校教师、研究生和高年级本科生使用,也可供工程技术人员参考使用。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

结构可靠度分析:方法与程序—Structural Reliability Analysis: Methods and Procedures/张明著. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-023525-1

. 结... . 张... . 工程结构-结构可靠性-分析 . TU311.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 187001 号

---

责任编辑:沈 建 / 责任校对:李奕萱

责任印制:赵 博 / 封面设计:耕者设计工作室

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

**中国科学院印刷厂** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2009 年 1 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2009 年 1 月第一次印刷 印张: 15 3/4

印数: 1—3 000 字数: 306 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换 新蕾)

# 序

工程结构的安全性是工程设计中的重大问题。结构工程的建造耗资巨大，一旦失效不仅会造成结构本身和人民生命财产的巨大损失，还往往产生难以估量的次生灾害和附加损失。众所周知的 1959 年法国 Malpasset 拱坝失事以及 1963 年意大利 Vajont 水库岩坡的大规模滑坡造成的严重后果，让我们在跨越了近半个世纪后仍然心有余悸；我国的彩虹桥垮塌事件在建设史上成为一件沉痛的事件，所造成的后果让人触目惊心，给人们造成的心灵伤害也久久难以平复。

进入 21 世纪，我国经济继续持续高速发展，工程建设事业正处于蓬勃发展时期。因而，如何吸取历史教训，确保工程建设的安全性，在工程的安全与经济之间选择一个最优的平衡点，是工程界面临的重要问题和挑战。

工程结构在设计、施工、使用过程中具有种种影响结构安全、适用、耐久的不确定性因素。这些不确定性使我们在判断结构是否可靠时，不能用一个简单的“是”或“否”就能衡量，而必须采用以概率形式为基础的可靠度指标来表达。在这样一个背景下，结构可靠度的理论与方法便应运而生。在某种程度上来说，结构可靠度是工程结构设计的基础。我国的《工程结构可靠度设计统一标准》(GB50153—92) 涵盖房屋建筑、铁路、公路、港口、水利水电等土木工程各领域，这一标准以及上述各部门据此编制的设计统一标准和规范，就是以概率理论为基础、以可靠度指标为中心内容进行编写的。

工程实践表明，尽管目前工程结构中的可靠性理论并不是很完善，但由于它比较合理地考虑了工程结构中存在的随机性，并统一地表达成广大工程技术人员容易接受的分项系数形式，因而在工程结构设计中具有越来越重要的地位，其发展对保证工程结构的安全性具有重要性意义。

该书系统地介绍了结构可靠度的分析方法。当今比较成熟的结构可靠度计算方法在书中都有所反映。在内容安排上，该书详细阐述了各种结构可靠度的计算方法，包括常规方法如一次二阶矩方法、Monte Carlo 方法，并介绍了一些新的分析方法如基于人工神经网络的结构可靠度计算方法和模糊随机可靠度分析方法等。从组织结构上来说，该书理论与计算程序并行，在阐述理论和方法的同时，首次尝试给出全部算法的计算程序。在写作特色方面，该书力求阐述清楚书中出现的每一个概念、理论，并期望对读者有所启发。

该书作者张明在清华大学从事可靠度教学多年，在教学中不断探索、精益求精，总结了多年的教学经验和研究成果，完成了该书的写作。这是他近几年辛勤工

作的概括，也是他对目前我国可靠度研究工作的一个较全面的总结和认识。

作者要我为此书写几句话，就是希望让读者们知道这本书的作用和意义。这本书写作全面而具体，既可作为结构可靠度的教材来学习，又可以作为一本结构可靠度设计的实用的参考书，读者可以从中查阅找寻所需的知识和方法，甚至可运用书中的程序于工程结构可靠度的分析与设计。相信读者在学习的过程中，会不断地收获意外的惊喜。



教授，中国科学院院士

# 前 言

本书基于这样一个理念：希望比较全面地给出目前结构可靠度的计算方法，并给出每一种算法的计算程序，既能从理论上清晰阐述，又能在应用上方便理解。如果能够给研究者些许帮助和启发，对于工程界有些许参考价值，将是作者无限的欣慰。本书的书名——“结构可靠度分析——方法与程序”，是对这一理念的最好诠释。

结构可靠度理论是为了解决工程结构设计、施工和使用中存在的 uncertainty 问题而发展起来的，在结构分析和设计中起着重要作用。结构可靠度分析是结构可靠度理论的重要组成部分，又是应用可靠度理论进行结构设计的必要环节。

结构可靠度分析方法可以看作一个完整的系统，在可靠度理论中占有特殊重要的地位。方法的实现既需要借助一般的计算方法，又在很多地方体现出其自身的特点。本书主要围绕结构可靠度分析的内容，对结构可靠度分析方法作一专门的介绍。书中讲述的方法较多，但主要是围绕着结构可靠度分析的解析法和模拟法展开。

结构可靠度分析方法不仅是一个纯粹的理论问题，更重要的是将其应用于解决实际问题。将可靠度分析的理论方法变为计算机程序实现，正是理论向实际迈出的一步。本书的显著特点就是对于每一种分析方法，均提供了说明算法的源程序。作者从开始尝试用计算机程序求解结构可靠度问题，到最终肯定计算机求解这一手段，书中的程序都是经过反复改进得到的，而计算机程序带来的功效也超越了作者最初的期许。作者还欣喜地发现，计算机求解和结构可靠度的基本理论是能够互补的。如果能够恰当地应用，计算结果不但可以很好地阐明理论，还有助于以富有意义的方式进行思考、分析和推理；而反过来，对于理论很好地理解有助于计算机程序的优化改进。

结构可靠度分析及其方法无疑是结构可靠度理论的重点和难点。作者希望通过本书的阐述，使读者能够顺利克服或者绕开方法中存在的困难，把主要精力集中在可靠度理论的本身。读者甚至不必理解方法中间过多的细节，将书中程序直接当作“黑箱”工具来用，将本书作为案头常备的工具书。如果读者在学习可靠度分析方法时，能够很好地运用书中结构清晰、阅读性强的可靠度分析程序，对可靠度理论产生新的认识，有一种“知难行易”之感，那么这也是作者想要达到的效果之一。

本书的内容是基于以上的思考和初衷进行安排的。书中在做了必要的基础知识、计算平台和符号约定等的交代之后，首先介绍了结构可靠度理论的基本框架以

引出结构可靠度分析问题,接着分章节详细讲述了结构可靠度的一次二阶矩方法、二次二阶矩方法、二次四阶矩方法、渐近积分方法、响应面方法、Monte Carlo 方法、结构体系的可靠度分析方法、基于人工神经网络的结构可靠度分析方法和结构模糊随机可靠度分析方法。在每章的内容中,都附有具有代表性的例题以及解决问题的计算机程序。

需要说明的是,结构可靠度分析计算方法很多,本书选取的都是比较成熟的和经过检验效果比较好的方法。

作者多年来一直承担“结构可靠度分析与设计”课程的教学任务,并因此独自获得 2006 年清华大学教学成果二等奖。作者也直接或间接地应用可靠度理论于专业研究领域。本书就是作者对多年来的教学和研究生涯的一个归纳和总结。作者希冀在本书中与大家分享在自己教学科研中的经验与成果。

本书也汇集了众多专家学者的研究成果,有的文献出处无法在参考文献里一一列出,作者在此表示感谢和歉意。

张楚汉院士对作者十分关心,在百忙之中为本书作序,使作者深受感动和鼓舞。作者向他表示由衷的感谢和敬意。

清华大学水利水电工程系的李仲奎、李庆斌、金峰、杨强、马吉明、段云岭、刘天云等教授,都就本书内容和相关研究与作者进行过深入的讨论。清华大学吴清高硕士在随机边界元法研究方面,孙思奥硕士在基于人工神经网络的结构可靠度计算方面中,做了出色的工作。在本书付梓之际,作者对他们表示衷心的感谢。

感谢作者所在单位清华大学水利水电工程系河川枢纽研究所的领导和同事。他们在本书的写作修改过程中给予了作者莫大帮助,他们的支持是作者完成本书的坚强后盾。

感谢作者家人在本书写作期间给予作者的理解和支持。

本书承蒙国家自然科学基金雅砻江水电开发联合研究基金项目(50539090),以及清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室部分资金资助出版,特此致谢。

