方国华　黄显峰　编著

多目标决策理论、方法及其应用

科学出版社

河海大学研究生教育创新计划系列教学用书

多目标决策理论、方法及其应用

方国华　黄显峰　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

多目标决策是现代决策科学的重要组成部分。本书全面系统地介绍了多目标决策的理论与方法及其在水利水电规划与管理工作中的应用。全书共8章。第1章绪论;第2章介绍多目标决策基本理论;第3章介绍非劣解生成技术;第4章和第5章分别介绍离散和连续多目标决策技术;第6章介绍发展中的多目标决策方法;第7章和第8章分别介绍多目标决策方法在区域水资源规划和水库调度中的实际应用。

本书可作为高等院校水利类、工程管理类等相关专业的研究生教材,也可作为水利水电工程技术人员、涉及管理决策领域的技术人员和管理人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

多目标决策理论、方法及其应用/方国华,黄显峰编著.—北京:科学出版社,2011
ISBN 978-7-03-030487-2

Ⅰ.①多… Ⅱ.①方…②黄… Ⅲ.①多目标决策-研究生-教材 Ⅳ.①C934

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第038353号

责任编辑:周 炜 房 阳 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:赵 博 / 封面设计:鑫联必升

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2011年4月第一次印刷 印张:14 3/4
印数:1—3 000 字数:300 000

定价:50.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

一般来说，系统方案的选择若仅取决于单个目标，则称这类决策问题为单目标决策，或称为单目标最优化。若系统方案的选择取决于多个目标的满足程度，则称这类决策问题为多目标决策，或称为多目标最优化。

多目标决策方法是从20世纪70年代中期发展起来的一种决策分析方法，它是在系统规划、设计和制造等阶段为解决当前或未来可能发生的问题，在若干可选的方案中选择和决定最佳方案的一种分析过程。在社会经济系统的研究控制过程中，我们所面临的系统决策问题常常是多目标的，各目标之间存在着相互竞争和矛盾，这使得决策过程相当复杂，决策者常常难以作出决策。这就需要应用多目标决策的理论与方法。目前，多目标决策方法已广泛地应用于资源利用、能源、环境、经济管理等领域。

多目标决策问题的解一般不是唯一的，这是因为不可能同时获得各个目标的绝对最优解。因此，多目标问题的解是由向量优化问题的“非劣性”所支配的，在数学规划中通常称之为非劣解或非控解，一些统计学者和经济学家称之为有效解，而福利经济学家称之为 Pareto 最优解。在一定条件下，取得多目标的“最优”解，则称之为最佳均衡解。粗略地说，就是决策者认为最满意的解。

向量优化理论和效用理论是多目标决策的两个基本理论。向量优化理论是生成多目标问题的非劣解的基础。在非劣解生成之后，如何从中选出最终解（或方案），在很大程度上取决于决策者对某个方案的偏好（喜爱）、价值观和对风险的态度。测度这种偏好或价值的尺度就是所谓的效用。它是能用实数表示决策者偏好程度的量化指标，或量化的度量。当各方案的效用确定后，就可比较、评价各个方案的优劣，从而作出最终的抉择。

多目标决策问题只能从非劣解集中选出最佳的均衡解，从而最大限度地满足各个目标的要求。因此，求解多目标优化问题的技术之一是直接生成问题的非劣解，称为非劣解生成技术。直接生成非劣解方法的特点大多数是首先将向量优化问题转化为标量优化问题，然后应用求解标量优化问题的现有方法，生成多目标问题的非劣解集。但是有的非劣解生成技术，如多目标单纯形法，就无需通过转化为单目标问题去求解。这类生成非劣解的方法，在生成非劣解后，都是由决策者从非劣解集中选出最佳均衡解，作为最终决策。

在现实问题中，方案有限的问题是很多的，从反映多目标问题的特性来看，决策变量可能是连续的，也可能是离散的。需要研究离散和连续多目标决策技术。

另外，随着决策科学的迅速发展，诞生了各种复杂决策问题的数学模型和决策理论，使得多目标决策方法也得到了发展，如模糊综合评判、物元分析法、投影寻踪法、模糊优选法等，同时也出现了一些智能算法，如遗传算法，这些方法使得多目标决策方法的运用范围更加广泛，更加有效。