美国MathWorks®公司为本书的写作提供了最新的产品MATLAB® R2008a,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

张 明

2008 年 8 月 于清华园

# 目 录

序

前言

第 1 章 导言	1
1.1 背景知识	1
1.2 关于程序	2
1.3 内容安排	4
1.4 记法规定	5
第 2 章 结构随机可靠度的基本概念	7
2.1 基本随机变量	7
2.2 结构的极限状态	8
2.3 结构的可靠概率和失效概率	10
2.4 结构的可靠指标	13
2.5 可靠指标与安全系数	15
2.6 可靠指标与分项安全系数	16
第 3 章 结构可靠度的一次二阶矩方法	19
3.1 中心点法	19
3.2 设计验算点法	22
3.3 验算点法: JC 法	26
3.4 验算点法: 映射变换法	29
3.5 验算点法: 实用分析法	33
3.6 相关变量情形: Rosenblatt 变换	37
3.7 相关变量情形: 正交变换	44
3.8 相关变量情形: 广义随机空间	53
3.9 相关变量情形: Nataf 变换	61
第 4 章 结构可靠度的二次二阶矩方法	68
4.1 Breitung 方法	68
4.2 Laplace 渐近方法	77
第 5 章 结构可靠度的二次四阶矩方法	89
5.1 最大熵方法	89

---

5.2	最佳平方逼近法	97
第 6 章	结构可靠度的渐近积分方法	105
6.1	一次渐近积分方法	105
6.2	二次渐近积分方法	109
第 7 章	结构可靠度分析的响应面方法	115
7.1	响应面方法	115
7.2	利用向量投影取样点的响应面法	122
第 8 章	结构体系可靠度的分析方法	130
8.1	结构体系及其可靠度	130
8.2	结构体系失效概率的计算	133
8.3	串联体系和并联体系的失效概率的计算	136
第 9 章	结构可靠度的 Monte Carlo 模拟	143
9.1	随机抽样	143
9.2	结构可靠度的直接 Monte Carlo 模拟	144
9.3	结构可靠度 Monte Carlo 模拟的重要抽样法	148
9.4	用重要抽样法更新一次和二次可靠度	157
9.5	渐近重要抽样法	162
9.6	方向抽样法	174
第 10 章	基于人工神经网络的结构可靠度分析方法	181
10.1	人工神经网络方法	181
10.2	基于神经网络的 Monte Carlo 方法	186
10.3	基于神经网络的一次二阶矩方法	190
10.4	基于神经网络的二次二阶矩方法	194
第 11 章	结构模糊随机可靠度的分析方法	201
11.1	模糊集合论的基本知识	201
11.2	结构的模糊随机可靠度	204
11.3	结构体系的模糊随机可靠度	208
参考文献		215
附录 A	多元正态分布函数的计算	219
附录 B	按字母顺序列出的程序中的标识符	233
附录 C	按字母顺序列出的程序中的 MATLAB 函数参考	235
索引		241

# 第1章 导 言

这是一本关于工程结构可靠度分析方法及程序设计的书。

本书主要讲述各种结构可靠度分析方法，从阐述清楚和应用方便考虑，对所述方法均给出了相应的计算机程序。可靠度分析需要有一定的背景知识，程序的编制和运行也需要一个开发平台和环境，这些涉及的背景知识和开发环境需要事先予以说明。此外，对于本书的内容梗概及章节安排，以及书中所采取的叙述风格，在此也预先作一交待，以有助于读者对本书内容的整体把握，并方便查阅。

## 1.1 背景知识

为了突出结构可靠度分析方法的重点，尽早“书归正传”、切入主题，本书将结构可靠度分析有关的背景知识的叙述压缩到最少，除非必要，一般不介绍所涉及背景知识。

结构随机可靠度分析主要涉及概率计算和统计推断、数值计算方法方面的背景知识，这些内容在几乎所有有关可靠度的书籍中都可以找到<sup>[1~3]</sup>，书中对此不作赘述，假设读者已经具备这些方面的基本知识。

数值计算方法和概率统计是结构可靠度计算的基础。其实，在本书中所涉及的概率统计知识，从广度和深度上，都还是比较有限的。本书将数值计算方法作为一项基本技术来用，因而对于常规的算法及其含义在书中没有叙述。如有感到疑惑之处，读者可以自行查阅有关书籍<sup>[4]</sup>。

本书以 MATLAB 软件作为说明和实施可靠度计算方法的平台。该软件及其数理统计工具箱自带的帮助文档也是了解上述知识的一条快速途径。数值计算方法和概率统计等方面的背景知识介绍、某一具体方法及其实现函数等，在帮助文档中都有比较详细透彻的叙述。只要查询相关的章节或按索引找到相应的函数，再利用帮助文档给出的众多的超链接，就可以获得比较全面详尽的帮助信息。在附录 C 中列出了本书程序用到的所有函数，可以作为函数的一个快速参考。

本书在给出基于人工神经网络的结构可靠度分析方法时，对人工神经网络的基本知识也作了简要概述。将人工神经网络应用于求解结构可靠度时，用到了 MATLAB 的神经网络工具箱。因此，读者可以查阅其他书籍<sup>[5]</sup>，或仿照以上介绍，从神经网络工具箱的帮助文档，来获得更多的相关知识和相应函数的使用方法。

本书在介绍结构模糊随机可靠度的分析方法时，用到了有关模糊数学的基本概念。鉴于模糊数学不像前面提及的数理统计和数值方法那么为读者所熟知，作者对这方面的基础知识作了简单介绍，这对于书中运用到的结构模糊随机可靠度分析已经足够。但如果读者希望了解更多的内容，可以自行查阅相关书籍<sup>[6]</sup>。由于本书用到的模糊数学比较简单，在求解可靠度问题时，将模糊性转化成了随机性，因而没有必要用到 MATLAB 中的模糊逻辑工具箱。

另外，读者还可以从书后所列的索引快速获得关于某个名词术语或概念的定义帮助，从附录 B 和附录 C 中查阅到程序中的标识符和所用到的 MATLAB 及其工具箱的函数。

## 1.2 关于程序

本书的一大特点就是给出所有结构可靠度分析方法的计算机程序，用程序来更好地说明算法。在众多的程序设计语言中，就结构可靠度程序设计而言，有很多理由选择 MATLAB。

(1) MATLAB 是一种面向科学和工程计算的高级语言，现已成为国际公认的最优秀的科技界应用软件。它集成度很高，功能强，使用方便，适用的计算机平台宽，因而被大家广泛接受。强大的科学计算与可视化功能、简单易用的开放式可扩展环境以及多达 40 多个面向不同领域而扩展的工具箱支持，使得它在许多学科领域中成为计算机辅助设计与分析、算法研究和应用开发的基本工具和首选平台。

(2) MATLAB 最突出的特点就是语言简洁紧凑，使用方便灵活。它用更直观的、符合人们思维习惯的代码，代替了 C 和 Fortran 语言的冗长代码。实际上，作者也曾在可靠度的教学和科研中<sup>[7~18]</sup>用各种语言编写计算程序，感到 MATLAB 脚本式的语言比较容易掌握，MATLAB 程序也是最简洁和最清晰的。

(3) MATLAB 程序利用丰富的库函数避开繁杂的子程序编程任务，压缩了一切不必要的编程工作，使编程人员从繁琐的程序代码中解放出来。由于库函数都由本领域的专家编写，用户不必担心函数的可靠性。MATLAB 提供的运算符丰富，它提供了和 C 语言几乎一样多的运算符。这些都有利于快速高效地编写出具有任何复杂功能的程序。

本书就是借助了 MATLAB 的强大功能，将 MATLAB 作为编程平台，解决结构可靠度分析问题。这是作者经多年可靠度教学和研究所做的一次尝试，也是尝试之后作者所推崇的一种手段。

如果将可靠度计算方法比作一个结构，搭建这个结构需要大量基本构件，这里指一些常规计算方法，那么，只要选用 MATLAB 的命令、函数作为结构的标准

构件,就能以高效精确的算法实现复杂结构,而且结构的可靠性也是很高的。这样可以避免很多重复性的劳动,充分利用现有的数学成果,使我们能够尽快地“站在巨人肩上”开展工作。本书利用 MATLAB 强大的科学计算和符号运算功能,轻松跨越繁琐的公式推导和复杂的编程技巧,获得最佳的学习效率。这种方式的目的是把重点放在每一种结构可靠度的分析方法上,而不去抠数学计算上的小节,例如不再需要推导关于每种概率分布所用的具体的公式,不用将注意力集中在书中出现的 Gram-Schmidt 正交化过程处理、矩阵特征值问题等具体方法上,并且不易出错。

本书利用富于启发性的例子说明问题,围绕着许多结构可靠度计算实例编写程序,每个例子都提供了建模和计算所需的 MATLAB 脚本。这些程序的目的之一是为了充分说明算法,阐明分析过程涉及的各个步骤,化解算法中的各个难点。作者没有去编制包罗各种方法、处理各种情况的通用程序,而是紧密结合所介绍的方法,这样做对于深刻理解方法的细节具有很强的启发性。通过这些源程序的引入,作者希望使读者的主要精力不再耗费在编程上,而放在探究可靠度的分析方法上;另外,读者可以利用这些脚本资源做自己想做的事。

由于将大量常规的计算方法问题交由 MATLAB 完成,本书所附的程序都很简洁。通常一个典型的程序大约有数十行代码,非常适合小型计算机。本书的程序大多数在整体结构上具有相似性、通用性,作者也注意使程序规范统一,因此,本书的程序易读懂,易改动,易扩充。每个变量名都可望文生义,很容易“猜”出其含义(参见附录 B)。这些程序只需稍加改造,就可以灵活方便地用来分析别的问题,所需要注意的只是变量概率分布类型、结构功能函数及其导数等。

作者相信,如果利用更为复杂些的 MATLAB 功能,如用符号运算功能来自动完成功能函数求导,还可以使程序更为一般化些,但本书的程序只是为了说明各种算法,仅利用了 MATLAB 的数值运算功能。因此,书中的程序是传统的纯粹数值分析程序,保持了简明性的特点,而且容易移植。

出于说明可靠度计算方法的目的,本书程序尽量避免过于详细的输入和输出操作说明,不在可视化和前后处理方面作过多考虑。在此期望读者能用自己编写的程序进行输入数据的前处理和图形化输出操作。本书的程序一般不加注释,仅在有些值得注意之处作简要说明,并且再次出现时也一律不重复说明。

为了有效地使用本书,读者应该对 MATLAB 软件比较熟悉,包括数据输入、绘图和简单的计算、相关的 MATLAB 的 m 文件等。可能的话,读者可以亲自运行一下书中感兴趣的程序,一定会有所感悟。书中的程序既体现了可靠度分析方法的各个步骤,又包含了全部的计算细节,认真阅读这些程序也是很必要的。

作者所在的清华大学水利水电工程系已购买正版 MATLAB 软件。本书所有程序都在 MATLAB7.6 (R2008a) 版上调试通过。

### 1.3 内 容 安 排

本书仅介绍目前比较成熟的方法,有一些方法<sup>[19, 20]</sup>,因为其不具有明显优势或缺乏实用性、精度较差等缺点,则不予介绍。

本书的具体内容安排如下:

第 1 章作为本书的导言,对书中用到的背景知识作了一个交代,介绍了 MATLAB 软件及本书利用它解决问题的理由,简述了本书的重要内容安排,并对书中出现的数学记法作了约定。

第 2 章给出了结构随机可靠度的基本概念,主要是为了说明结构可靠度分析的任务和在学科中的地位。分别给出了基本随机变量、结构的极限状态、结构可靠度及可靠指标的概念,并将可靠指标与安全系数和分项安全系数作了比较。

第 3 章介绍结构可靠度的一次二阶矩方法,包括中心点法和设计验算点法,在非正态变量处理方面介绍了 JC 法、映射变换法、实用分析法,在变量的相关性处理上介绍了 Rosenblatt 变换法、正交变换法、广义随机空间方法以及 Nataf 变换方法。通常认为,在求解结构可靠度的一次二阶矩方法中,JC 法是应用最广泛的一种方法。

第 4 章围绕结构可靠度的二次二阶矩方法,介绍了 Breitung 方法和 Laplace 渐近方法。对于特定的问题,当结构功能函数的非线性程度较高,利用一次二阶矩方法计算精度欠佳时,可以考虑采用这种方法。

第 5 章围绕结构可靠度的二次四阶矩方法,给出了最大熵方法和最佳平方逼近法。这种方法充分利用了基本随机变量的各阶矩的信息,与二次二阶矩方法从不同的理论体系出发,因而是平行的两种算法,目前无法判断孰优孰劣。

第 6 章描述了结构可靠度的渐近积分方法。这是直接从失效概率的积分定义出发,将积分域边界即失效面作 Taylor 级数的替换,计算结构失效概率的渐近积分的方法。

第 7 章介绍结构可靠度分析的响应面方法。响应面法用假设的简单函数作为结构的功能函数,通过迭代调整函数中的待定参数,一般都能满足实际工程的精度要求,适用于结构的功能函数的解析表达式不明确或很复杂的情形。

第 8 章介绍结构体系可靠度的分析方法。对结构体系及其可靠度作了讨论,并给出了体系可靠度的一般计算表达式,主要讨论了串联体系和并联体系的失效概率的计算方法。

第 9 章阐述结构可靠度的 Monte Carlo 模拟。这是结构可靠度分析的一种最基本的方法,通常也是相对比较准确的方法。本章介绍了 Monte Carlo 模拟的基本方法、重要抽样法、渐近重要抽样法和方向抽样法等方法。

第 10 章给出了基于神经网络的结构可靠度分析方法, 包括基于神经网络的一次二阶矩方法、二次二阶矩方法和 Monte Carlo 方法。这些方法利用神经网络独特的学习能力、适应能力, 可以较好地逼近极限状态方程, 故适于大型复杂结构功能函数为隐式的情形。

第 11 章引入模糊的概念, 考虑到结构失效准则的不明确性以及结构参数的模糊性, 介绍了结构模糊随机可靠度的分析方法。这种方法利用模糊随机事件的概率, 将具有模糊失效准则的结构的模糊随机可靠度问题转化成随机可靠度问题, 适于结构和结构体系的模糊随机可靠度分析。

除了第 1、2 章为本书基本内容和基本概念的介绍, 其他各章均围绕结构可靠度某一种方法展开讨论, 内容相对独立, 读者可以根据所需有选择地进行阅读。

## 1.4 记法规定

书中采用通用的数学符号和记法, 如向量或矩阵用斜黑体字母表示, 上标 T 表示转置等。特别地, 下面的几点规定是值得注意的:

(1) 向量默认为列向量。如,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T = \{X_i\}$  表示一个具有  $n$  个元素的向量。一般约定下标取值从 1 到  $n$ , 其中  $n$  为变量空间的维数。 $\mathbf{X}$  的 2-范数简单地记作  $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$ 。

(2) 函数对所有向量的分量或矩阵的元素的导数, 有时采用向量或矩阵的实体符号来表示。

这种表达方式就是按照向量分量或矩阵元素的顺序依次求导, 并历遍所有分量或元素。下面所列举的是本书用到的几种表达方式的含义。

设  $\mathbf{X}$  为  $n$  维向量,  $g(\mathbf{X})$  为  $\mathbf{X}$  的标量函数, 一阶导数

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}} = \left( \frac{\partial g}{\partial X_1}, \frac{\partial g}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X_n} \right)^T = \left[ \frac{\partial g}{\partial X_i} \right]_{n \times 1}$$

是一个列向量, 即  $g(\mathbf{X})$  的梯度, 可简记为  $\nabla g(\mathbf{X})$ ; 而二阶导数

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{X}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_2 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_n \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_n \partial X_n} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right]_{n \times n}$$