为了很好地适应解决生产实际中多目标决策问题和满足研究生教学的需要，我们在总结过去多年教学和科研工作经验的基础上，编写了本书。

本书内容分 8 章，分别针对多目标决策理论、多目标决策技术和多目标决策理论方法在水利水电规划与管理工作中的具体应用。第 1 章绪论，主要介绍多目标决策的概念、特点、理论基础、关键要素及发展概况。第 2 章介绍多目标决策基本理论，包括向量优化理论和效用理论。第 3 章介绍非劣解生成技术，包括权重法、约束法、多目标线性规划的单纯形法和多目标动态规划。第 4 章介绍离散多目标决策技术，包括字典编辑法、层次分析法、ELECTRE 法等。第 5 章介绍连续多目标决策技术，包括理想点法、目的规划法、替代价值权衡法、逐步法、均衡规划法、概率权衡法等。第 6 章介绍发展中的多目标决策方法，包括模糊综合评判法、物元分析法、投影寻踪法、模糊优选法、熵权理想点法、遗传算法。第 7 章介绍多目标决策在区域水资源规划中的应用。第 8 章介绍多目标决策在水库调度中的应用。本书各章均给出了大量例题，旨在使读者更好地学习掌握所介绍的理论方法。

本书第 1～4 章由方国华编写，第 5、6 章由黄显峰编写，第 7 章由方国华、黄显峰编写，第 8 章由吴学文、黄显峰编写，全书由方国华统稿。研究生田昆、陈颖等参加了书稿部分内容的整理工作。本书的编写得到了河海大学谈为雄教授的支持与帮助。谈为雄教授精心审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，这对提高本书质量很有帮助。在此，向谈为雄教授表示衷心的感谢！同时，也非常感谢支持、关心我们编写出版工作的所有领导和专家学者！

多目标决策还在发展之中，加之时间和作者水平的限制，书中不足和疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正。

作　者

2010 年 11 月

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　多目标决策的概念和特点

只有一个目标的决策问题称为单目标决策问题,相应的求解方法称为单目标决策方法。具有两个或两个以上目标的决策问题称为多目标决策问题,相应的求解方法称为多目标决策方法。多目标决策是指在多个目标间相互矛盾、相互竞争的情况下所进行的决策。例如,人们购买商品,一般要既物美又价廉,这就是两个目标的决策问题;生产中设计一项新产品,往往要求优质、高效、低成本和低污染,这是 4 个目标的决策问题;在水资源系统规划和管理中,通常要考察国民经济发展、环境质量和社会福利等目标。更复杂的大系统,如经济和社会系统、能源系统、生态环境系统等,要考察的目标就更多了。在这些相互冲突的目标中,通常既有定量指标,又有定性指标,决策者往往难以判断孰优孰劣。

近代多目标决策理论与技术的产生和发展,最直接的原因在于:用单目标数学模型求解实际的管理和决策问题时,总是假定在单一目标和约束条件都不变化的情况下,寻求绝对意义的最优解,而且这个最优解如果存在,则常常是唯一的,这就忽视了客观事物普遍存在的多目标性。因此,除了解决简单的问题外,单目标决策很难满足个人和群体决策的要求。在现代工农业生产、能源开发、城市交通、企业管理、社会经济发展和各种有限资源合理分配等复杂问题中,考虑多目标决策问题比仅按单目标问题来处理,具有下列的必要性与优越性:

解决现实客观问题,采用多目标决策方法,其结论更合理、更逼真,易被人们所接受。实际上,客观事物的决策过程,无论是个人决策,还是群体决策,人们关心的是选择满意的决策方案,仅在特殊或简单的情况下,才去选择最优方案。例如,涉及国计民生的经济开发、社会发展和流域(或地区)水资源的开发与利用等问题,如用单目标决策方法去解决,则势必会使问题的内外关系受到过分的限制,不免带来失真和有损于解决问题的合理性。

使用多目标决策方法,能适应问题的各种决策要求和扩大决策范围,有利于决策者选出最佳均衡方案。多目标决策技术能给出各个目标之间大量利弊得失的转换对比关系,增加决策信息,便于决策者选择。根据需要也可给出所有方案的排列顺序,还可依据决策者的偏好或价值观给出相应的方案。多目标决策技术适用范围广,解决问题灵活,易于给出各个目标间易被接受的均衡解。

在多目标决策问题中，有的目标可以用一个或几个决策准则直接进行评价和比较，有的目标难以直接评价，需要将它们分解成若干级别较低的子目标，直到可以直接用一个或几个准则进行比较和分析为止。这样就形成了一个分层结构复杂的目标准则体系。最上一层通常只有一个目标，称为总体目标；最下一层中的每个子目标都可以用单一准则评价，称为方案层。合理地给出表示每个可行方案的满意程度的数值，称为满意度。构建多目标决策问题的目标准则体系是多目标决策分析的前提。