则是一个  $n$  阶对称矩阵, 即  $g(\mathbf{X})$  的 Hesse 矩阵, 可简记为  $\nabla^2 g(\mathbf{X})$ 。

设  $\mathbf{X}$  为  $n$  维向量,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X})$  为  $m$  维向量, 一阶导数

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y_m}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_m}{\partial X_n} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \right]_{m \times n}$$

是一个  $m$  行  $n$  列的矩阵, 即 Jacobi 矩阵, 可记作  $\mathbf{J}_{YX}$ 。

设  $\mathbf{W} = [W_{ij}]_{l \times m}$  为  $l$  行  $m$  列的矩阵,  $e = e(\mathbf{W})$  为  $\mathbf{W}$  的标量函数, 一阶导数

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial W_{11}} & \frac{\partial e}{\partial W_{12}} & \cdots & \frac{\partial e}{\partial W_{1m}} \\ \frac{\partial e}{\partial W_{21}} & \frac{\partial e}{\partial W_{22}} & \cdots & \frac{\partial e}{\partial W_{2m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial e}{\partial W_{l1}} & \frac{\partial e}{\partial W_{l2}} & \cdots & \frac{\partial e}{\partial W_{lm}} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial e}{\partial W_{ij}} \right]_{l \times m}$$

是一个  $l$  行  $m$  列的矩阵。按照本书的这种记法, 有

$$\left( \frac{\partial e}{\partial \mathbf{W}} \right)^T = \left[ \frac{\partial e}{\partial W_{ji}} \right]_{m \times l} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{W}^T} \quad (1.1)$$

设  $\mathbf{W} = [W_{ij}]_{l \times m}$  为  $l$  行  $m$  列矩阵,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{W})$  为  $n$  维向量, 一阶导数

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{W}} = \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial W_{jk}} \right]_{n \times l \times m}$$

是  $n \times l \times m$  个有序数所组成的“立体矩阵”。

(3) 函数一般以小写字母表示, 只有累积分布函数例外。有时对函数名加注下标以突出函数的含义, 或对同一种类的函数加以区别。

例如, 随机向量  $\mathbf{X}$  的联合概率密度函数表示为  $f_X(\mathbf{x})$ , 随机向量为  $\mathbf{X}$  的结构的功能函数表示为  $g_X(\mathbf{X})$ , 函数名中的下标  $X$  均有强调的作用, 明确标示出函数的自变量为  $\mathbf{X}$ 。

上例中如果  $\mathbf{X}$  经过变换成为  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Y})$ , 则  $g_X(\mathbf{X}) = g_X[\mathbf{X}(\mathbf{Y})] = g_Y(\mathbf{Y})$ , 其中函数  $g_X(\cdot)$  与  $g_Y(\cdot)$  均表示同一个结构的功能函数, 但函数形式却不一定相同。这样既能区别不同的函数形式, 又能知晓函数之间的相互关系, 这是这种函数表示法的一个好处。

(4) 符号“□”表示诸如定义、证明、注解或例题等逻辑单元的终止, 但仅在该单元的终止可能和下文不能明显分清时使用。

## 第2章 结构随机可靠度的基本概念

对结构随机可靠度的基本概念的理解和掌握,无论在各种结构设计实践中,还是在结构可靠度的计算中都是十分重要的。关于结构功能函数或极限状态方程以及其中的基本随机变量的讨论,有助于理解结构概率极限状态设计的必要性。而失效概率或可靠指标的确定及其与结构确定性分析的联系,则可以使我们能够实现结构概率极限状态量化设计。结构可靠度分析的这些基本概念,形成了可靠度分析的主要内容。

本书的主要工作就是在基本变量概率统计的基础上,寻求建立结构的功能函数或极限状态方程,并且计算可靠度的各种方法和途径。

### 2.1 基本随机变量

结构可靠度理论是考虑到工程结构设计中存在着诸多不确定性而产生和发展的。不确定性是指出现或发生的结果是不确定的,需要用不确定性理论和方法进行分析和推断。通常将结构设计中影响结构可靠性的不确定性分为随机性、模糊性和知识的不完善性。目前的结构可靠度理论主要讨论的是随机不确定性下的可靠度。

分析结构的可靠度,需要考虑有关的设计参数。结构的设计参数主要分为两大类:一类是施加在结构上的直接作用或引起结构外加变形或约束变形的间接作用,如结构承受的人群、设备、车辆的重量,以及施加于结构的风、雪、冰、土压力、水压力、温度作用等。这些作用引起的结构的内力、变形等称为作用效应或荷载效应。另一类则是结构及其材料承受作用效应的能力,称为抗力,抗力取决于材料强度、截面尺寸、连接条件等。

实际上,各参数的具体数值是未知的,因而可以当作随机变量进行考虑。通常我们可以得到和使用的信息就是随机变量的统计规律。这些统计规律,构成了结构可靠性分析和设计的基本条件和内容。因此,在结构随机可靠性分析和设计中,决定结构设计性能的各参数都是基本随机变量,表示为向量形式,如  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ , 其中  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为第  $i$  个基本随机变量。一般情况下,  $X_i$  的累积分布函数和概率密度函数通过概率分布的拟合优度检验后,认为是已知的,如正态分布、对数正态分布等。

## 2.2 结构的极限状态

整个结构或结构的一部分超过某一特定状态,就不能满足设计规定的某一功能要求,此特定状态称为结构的**极限状态**。结构极限状态是结构工作可靠与不可靠的临界状态。结构的可靠度分析与设计,以结构是否达到极限状态为依据。

极限状态一般可分为以下两类:

### 1. 承载能力极限状态

这种极限状态对应于结构或构件达到最大承载力或不适于继续承载的变形。

当结构或构件出现下列状态之一时,即认为超过了承载能力极限状态:

- (1) 整个结构或结构的一部分作为刚体失去平衡(如倾覆、滑动等)。
- (2) 结构构件或其连接因材料强度被超过而破坏(包括疲劳破坏),或因过度的塑性变形而不适于继续承载。

(3) 结构转变为机动体系。

(4) 结构或结构构件丧失稳定性(如压屈等)。

### 2. 正常使用极限状态

这种极限状态对应于结构或构件达到正常使用和耐久性的某项规定限值。

当结构或构件出现下列状态之一时,即认为超过了正常使用极限状态:

- (1) 影响正常使用或外观的变形。
- (2) 影响正常使用或耐久性能的局部损坏(包括裂缝)。
- (3) 影响正常使用的振动。
- (4) 影响正常的其他特定状态。

以上两种极限状态在结构设计中都应分别考虑,以保证结构具有足够的安全性、耐久性和适用性。通常的做法是先用承载能力极限状态进行结构设计,再以正常使用极限状态进行校核。

根据结构的功能要求和相应极限状态的标志,可建立结构的功能函数或极限状态方程。

设  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  是影响结构功能的  $n$  个基本随机变量,  $\mathbf{X}$  可以是结构的几何尺寸、材料的物理力学参数、结构所受的作用等。称随机函数

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.1)$$

为结构的**功能函数**(或**失效函数**)。规定  $Z > 0$  表示结构处于可靠状态,  $Z < 0$  表示结构处于失效状态,  $Z = 0$  表示结构处于极限状态。这样,对于承载能力极限状态而言,随机变量  $Z$  就表示了结构某一功能的安全裕度。功能函数  $g(\mathbf{X})$  的具体形

式可通过力学分析等途径得到。表示同一意义的功能函数，其形式也不是唯一的，如  $g(\mathbf{X})$  可以用应力形式表达，也可以按内力形式写出。

特别地，方程

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (2.2)$$

称为结构的极限状态方程。它表示  $n$  维基本随机变量空间中的  $n-1$  维超曲面，称为极限状态面(或失效面)。

极限状态面将问题定义域  $\Omega$  划分成为可靠域  $\Omega_r = \{\mathbf{x}|g(\mathbf{x}) > 0\}$  和失效域  $\Omega_f = \{\mathbf{x}|g(\mathbf{x}) \leq 0\}$  两个区域，即

$$Z = g(\mathbf{X}) > 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_r \quad (2.3)$$

$$Z = g(\mathbf{X}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_f \quad (2.4)$$

极限状态曲面是  $\Omega_r$  和  $\Omega_f$  的界限，式 (2.3) 和式 (2.4) 中极限状态无论包含在哪个区域都是可以的。根据对给定问题处理的方便，可以将极限状态的一部分或全部选择为可靠域或失效域。图 2.1 是说明二维的情形。今后在有关的公式中将  $\Omega_r$  和  $\Omega_f$  简单地表示成  $Z > 0$  或  $Z \leq 0$ 。

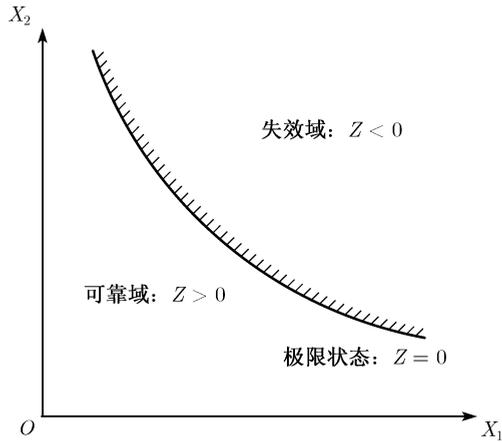


图 2.1 二维定义域和极限状态

只有两个随机变量  $R$  和  $S$  的最简单的功能函数可以表示为

$$Z = g(R, S) = R - S \quad (2.5)$$

相应的极限状态方程为

$$Z = g(R, S) = R - S = 0 \quad (2.6)$$

注意到  $Z$  是一个随机变量，式 (2.2)~ 式 (2.4)、式 (2.6) 都是在一定的概率意义下成立的。

### 2.3 结构的可靠概率和失效概率

结构在规定时间内和规定条件下完成预定功能的能力,称为结构的**可靠性**。结构在规定时间内和规定条件下完成预定功能的概率,称为结构的**可靠度**。结构可靠度是结构可靠性的概率度量。这里的“规定时间”指结构的设计基准期,“规定条件”指结构设计预先确定的施工条件和适用条件,“预定功能”指结构需完成的各项功能要求。

结构完成预定功能的概率用**可靠概率** $p_r$ (或 $p_s$ )表示;相反,结构不能完成预定功能的概率用**失效概率** $p_f$ 表示。结构的可靠与失效是两个不相容事件,它们的和事件是必然事件,即存在以下关系:

$$p_r + p_f = 1 \quad (2.7)$$

因此, $p_r$ 和 $p_f$ 都可用来表示结构的可靠度,有时因计算和表达上的方便而常用 $p_f$ 。结构可靠度分析的主要问题就是处理结构的随机信息以确定结构的失效概率。

考虑结构功能函数 $Z$ 为连续随机变量,设 $Z$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)$ ,由可靠概率和失效概率的意义可知

$$p_r = \Pr(Z > 0) = \int_0^{+\infty} f_Z(z) dz \quad (2.8)$$

$$p_f = \Pr(Z \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz \quad (2.9)$$

设基本随机变量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 的联合概率密度函数为 $f_X(\mathbf{x}) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,联合累积分布函数为 $F_X(\mathbf{x}) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,则结构的失效概率可表示为

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{Z \leq 0} dF_X(\mathbf{x}) = \int_{Z \leq 0} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_{Z \leq 0} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

若各 $X_i$ 相互独立, $X_i$ 的概率密度函数为 $f_{X_i}(x_i)$ ,则

$$p_f = \int \cdots \int_{Z \leq 0} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.11)$$

对于式(2.5)所示结构功能函数 $g(R, S)$ ,设 $R$ 和 $S$ 的联合概率密度函数为 $f_{RS}(r, s)$ ,联合累积分布函数为 $F_{RS}(r, s)$ ,失效域 $\Omega_f$ 简单地以 $R \leq S$ 表示,则

$$p_f = \Pr(R \leq S) = \iint_{R \leq S} dF_{RS}(r, s) = \iint_{R \leq S} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (2.12)$$

若  $R$  和  $S$  相互独立, 其概率密度函数分别为  $f_R(r)$  和  $f_S(s)$ , 累积分布函数分别为  $F_R(r)$  和  $F_S(s)$ , 则

$$\begin{aligned} p_f &= \Pr(R \leq S) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) f_S(s) dr ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s) f_S(s) ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

或

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_r^{+\infty} f_R(r) f_S(s) ds dr = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr \quad (2.14)$$

**例 2.1** 某结构构件正截面强度的功能函数为  $Z = R - S$ , 其中抗力  $R$  服从对数正态分布, 荷载效应  $S$  服从极值 I 型分布, 其均值和变异系数分别为  $\mu_R = 100 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_R = 0.12$ ;  $\mu_S = 50 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $V_S = 0.15$ 。求构件的失效概率  $p_f$ 。

**解**  $R$  服从对数正态分布, 其概率密度函数和累积分布函数分别为

$$f_{\ln}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\zeta r} \exp\left[-\frac{(\ln r - \xi)^2}{2\zeta^2}\right], \quad r > 0 \quad (2.15)$$

$$F_{\ln}(r) = \Phi\left(\frac{\ln r - \xi}{\zeta}\right), \quad r > 0 \quad (2.16)$$

其中  $\Phi(\cdot)$  表示标准正态分布函数, 其定义参见式 (2.29); 参数

$$\begin{cases} \xi = \mu_{\ln R} = \ln \frac{\mu_R}{\sqrt{1 + V_R^2}} \\ \zeta = \sigma_{\ln R} = \sqrt{\ln(1 + V_R^2)} \end{cases} \quad (2.17)$$

$S$  服从最大值型的极值 I 型分布 (Gumbel 分布), 其概率密度函数和累积分布函数分别为

$$f_{\text{evI}}(s) = \alpha \exp\{-\alpha(s - u) - \exp[-\alpha(s - u)]\} \quad (2.18)$$

$$F_{\text{evI}}(s) = \exp\{-\exp[-\alpha(s - u)]\} \quad (2.19)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sigma_S} \\ u = \mu_S - \frac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \quad (2.20)$$

此处  $\gamma = 0.5772156649\dots$  为 Euler 常数,  $\mu_S$  和  $\sigma_S$  分别表示最大值随机变量  $S$  的均值和标准差。

将式 (2.15)~ 式 (2.20) 分别代入式 (2.13) 和式 (2.14), 可以算得该结构构件的失效概率  $p_f$ 。计算程序的清单如下:

---

Program of Example 2.1

---

```
clear; clc;
muX = [100;50]; cvX = [0.12;0.15]; sigmaX = cvX.*muX;
sLn = sqrt(log(1+(sigmaX(1)/muX(1))^2));
mLn = log(muX(1))-sLn^2/2;
aEv = sqrt(6)*sigmaX(2)/pi;      % reciprocal of alpha
uEv = -psi(1)*aEv-muX(2);      % negative u
pF1 = quadgk(@(s)logncdf(s,mLn,sLn).*evpdf(-s,uEv,aEv),-Inf,Inf)
pF2 = quadgk(@(r)evcdf(-r,uEv,aEv).*lognpdf(r,mLn,sLn),-Inf,Inf)
```

---

式 (2.13) 和式 (2.14) 的程序运行结果均为  $p_f = 5.9851 \times 10^{-4}$ 。

需要指出的是, 对于所有的概率密度函数和累积分布函数, 都应当理解为其变量能够取全部实数。对数正态分布情形的式 (2.15) 和式 (2.16) 只是一种简洁的表示, 还应当认为当变量  $r \leq 0$  时有  $f_{\ln}(r) = 0$  和  $F_{\ln}(r) = 0$ 。事实上, MATLAB 就是按照这种方式处理概率密度函数和累积分布函数的。□