相对于单目标决策问题，多目标决策问题都有两个共同特点：目标间的不可公度性和目标间的矛盾性。所谓目标间的不可公度性是指各个目标没有统一的度量标准，因而难以进行比较，对多目标决策问题中行动方案的评价只能根据多个目标所产生的综合效用来进行。所谓目标间的矛盾性是指如果采用一种方案去改进某一目标的值，则必定会使另一目标的值变坏。例如，规模一定的综合利用水库，假设仅有自上游取水的灌溉和发电两项用途，它们各自追求的目标可均用经济效益最大来表示，也可均用物理量（供水和发电量）最大来表示，还可一个用经济值、另一个用物理量来表示。若增加发电效益，则势必就要减少灌溉收益，反之亦然，二者的利害冲突是明显可见的。因此，多目标问题总是以牺牲一部分目标的利益来换取另一些目标利益的改善。这是多目标问题的基本性质之一。多目标之间相互依赖、相互矛盾的关系反映了所研究问题的内部联系和本质，也增加了多目标决策问题求解的难度和复杂性。

一般来说，多目标决策问题的解不是唯一的，并且不可能同时获得各个目标的绝对最优解，它是由向量优化问题的“非劣性”所决定的。多目标问题的解：在数学规划中通常称之为非劣解或非控解；一些统计学者和经济学家称之为有效解；而福利经济学家称之为 Pareto 最优解。在一定条件下，取得多目标的“最优”解，则称之为最佳均衡解（best compromise solution）。粗略地说，就是决策者认为最满意的解。

多目标决策与单目标决策在决策过程中考虑影响最终抉择的因素不同。在多目标决策中，一要考虑各个目标或属性值的大小，二要考虑决策者的偏好要求。任何合乎理性的决策都将选择一个最佳均衡解（或方案），但不同的决策者对于同一问题却可能选择不同的最佳均衡解。对于单目标决策问题，决策者只需考虑目标值的大小总能选出一个最优的方案。任何决策者，在同一准则下，都将作出同一的最优抉择，这是因为决策者的偏好和目标值的极大或极小是完全一致的。一般来说，任何决策的最终目的都是使决策者达到最大限度的满足，或者说，使决策者的效用达到最大。因此，在多目标决策中，效用理论和向量优化理论都是多目标决策问题的理论基础。

1.2　多目标决策过程和价值判断

讨论多目标决策问题十分有必要了解多目标决策问题的总体轮廓，即多目标决策过程，其中价值判断在决策过程中是必不可少的重要组成部分。

1.2.1　多目标决策过程

多目标决策过程是指求解问题及作出最终决策的全部过程。具体可归纳为以下 4 步：

第 1 步　判明系统建立(或改变)与诊断的需要。当决策者觉察到需要建立或改变系统趋向时，就要诊断系统存在的问题和态势，并提出总体目标。这就是初始步骤的基本任务。

第 2 步　确定或提出问题。将第 1 步中不太明确阐述的总体目标转换为适合计算的特定多目标集，并清晰明确地说明系统全部的基本要素、目标或属性的测度、系统边界和系统环境等。

第 3 步　建立模型和估算参数。根据第 2 步确定的目标集和系统环境，构建适宜的模型，以表示系统关键变量的组成及它们之间的逻辑(或物理)关系，并进行方便有效的综合分析。这里所说的模型可有简单的智力模型、图表模型(如流程图)、复杂的物理模型和数学模型等。它们都含有若干变量和函数，其中之一要包括能生成有用方案的主要函数。各属性或目标的测量尺度必须明确规定，以便进行方案分析与比较。

第 4 步　分析和评价系统方案。根据预定的决策规则，或用于排列有用方案的规则集，对每个方案和与其相应的方案进行评价，从而选取具有较高效用的方案进行实施。

1.2.2　价值判断

在任何决策过程中，客观上总存在两种不同形式的因素：其一是事实因素，即能用科学方法进行验证的那些因素；其二是价值因素，即能向所有科学检验进行挑战的主观判断的那些因素。判断本身，在一般的决策过程中，就是价值因素最普遍的体现形式。

在实际的决策过程中，考虑社会价值、决策者的偏好(即决策者对后果的爱好程度)及价值判断的使用，几乎是复杂决策问题所固有的特征。对于这样的问题，学术界虽有所争论，但价值判断在决策过程中仍是一个不可少的组成部分。例如，在识别论断系统要求中、探讨整体目标中(决策过程的第 1 步)及建立决策变量间的逻辑关系中(第 2 步)，可以纯客观地确定。但大多情况下，需要考虑主客观两方

面的因素来确定。此外，在分析评价方案最终作出决策的步骤中，往往很难避免要借助价值判断来完成。

在多目标决策问题中，决策者的偏好形式就是判断的体现，或判断作用的结果。在评价步骤中，用一维效用理论、多属性效用理论及其他旨在建立决策者偏好结构有关的课题时，都需要上述形式的判断。

1.3 多目标问题的理论基础和求解技术

1.3.1 理论基础

在多目标问题中，决策的目的在于使决策者获得最满意的方案，或取得最大效用的后果。为此，在决策过程中，必须考虑两个基本问题：其一是问题的结构或决策态势，即问题的客观事实；其二是决策规则或偏好结构，即人的主观作用。前者要求各个目标（或属性）能够实现最优，即多目标的优化问题；后者要求能够直接或间接地建立所有方案的偏好序列，借以最终择优，这就是效用理论的问题。

从数学规划的角度来看，多目标决策问题是一个向量优化问题或多目标优化问题。多目标优化与单目标优化的解是不同的。在单目标优化问题中，对任何两个函数的解，只要比较它们的函数大小，总可以从中找出一个最优解，并且能排出各个函数值的顺序；而多目标优化问题的解是非劣解，并且不是唯一的，孰优孰劣，很难直接作出判断。

所谓非劣解，可以粗略地解释如下：在所有可行解集中没有一个解优于它，或者说，它不劣于可行解集中的任意一个解。多目标优化计算得不出同时满足各个目标的最优解，只能求得非唯一的一组解，称为非劣解集。

就非劣解集中的某一个非劣解而言，要想改进一个目标函数的效益，必以牺牲另一个或另几个目标函数的利益为代价。这是非劣解的一个重要特性。

求解多目标优化问题非劣解的途径，常见的是将向量优化问题转化为标量优化问题来求解，即将多目标问题转化为单目标问题来求解。这样就可以利用现有求解单目标优化的方法来求解多目标的优化问题。将向量问题转化为标量问题的常用方法有如下几个：

（1）权重法。它的基本思想是先将向量问题的各个目标函数赋予一定的权重，构成一个单目标的优化问题，然后再通过改变各个目际的权重值，从而生成多目标优化问题的非劣解集。

（2）约束法。它是将多目标中的任意一个目标选为基本目标，而将其余的目标转化为不等式约束，再不断变换约束水平，从而生成多目标问题的非劣解集。

（3）拉格朗日乘子法。它的基本思想与权重法差别不大，但它涉及驻点与鞍

点的重要概念，也是一种将向量问题转化为标量问题的方法。

此外，还有固定等式约束、权重范数和权重与约束混合法等。

多目标问题解的非劣性已由 Kuhn-Tucker 非劣充要条件所证明，并且为直接生成非劣解方法的基础，在多目标非劣解生成技术中广泛应用。

向量优化理论是生成多目标问题的非劣解的基础，但是在非劣解生成之后，如何从中选出最终解（或方案），这在很大程度上取决于决策者对某个方案的偏好（喜爱）、价值观和对风险的态度。测度这种偏好或价值的尺度，就是所谓的效用。它是能用实数表示决策者偏好程度的量化指标，或量化的度量。当各方案的效用确定后，就可比较、评价各个方案的优劣，从而作出最终的抉择。

在任何决策过程中，都直接或间接地含有能够排列方案的序列关系。如果这种序列关系反映了决策者的偏好，则称这种关系为偏好序。对于单目标决策问题，偏好序与该目标（或属性）数量的大小是一致的。例如，当采用人们认识一致的费用最小准则选择工程设计方案时，无须事先了解决策者的偏好序，只要应用适当的优化技术就可解决。这就是说，相应目标函数值小的方案就是决策者偏好的方案，或偏好序中的最优方案。

然而，对于多目标决策问题，则需另外了解决策者的偏好和建立某种序列关系，并将其直接地显示出来。建立这种在可行集上的序列关系的形式便称为偏好结构。它是两两元素（或方案）之间的比较关系，能使决策者对各个可行方案两两相比，选出他偏好的那个方案，或者两者无差别，或者一个方案不劣于另一个方案等。显然，决策者的偏好结构应能用实函数来表示，或者说，这种偏好序要与一个有序的实函数相对应，这个实函数便是效用函数。一旦建立了这种效用函数，最终方案的选择就相对得容易了。例如，对确定性决策问题，选取具有最大效用函数值的相应方案，便是决策者最满意的解；对于不确定性决策问题，具有最大期望效用值的相应方案，也就是最终的决策方案。