关于本书定义的最大值型的极值 I 型分布的计算, MATLAB 的数理统计工具箱提供了两个途径, 即最小值型的极值 I 型分布和广义极值分布。

首先需要指出的是, 最大值和最小值分布是由一定的对称条件相互联系的。随机变量  $X$  的最大值  $X_{\max}$  和最小值  $X_{\min}$  均为随机变量, 有其概率分布, 设其概率密度函数分别为  $f_{X_{\max}}(x)$  和  $f_{X_{\min}}(x)$ , 累积分布函数分别为  $F_{X_{\max}}(x)$  和  $F_{X_{\min}}(x)$ , 在极值统计学中已证明存在以下对称性原理<sup>[1]</sup>:

$$f_{X_{\max}}(x) = f_{X_{\min}}(-x) \quad (2.21)$$

$$F_{X_{\max}}(x) = 1 - F_{X_{\min}}(-x) \quad (2.22)$$

通过对称性原理式 (2.21) 或式 (2.22), 某一变量  $X$  的最大值的概率密度函数或累积分布函数, 可以从其负的最小值的概率密度函数或残存函数 (survival function, 即累积分布函数的补函数) 得到。

MATLAB 数理统计工具箱提供的最小值型的极值 I 型分布概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\alpha'} \exp \left[ \frac{x - u'}{\alpha'} - \exp \left( \frac{x - u'}{\alpha'} \right) \right] \quad (2.23)$$

其中,  $u'$  和  $\alpha' > 0$  为参数。利用式 (2.23), 可推得相应的累积分布函数为

$$F(x) = 1 - \exp \left[ -\exp \left( \frac{x - u'}{\alpha'} \right) \right] \quad (2.24)$$

比较式 (2.23) 与式 (2.18), 可知  $\alpha' = 1/\alpha$ ,  $u' = -u$ 。注意到参数间的这种关系, 也很容易验证极值 I 型分布的最大值型和最小值型满足对称性原理。

由以上分析得知,当利用第一种途径时,需应用对称性原理并考虑参数的不同作必要的变换。对于本书的最大值型极值 I 型分布,其概率密度函数为  $f(x|u, \alpha)$ , 累积分布函数为  $F(x|u, \alpha)$ , 则当调用 MATLAB 的最小值型极值 I 型分布相应函数作计算时,须考虑的相应函数分别为  $f(-x|-u, 1/\alpha)$  和  $1 - F(-x|-u, 1/\alpha)$ 。在本书的程序中,已事先分别用变量  $\mathbf{uEv}$  表示  $-u$ ,  $\mathbf{aEv}$  表示  $1/\alpha$ , 则只需要正确应用对称性原理就可以了。

MATLAB 数理统计工具箱提供的广义极值分布[参见式 (4.30) 和式 (4.31)], 其形状参数  $m_1 = 0$  的极限情形对应于最大值极值 I 型分布, 此时概率密度函数和累积分布函数分别为

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_1} \exp \left\{ - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) - \exp \left[ - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \right] \right\} \quad (2.25)$$

$$F(x) = \exp \left\{ - \exp \left[ - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \right] \right\} \quad (2.26)$$

将式 (2.25) 和式 (2.26) 分别与式 (2.18) 和式 (2.19) 作比较, 可知只需注意到  $u_1 = u$  和  $\alpha_1 = 1/\alpha$ , 即可直接利用 MATLAB 的广义极值分布的有关函数, 如概率密度函数 `gevpdf`、累积分布函数 `gevcdf` 等作本书定义的极值 I 型分布的计算。

在上述两种途径中, 本书采用同为极值 I 型分布的最小值型形式来处理最大值型形式。广义极值分布的重要作用并不在于计算最大值型极值 I 型分布, 而是由极值统计数据来自动决定其极值分布类型。

## 2.4 结构的可靠指标

基本随机变量的联合概率密度函数难以得到, 计算多重积分也非易事, 因此通常不用上节的直接积分方法计算失效概率。通过引入与失效概率有对应关系的可靠指标, 便是具有足够精度的简便途径。

由式 (2.9) 知, 结构的失效概率  $p_f$  取决于功能函数  $Z$  的分布形式。不妨假定  $Z$  服从正态分布, 其均值为  $\mu_Z$ , 标准差为  $\sigma_Z$ , 表示为  $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z)$ 。此时  $Z$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp \left[ - \frac{(z - \mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2} \right] \quad (2.27)$$

其曲线如图 2.2 所示。  $p_f$  为图 2.2 概率密度曲线下阴影部分的面积。

通过变换  $Y = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z$ , 可以将  $Z$  转换为标准正态分布变量  $Y \sim N(0, 1)$ , 其概率密度函数和累积分布函数分别为

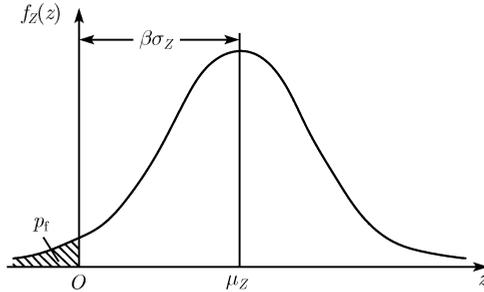


图 2.2 失效概率和可靠指标的关系

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \quad (2.28)$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(y) dy \quad (2.29)$$

将式 (2.27) 代入式 (2.9), 并注意到式 (2.28) 和式 (2.29), 此时结构的失效概率为

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z - \mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}} \varphi(y) dy = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

由图 2.2 可见, 可以用标准差  $\sigma_Z$  度量原点  $O$  到平均值  $\mu_Z$  的距离, 即

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (2.31)$$

$\beta$  是一个无量纲数, 称为结构的**可靠性指标**, 简称**可靠指标**。因此, 式 (2.30) 可表示成

$$p_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (2.32)$$

图 2.2 和式 (2.32) 给出了  $\beta$  与失效概率  $p_f$  之间的一一对应关系,  $\beta$  与可靠概率  $p_r$  的关系为

$$p_r = \Phi(\beta) \quad (2.33)$$

式 (2.32) 和式 (2.33) 是在功能函数  $Z$  服从正态分布的条件下建立的, 如  $Z$  不服从正态分布, 它们不再精确成立, 但通常仍能给出比较准确的结果。事实上, 当  $p_f \geq 0.001$  (或  $\beta \leq 3.0902$ ) 时,  $p_f$  的计算结果对  $Z$  的分布形式不敏感, 因而可以不考虑基本随机变量  $\mathbf{X}$  的实际分布类型, 而式 (2.32) 可使计算大为简化, 又能满足工程上的精度要求。

当结构的失效概率较小或可靠指标较大时,例如工程结构的承载能力可靠度要求就比较大<sup>[21, 22]</sup>,在计算结构的可靠度时必须考虑功能函数的概率分布形式。

如果功能函数  $Z = R - S$ , 假定  $R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$ ,  $S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$ , 由于  $Z$  是  $R$  和  $S$  的线性函数,  $Z$  也服从正态分布,  $\mu_Z = \mu_R - \mu_S$ ,  $\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$ , 于是按照式 (2.31), 可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.34)$$

如果功能函数的形式为  $Z = \ln R - \ln S$ ,  $R$  和  $S$  均服从对数正态分布, 即  $\ln R \sim N(\mu_{\ln R}, \sigma_{\ln R})$ ,  $\ln S \sim N(\mu_{\ln S}, \sigma_{\ln S})$ , 则  $Z$  也服从正态分布, 根据式 (2.34) 和式 (2.17), 可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_{\ln R} - \mu_{\ln S}}{\sqrt{\sigma_{\ln R}^2 + \sigma_{\ln S}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\ln[(1+V_R^2)(1+V_S^2)]}} \ln \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \sqrt{\frac{1+V_S^2}{1+V_R^2}} \right) \quad (2.35)$$

## 2.5 可靠指标与安全系数

早期结构设计所采用的安全系数  $n$  定义为一个抗力  $r$  与一个相应的荷载效应  $s$  的比值, 即

$$n = \frac{r}{s} \quad (2.36)$$

当  $n > 1$ , 即  $r > s$ , 说明结构对应于可靠域内的一个点, 而  $n \leq 1$  说明结构对应于失效域内的一个点。这在某种程度上说明  $n$  的大小是可靠度的度量。然而, 安全系数依赖于抗力  $r$  的定义, 是随  $r$  的计算公式变化的, 如  $r$  用力或应力时,  $n$  值就可能不唯一。此外, 安全系数没有定量地考虑抗力和荷载效应的随机性, 而是靠经验或工程判断的方法取值。