研究决策者的偏好关系、偏好结构和构造效用函数的理论基础就是效用理论。在效用理论中，偏好序是一个重要的概念和成分。

在许多决策问题中，作为偏好结构基础的不劣于（$\succcurlyeq$，也可用$\sim$和$\succ$表示）的存在假设是合乎理性的，但能否假设不劣于（$\succcurlyeq$）存在，还要取决于直接或间接地找到构造这种不劣于（$\succcurlyeq$）的方法，这就涉及偏好序的测度问题。在多目标决策情况下，用什么作测度的尺度，并不是都很清楚的。若没有合适的测度尺度（如标称、序数的、区间的和比率的），则偏好关系可以借用效用的概念来度量（效用实际是用序数尺度来测度的）。

效用理论是符合人类思维规律的一种公理化的理论，是多目标决策评价技术的基础。效用理论的研究一般从序列关系入手，研究确定性效用函数的存在性、表现形式和构造方法等，从而为多目标问题的决策服务。

1.3.2 求解技术

多目标问题的求解技术，到目前为止，已有二三十种方法，大多是在 20 世纪 70 年代发展起来的。为了把握各种方法的基本特征，许多学者从不同的观点提出了一些不同的分类方法，如根据决策者与分析者在求解过程中的联系方式可分为交互式多目标决策和非交互式多目标决策；根据从决策者那里获得的偏好信息情况可分为有偏好的多目标决策和无偏好的多目标决策；根据决策方式可分为个体决策和群体决策；根据决策变量是连续的、方案无限的还是离散的、方案有限的可分为离散多目标决策和连续多目标决策等。

考虑到多目标决策问题的客观决策态势和主观的决策规则，以及获得决策者偏好信息的情况(包括联系方式)，可将多目标决策技术分为三大类：第一类是非劣解的生成技术，第二类是结合偏好的评价决策技术，第三类是结合偏好的交互式生成决策技术。

1. 非劣解的生成技术

这类方法的特点是生成多目标问题的全部非劣解，决策态势起着决定性的作用。因此，它并不需要知道决策者的偏好。如果需要，则只有在求出非劣解集后，决策者作最终决策时，隐性的偏好才起作用。然而，这一步的实现是由第二类技术来承担的。因此，这类技术的基本任务是生成问题的非劣解集(或方案集)。但是，它是第二类和第三类技术中许多方法的基础，是决策者确定偏好和作出决策的有力信息和依据。

非劣解的生成技术最常用的方法有权重法、约束法、多目标线性规划法和多目标动态规划法。前两个方法是把多目标问题转换成单目标规划的形式，然后通过参数的变动来影响这个转换，便可以生成非劣解集。当目标函数和约束全是或其中之一是非线性时，可以用加权方法和 ε 约束方法得到非劣解。多目标线性规划法仅对线性模型生成非劣解集，然而，这种方法不需要把问题转化为单目标规划的形式，可以直接作用在目标向量上以获得非劣解。多目标动态规划由 Tauxe (1979)提出，张玉新和冯尚友(1986)已将其发展为多维决策变量的多目标动态规划，并发展了算法。随后，于 1987 年又提出了多目标动态规划迭代算法。

第 3 章专门介绍非劣解生成技术。

2. 结合偏好的评价决策技术

这类方法的基本特点是决策者的偏好明确已知，决策规则起着明显的作用，由于决策者的偏好不同，所以采用的决策规则也不同，而且决策者的偏好是一次性给出的。这类方法目前已发展成许多不同的类属。

按决策者的偏好结构差异来看，这类结合偏好的决策（评价）方法有以权重、优先权、目的和理想点为基础的方法，如权重法、目的规划法、理想点法等；以目标之间的权衡关系为基础的方法，如替代价值权衡法等。对这一类属的方法，基本上方案是无限的，方案集是未知的，决策变量是连续的。然而，对目的规划法，变量可以是连续的，也可是离散的；而对替代价值权衡法，变量必须是连续可微的。

按方案有限、方案集已知和决策变量离散的观点来看，这类方法有层次分析法、线性分配法、方案成对比较法、ELECTRE Ⅰ和Ⅱ法、TOPSIS 法、LINMAP 法等。这种类属的方法细分也有不同的特点，如 ELECTRE 法是根据和谐变量对方案进行排序的，TOPSIS 法是根据一般理想点法形成的。

3. 结合偏好的交互式生成决策技术

这类方法的特点是决策者的偏好只是部分地明确，并用以导向生成非劣解，如决策者认为满意，则计算可告终结；否则，根据决策人的改进偏好（或意见）进行重复计算，直至求出满意解为止。这类决策技术在决策过程中，分析者与决策者始终通过对话交流信息，因此，称为交互式（或对话式）技术，而第二大类的决策技术，从分析者与决策者的联系方式来说，称为非交互式技术，即在决策过程中，只需决策者给出一次性的偏好意见，就可作出最终决策，而无须进行多次对话。

这类交互式的决策技术有步骤法（包括已发展成的目的规划步骤法、多目标线性规划步骤法及改进的步骤法等）、均衡规划法、概率权衡法、Geoffrion 法等。这些方法也均有各自的特点及适用范围。

各种求解连续方案的多目标决策问题的方法的主要区别在于如何去诱导和使用决策者的偏好和信息。在求解过程中，获取决策者的偏好信息在时间上可分为优化之前、优化之中和优化之后，相应地，也可把多目标决策方法分成三大类：事先宣布偏好的方法、逐步宣布偏好的方法和事后宣布偏好的方法。

第 4 章介绍离散多目标决策技术。第 5 章介绍连续多目标决策技术，其中包括交互式决策技术。第 6 章对发展中的多目标决策技术单列进行介绍。

1.4　多目标决策问题的关键要素

任何一个多目标决策过程的实现基本上都取决于构成决策问题的 5 个关键要素。它们分别为决策单元（是个体还是群体决策）、决策态势（是离散的还是连续的，是确定的还是非确定的）、问题的目标、问题的属性（它们的特征及两两之间的关系和性质）、决策规则（是满意的还是最优的规则）。这些术语大多没有统一的定义，只能根据逻辑推理和科学判断。

1.4.1 决策单元和决策者

决策单元常常包括决策者及共同完成信息加工的人和机器。它们的任务是接受输入信息、生成信息和加工成智能信息,从而产生决策,并作出决定。

决策者是指对问题有能力、有权威作出最终决策的人或集体,由他们来提供有价值的判断意见,据此可以排定各备选方案的优劣。政府官员、企业行政管理人员均为某类问题的决策者。决策者的作用是评价和判断各目标的相对重要性,并根据目标的当前水平值及主观判断和经验,提供关于决策方案的偏好信息。

任何决策问题的解决都主要依赖于所谓的决策者和分析者。分析者一般指能够提供可行方案和各目标之间的折中信息的人或机器,如经济学家、工程师、系统分析员、社会学家、计算机等。

这样最小的决策单元就是决策者本身,大的决策单元可能包括多个决策者、系统分析人员和计算机与绘图仪器等。如此区分决策者与决策单元的目的是为了了解不同决策态势下,多目标决策技术的特性及选用不同决策技术的针对性与灵活性。

1.4.2 目标和属性

目标是指决策者的希求愿望,或决策者追求的方向与结果。属性则是反映特定目标实现程度的量化或水平。此外,在决策文献中还常见到另一个术语——目的,它是决策者的一种先验的愿望水平,或希望达到的额定值。

目标集是具有层次结构的,由总目标具体分解为多层下层目标,反映决策者对决策事物希望达到的最终状态。对每个下层目标要用一个或几个属性来描述目标的达到程度。

下面以系统的递阶结构形式为例来说明目标集、属性集及其彼此间的相互关系。

如图 1.1 所示的多目标递阶结构中,最高层表示多目标决策问题的总体目标,其表述常常是不十分明确的,更不便于运算;最低层的目标比高层次的目标更明确、更具体,因而也便于定量计算。

为了使用实际方法对目标的评价进行计算,需指定最低层的各个子目标的属性,以便根据这些属性值从众多方案中选出"最好"的方案。

前面已经提过,属性是反映具体目标达到要求的量化水平。它有许多同义词,如性能、参数、分量、因子、特征和特性等,它们都是一个可测度的量,即可以直接或间接地评价某个具体目标实现程度的量度。直接的量度是指属性值的大小就表示目标值的大小,间接的量度是指采用代理属性间接地评价目标实现的水平。实际上,属性的特征是容易理解的和可测度的,因此,它是易于表达目标实现程度的度量指标。