考虑抗力  $R$  和荷载效应  $S$  为随机变量, 则按式 (2.36) 定义的

$$N = \frac{R}{S} \quad (2.37)$$

是一个随机变量, 结构的可靠概率为

$$p_r = \Pr(N > 1) = \Pr(R > S) \quad (2.38)$$

与安全系数  $n$  自身不同, 可靠概率  $p_r$  不随  $R$  的定义而变化。

以式 (2.37) 为基础, 称  $R$  的均值  $\mu_R$  与  $S$  的均值  $\mu_S$  之比为中心安全系数  $n_c$ , 即

$$n_c = \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad (2.39)$$

显然, 中心安全系数没有考虑  $R$  和  $S$  的离散性。

如果结构的功能函数为  $Z = R - S$ , 其中  $R$  和  $S$  均服从正态分布, 利用式 (2.34) 和式 (2.39), 并注意到变异系数的意义, 可知结构的可靠指标为

$$\beta = \frac{n_c - 1}{\sqrt{n_c^2 V_R^2 + V_S^2}} \quad (2.40)$$

由式 (2.40) 可以解出中心安全系数为 (舍去一无意义的解)

$$n_c = \frac{1 + \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2} - \beta^2 V_R^2 V_S^2}{1 - \beta^2 V_R^2} \quad (2.41)$$

注意, 式 (2.41) 成立的条件是  $V_R < 1/\beta$ , 造成这一限制的原因是正态分布将事件  $R < 0$  赋予了正的概率。 $V_R$  适当小时, 误差不明显, 但  $V_R$  不是远小于  $1/\beta$  时,  $R$  的正态分布模型会因误差过大不再适用。

如果功能函数为  $Z = \ln R - \ln S$ ,  $R$  和  $S$  均服从对数正态分布, 利用式 (2.35) 和式 (2.39), 可知

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]}} \ln \left( n_c \sqrt{\frac{1 + V_S^2}{1 + V_R^2}} \right) \quad (2.42)$$

由式 (2.42) 解得

$$n_c = \sqrt{\frac{1 + V_R^2}{1 + V_S^2}} \exp\{\beta \sqrt{\ln[(1 + V_R^2)(1 + V_S^2)]}\} \quad (2.43)$$

由式 (2.41) 和式 (2.43) 可知, 对于一定的结构可靠度  $\beta$ , 中心安全系数  $n_c$  会随  $V_R$  和  $V_S$  大幅变化。

安全系数设计法中实际结构的安全系数不得小于某一限值。同样, 结构可靠度设计中也规定了相应的目标可靠指标<sup>[21, 22]</sup>, 在设计基准期内结构的可靠指标不得小于目标可靠指标。

## 2.6 可靠指标与分项安全系数

目前结构设计常采用分项安全系数的设计表达式, 它是在功能函数

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0 \quad (2.44)$$

的基础上, 将  $X_i$  的均值  $\mu_{X_i}$  乘以系数  $\gamma_{X_i}$  后, 再利用适当的  $p_f = \Pr(Z \leq 0)$  的要求得到的。这些系数  $\gamma_{X_i}$  称为分项安全系数, 简称分项系数。

将非线性功能函数  $Z$  在均值点 (或称中心点)  $\boldsymbol{\mu}_X = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})^T$  处展开成 Taylor 级数并保留至一次项, 即

$$Z \approx g(\boldsymbol{\mu}_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial X_i} (X_i - \mu_{X_i}) \quad (2.45)$$

则  $Z$  的均值  $\mu_Z$  和方差  $\sigma_Z^2$  可分别表示为

$$\mu_Z \approx g(\boldsymbol{\mu}_X) = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (2.46)$$

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial X_i} \right]^2 \sigma_{X_i}^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial X_i} \right]^2 V_{X_i}^2 \mu_{X_i}^2 \quad (2.47)$$

式中,  $\sigma_{X_i}$  为  $X_i$  的标准差;  $V_{X_i} = \sigma_{X_i} / \mu_{X_i}$  为  $X_i$  的变异系数。

式 (2.47) 显示  $Z$  的标准差  $\sigma_Z$  是  $\sigma_{X_i}$  或  $\mu_{X_i}$  的非线性函数, 若存在适当的分离函数  $\varphi_{X_i}$  可将  $\sigma_Z$  分离并线性化,  $\sigma_Z$  可表示为

$$\sigma_Z = \sum_{i=1}^n \varphi_{X_i} \sigma_{X_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_{X_i} V_{X_i} \mu_{X_i} \quad (2.48)$$

将式 (2.46) 和式 (2.48) 代入可靠指标  $\beta$  的定义式 (2.31), 得

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sum_{i=1}^n \varphi_{X_i} V_{X_i} \mu_{X_i}} \quad (2.49)$$

在式 (2.49) 中合并含有  $\mu_{X_i}$  的项, 则  $\mu_{X_i}$  的系数就是所要寻求的与之相应的分项安全系数  $\gamma_{X_i} = \gamma_{X_i}(\beta, V_{X_i}, \varphi_{X_i})$ 。当然,  $\gamma_{X_i}$  的函数形式还取决于功能函数  $Z$ 。如果  $Z$  为非线性函数, 可以利用式 (2.46) 来近似计算  $\mu_Z$ 。与中心安全系数  $n_c$  一样, 各分项安全系数  $\gamma_{X_i}$  与可靠指标  $\beta$  有关。

如果功能函数为  $Z = R - S$ , 利用式 (2.34) 和式 (2.49), 得

$$\begin{aligned} \mu_R - \mu_S &= \beta \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \beta(\varphi_R \sigma_R + \varphi_S \sigma_S) \\ &= \beta(\varphi_R V_R \mu_R + \varphi_S V_S \mu_S) \end{aligned} \quad (2.50)$$

移项整理后, 按上述方法得到分项系数

$$\begin{cases} \gamma_R = 1 - \varphi_R V_R \beta \\ \gamma_S = 1 + \varphi_S V_S \beta \end{cases} \quad (2.51)$$

其中分离函数

$$\begin{cases} \varphi_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\sigma_R}{\sigma_Z} \\ \varphi_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\sigma_S}{\sigma_Z} \end{cases} \quad (2.52)$$

于是, 得到设计表达式为

$$\gamma_R \mu_R \geq \gamma_S \mu_S \quad (2.53)$$

如果功能函数为  $Z = R - G - Q$ , 其中  $R$  为抗力,  $G$  为永久荷载,  $Q$  为可变荷载, 仿照上述推导, 可以得到设计表达式为

$$\gamma_R \mu_R \geq \gamma_G \mu_G + \gamma_Q \mu_Q \quad (2.54)$$

式中分项系数

$$\begin{cases} \gamma_R = 1 - \varphi_R V_R \beta \\ \gamma_G = 1 + \varphi_G V_G \beta \\ \gamma_Q = 1 + \varphi_Q V_Q \beta \end{cases} \quad (2.55)$$

其中

$$\begin{cases} \varphi_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_G^2 + \sigma_Q^2}} = \frac{\sigma_R}{\sigma_Z} \\ \varphi_G = \frac{\sigma_G}{\sigma_Z} \\ \varphi_Q = \frac{\sigma_Q}{\sigma_Z} \end{cases} \quad (2.56)$$

通过适当地选择分离函数, 可确定分项安全系数。对比式 (2.41) 和式 (2.51), 对于不变的  $\beta$  值, 当  $R$  和  $S$  的变异系数  $V_R$  和  $V_S$  改变时, 分项安全系数的变化远小于中心安全系数的变化。而且如果给定结构的整体或各处“均匀”的可靠指标值, 则结构对于不同荷载的分项安全系数随之可以确定; 反之, 如果随意规定相应于各种荷载的分项系数, 则结构的可靠指标会有不同的结果。因此, 在现行规范的分项系数设计表达式中, 仅对相应于不同安全等级和失效模式的结构规定不同的可靠指标, 则相应于此可靠指标的各分项系数取作相对固定的常值, 而确定分项系数就需对结构抗力和荷载效应进行统计并求取结构的可靠度。