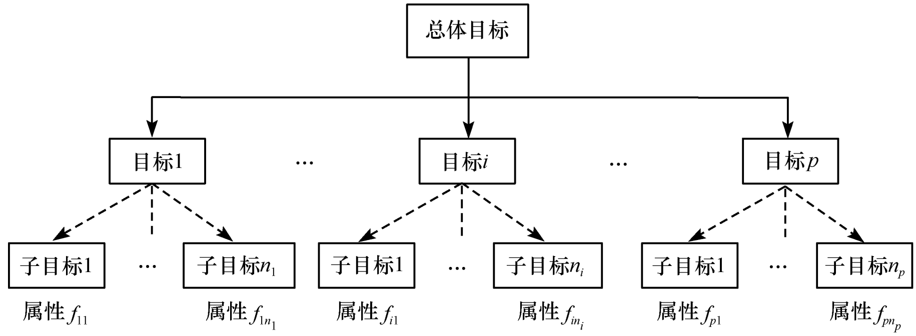


图 1.1　多目标的典型递阶结构

对一个目标指定它的属性，应满足两个特性，即可理解性与可测度性。若属性值能充分反映出相应目标可达到的程度，则这样的属性就是可理解的；若对某个给定的方案，指定属性值（以某种尺度来度量）是合理而实际的，则这个属性就是可测度的。虽然这两个要求是非常直观的，但在某些领域内，人们对测度的尺度往往不容易接受。

1.4.3　决策态势

决策态势就是决策问题的客观情况，它是决策问题结构（客观事实）和决策环境的概括。为阐明决策态势，必须清楚地识别决策问题的界限和基本组成。特别地，决策态势的描述应详细说明如下问题：需要和有用的输入形式与数量、决策变量集和属性集及它们的测度尺度（或标度）、决策变量与属性之间的关系、方案集、环境的状态等。

决策态势的清晰描述与识别，为后继地选择多目标决策技术提供必要的基础。在求解实际的多目标决策问题时，首先要识别决策问题的态势或问题结构的实质，然后才可据此选择适宜的求解技术。决策态势反映问题的实质和类型有决策变量或属性的类型是离散的还是连续的；变量或属性的度量形式是公称（标称）的尺度、序数尺度、区间尺度，还是比率尺度；自然状态的性质是确定的还是不确定的；方案集的描述是显性的还是隐性的；变量间的因果关系是线性的、凸的，还是非线性的；决策目标是动态的还是静态的等。这里举例说明决策态势与选择求解决策技术的关系。例如，选择住房的问题。假设有几套公寓任你选择，其态势表明，这种选择问题的方案集是显性的，并且可选方案有限。考虑的属性可能有租金、距离工作地点的远近、各套公寓的环境等，它们是已知的。据此选择多目标决策技术可以集中调查决策者的偏好，采用多属性效用函数方法是公认有效的。换一种情况，求解具有大量决策变量的问题和关系复杂的大型工程设计参数的选择，采用人机交互的（或对话式）决策技术是更适宜的。需要说明的是，根据决策态势的特征选择问题

的求解技术,并没有什么正规的指南可循,这主要取决于问题的特性、人的经验、创造性和全面合理的判断。

1.4.4 决策规则

一个决策问题,就是要从众多的(有限的或无限的)可行方案中选择一个最佳的方案,作为最终的决策。在作出这个决策的过程中,不难看出,它隐含着要将所有可行的方案,按照多目标问题的全部属性值的大小进行排序,从而按序择优。这种促使方案完全序列化的规则集,便称为决策规则。在实践中,决策规则可分为两大类:一类是最优规则;另一类是满意规则。前者是所有方案可以完全排序的规则集。在完全序中,最佳的方案总是相应决策规则中某个最优准则的方案。

然而,对满意性决策规则就不能抱有那样的奢望,它仅仅是在满意规则的意义上寻找一个满意的方案,作为最终的决策。应用满意性规则,需将所有可行的方案分为可接受的和不可接受的两个子集,或者分为 4 个子集,如好的、可接受的、差的、不可接受的。显然,不同子集的两个方案总是可比的,因为根据有关满意规则总可以识别出一个方案比另一个较好。然而,在有些情况下,同一子集的两个方案采用这样的规则是无法区别的,或不可比的。

再进一步划分两类决策规则的类别也是需要和可能的。例如,在不确定性的决策问题(即概率分布是未知的)中,决策规则可有最大最小规则,或悲观规则;最大最大规则,或乐观规则等。在风险型决策问题中,决策规则基本为损益期望值最大。在确定性决策问题中,决策规则为损益值最大。它们均可作为某种优化决策问题的备选规则。

满意性决策规则是与决策者(个人或集体)的偏好紧密相连的。尽管决策者的偏好形式可能是多种多样的,可以说,多目标决策问题的最终决策都是根据满意性决策规则作出的。

决策规则的表述形式有隐式和显式之分。在某些决策问题中,决策规则常常隐寓于目标的陈述之中,甚至有的目标阐述可以完全说明决策规则。对有些问题,除目标陈述外,尚要对决策规则进行明显的描述,或者是需要对决策规则进行显式的说明。

在多目标问题的决策过程中,决策规则起着重要的作用。由于决策者的偏好不同,而采用的决策规则也不同。例如,有的决策者喜用期望效用最大规则,有的喜用目的或理想的偏差最小,还有的喜用基于目标间的权衡判断。显然,采用什么决策规则在很大程度上取决于决策者的偏好,当然也与决策问题的本身特性有关。由于决策者的偏好不同,用以搜索最佳均衡解的方法也不同。因此,决策者的偏好在多目标决策过程中是起着重要作用的。

1.5　多目标决策发展概况

法国经济学家 Pareto 是国际上公认的最早提出多目标决策问题的学者,他于1896年在研究经济问题中提出多目标决策问题,并给出 Pareto 最优(非劣解)的概念。Pareto 从政治经济学的角度,把很多本质上不可比的目标转换为单一的目标去寻优。

从第二次世界大战末期开始,多目标决策问题逐渐由不同的学者,分别在运筹学、经济学和心理学三个学科,从不同的角度提了出来。1944年,von Neumann 和 Morgenstern 从对策论的角度提出了有多个决策者、他们彼此之间又相互矛盾的多目标决策问题。1951年,Kuhn 和 Tucker 从数学规划的角度提出了向量极值(即多目标优化)问题,并给出了向量优化解的必要条件与充分条件,推动了向量优化技术的发展。同年,经济学家 Koopmans 从生产和分配的活动分析中提出了多目标最优化问题,并引入了“有效矢量”的概念。心理学家对多目标决策问题的贡献是如何从多维方案中作出个人的选择,1958年,Torgenson 提出了许多“标度方法”用以帮助个人进行决策。

20世纪60年代是多目标决策理论和方法的形成时期。1961年,Charnes 和 Cooper 首次在《管理模型和线性规划的工业应用》一书中提出了目标规划(goal programming,GP)的概念。Ijiri 深入地研究了 Charnes 和 Cooper 提出的目标规划的基本概念,提出了目标的优先等级和优先权因子等概念。1963年,Zadeh 又从控制论的角度提出了多目标决策问题,并给出了一些基本概念。

20世纪70年代,多目标决策取得了长足的进展。1972年10月在美国的南卡罗来纳大学举行了第一届多目标决策的国际会议,提交会议的论文有63篇,参加会议的代表有250人。会后由 Cochrane 和 Zeleny 将会议论文编成了论文集出版,这本论文集可以说汇集了多目标决策领域的研究与应用思想。南卡罗来纳会议可以说是多目标决策研究和应用上的一个里程碑。从那以后,多目标决策的理论、方法及应用的研究进入了一个迅速发展的时期。

多目标决策开始应用于水资源系统规划及管理的标志是1962年美国完成的哈佛水规划。到20世纪70年代,各国对环境质量和社会福利越来越重视,要求水资源规划和管理的目标除经济外,还要同时考虑社会效益和环境效益。从此以后,水资源开发利用的目标由单一走向多样化。

多目标决策在水资源规划和管理中几个比较著名的实际应用如下:Thomas 与 Revelle 在1966年阿斯旺高坝运行,探索了发电与灌溉之间的交换比,这是较早的应用之一;1970～1973年,由美国麻省理工学院和阿根廷共和国组织的阿根廷科罗拉多河规划,是当今世界上比较成功的流域规划之一;1976年,David 与

Duckstein 对匈牙利境内的 Tisza 河作了重规划等。

除此以外，已发表了大量关于多目标决策在水资源规划和管理中的应用，以及由于水资源规划与管理的需要而产生的多目标决策方法方面的文献，其中有代表性的有如下几个：1969 年，Major 对多目标投资项目的分析；1973 年，Cohon 与 Marks 将约束法应用于水资源投资分析中；1973 年，Monarchi 等提出序贯方法，并应用于水资源规划中；1974 年，Haimes 等提出替代价值权衡法；1974 年，Major 用多目标分析方法研究了拟建的印度 Big Walrout 水库的经济效益与环境质量之间的交换范围；1976 年，Goicoechea 等把约束法的变化形式用于流域管理中；1977 年，Nijkamp 和 Vos 将 ELECTRE 法应用于水资源与土地联合开发问题；1977 年，Fronza 等研究了多目标水库运行问题；1979 年，Goicoechea 提出概率折中开发法；1979 年，Krzysztofowicz 和 Duckstein 研究了水库实时调度问题。

此外，美国政府制定的有关环境、水土资源利用的政策法规，其中涉及和应用多目标问题的两个文件是值得提及的：一个是 1969 年