## 第3章 结构可靠度的一次二阶矩方法

结构的可靠指标比较直观而且便于实际应用。它是在功能函数服从正态分布的条件下定义的,在此条件下与失效概率有精确的对应关系。对于任意分布的基本随机变量且任意形式的功能函数,功能函数服从正态分布的条件通常不能满足。此时无法直接计算结构的可靠指标,需要研究可靠指标的近似计算方法。

将非线性功能函数展开成 Taylor 级数并取至一次项,并按照可靠指标的定义形成求解方程,就产生了求解可靠度的一次二阶矩法。这种方法只用到基本变量的均值和方差,是计算可靠度的最简单、最常用的方法,其他方法大都以此为基础。掌握一次可靠度方法,能够加深对可靠指标概念的理解,也便于其他计算方法的研究。

计算可靠度时,基本随机变量分布概型及其相关性需要作适当考虑。一次二阶矩法分中心点法和设计验算点法。中心点法不顾及变量的概率分布;基本的验算点法<sup>[23]</sup>只处理正态随机变量,JC法<sup>[24]</sup>、映射法<sup>[25]</sup>和实用分析法<sup>[26, 27]</sup>还能够处理其他概率分布随机变量。

在处理随机变量的相关性方面,可靠度计算方法可以利用理论上最为完备的 Rosenblatt 变换法<sup>[28]</sup>,以及有一定近似性,如认为非正态变量正态化基本不改变变量的相关性的正交变换法<sup>[29]</sup>和广义随机空间分析法<sup>[30, 31]</sup>,也可以利用 Nataf 变换<sup>[32]</sup>对此进行改进,以计及正态化后变量相关性的改变。

### 3.1 中心点法

设结构的功能函数具有一般形式,即

$$Z = g_X(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

其中基本随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  的各个分量相互独立,其均值为  $\boldsymbol{\mu}_X = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})^T$ , 标准差为  $\boldsymbol{\sigma}_X = (\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \dots, \sigma_{X_n})^T$ 。

将功能函数  $Z$  在均值点(或称中心点) $\mathbf{X}$ 处展开成 Taylor 级数并保留至一次项,即

$$Z \approx Z_L = g_X(\boldsymbol{\mu}_X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_X(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial X_i} (X_i - \mu_{X_i}) \quad (3.2)$$

则  $Z$  的均值和方差可分别表示为

$$\mu_Z \approx \mu_{Z_L} = g_X(\boldsymbol{\mu}_X) \quad (3.3)$$

$$\sigma_Z^2 \approx \sigma_{Z_L}^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial X_i} \right]^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (3.4)$$

将式 (3.3) 和式 (3.4) 代入式 (2.31), 得到结构的可靠指标  $\beta$  近似为

$$\beta_c = \frac{\mu_{Z_L}}{\sigma_{Z_L}} = \frac{g_X(\boldsymbol{\mu}_X)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g_X(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial X_i} \right]^2 \sigma_{X_i}^2}} \quad (3.5)$$

上述计算非线性功能函数  $Z$  的近似均值  $\mu_{Z_L}$  和近似标准差  $\sigma_{Z_L}$  所用的 Taylor 级数方法通常称为  $\delta$  方法<sup>[33]</sup>, 工程师通常称式 (3.4) 为误差传播公式。这种方法将功能函数  $Z$  在随机变量  $\mathbf{X}$  的均值点展成 Taylor 级数并取一次项, 利用  $\mathbf{X}$  的一阶矩 (均值) 和二阶矩 (方差) 计算  $Z$  的可靠度, 所以称为均值一次二阶矩法或中心点法。当已知  $\mathbf{X}$  的均值和方差时, 可用此法方便地估计结构可靠指标的近似值  $\beta_c$ 。但此法对于相同意义但不同形式的极限状态方程, 可能会给出不同的可靠指标  $\beta_c$ 。这是因为中心点  $\boldsymbol{\mu}_X$  不在极限状态面上, 在  $\boldsymbol{\mu}_X$  处作 Taylor 展开后的超曲面 ( $Z_L = 0$  是超平面) 可能会明显偏离原极限状态面。

此外, 中心点法没有利用基本随机变量的概率分布, 只利用了随机变量的前两阶矩, 这也是它明显的不足之处。

中心点法计算简便, 若分析精度要求不太高, 仍有一定的实用价值。在选择功能函数时, 可尽量选择线性化程度较好的形式, 以便减小非线性函数的线性化带来的误差。

**例 3.1** 圆截面直杆承受轴向拉力  $P = 100 \text{ kN}$ 。设杆的材料的屈服极限  $f_y$  和直径  $d$  为随机变量, 其均值和标准差分别为  $\mu_{f_y} = 290 \text{ N/mm}^2$ ,  $\sigma_{f_y} = 25 \text{ N/mm}^2$ ;  $\mu_d = 30 \text{ mm}$ ,  $\sigma_d = 3 \text{ mm}$ 。求杆的可靠指标。

**解** 此杆的极限状态方程为

$$Z = g(f_y, d) = 0 \quad (a)$$

由式 (3.5), 得杆的可靠指标

$$\beta_c = \frac{g(\mu_{f_y}, \mu_d)}{\sqrt{\left[ \frac{\partial g(\mu_{f_y}, \mu_d)}{\partial f_y} \right]^2 \sigma_{f_y}^2 + \left[ \frac{\partial g(\mu_{f_y}, \mu_d)}{\partial d} \right]^2 \sigma_d^2}} \quad (b)$$

以轴力表示的极限状态方程为

$$Z = g(f_y, d) = \frac{\pi d^2}{4} f_y - P = 0 \quad (c)$$

将式 (c) 中的  $g(f_y, d)$  代入式 (b) 并化简, 得杆的可靠指标

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{\pi \mu_d^2 \mu_{f_y} - 4P}{\pi \mu_d \sqrt{\mu_d^2 \sigma_{f_y}^2 + 4 \mu_{f_y}^2 \sigma_d^2}} \\ &= \frac{\pi \times 30^2 \times 290 - 4 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 30 \sqrt{30^2 \times 25^2 + 4 \times 290^2 \times 3^2}} = 2.3517 \end{aligned}$$

以应力表示的极限状态方程为

$$Z = g(f_y, d) = f_y - \frac{4P}{\pi d^2} = 0 \quad (d)$$

将式 (d) 中的  $g(f_y, d)$  代入式 (b) 并化简, 得杆的可靠指标

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{\pi \mu_{f_y} \mu_d^3 - 4P \mu_d}{\sqrt{\pi^2 \sigma_{f_y}^2 \mu_d^6 + 64 P^2 \sigma_d^2}} \\ &= \frac{\pi \times 290 \times 30^3 - 4 \times 100 \times 10^3 \times 30}{\sqrt{\pi^2 \times 25^2 \times 30^6 + 64 \times 100^2 \times 10^6 \times 3^2}} = 3.9339 \end{aligned}$$

对同一问题, 采用不同的功能函数形式, 中心点法两次计算所得的可靠指标值明显不同。但是, 中心点法相对很简单, 它的计算机程序则更为简单, 甚至无需计算机程序亦可作计算。为了用程序说明算法的完整性, 也为了循序渐进地说明 MATLAB 程序的编制和使用方法, 这里还是给出中心点法的计算程序。

在计算机程序中, 除了功能函数  $Z = g(\mathbf{X})$  的表达式外, 功能函数的梯度  $\nabla g(\mathbf{X})$  的表达式可能也要经常使用。如果利用 MATLAB 软件的符号运算功能, 则  $\nabla g(\mathbf{X})$  的显式形式是不必要的, 但如 1.2 节所述, 本书不准备这样做。

由式 (c), 可得

$$\nabla g(f_y, d) = \left( \frac{\partial g}{\partial f_y}, \frac{\partial g}{\partial d} \right)^T = \left( \frac{\pi}{4} d^2, \frac{\pi}{2} f_y d \right)^T$$

对应于式 (d), 有

$$\nabla g(f_y, d) = \left( 1, \frac{8P}{\pi d^3} \right)^T$$

程序清单如下: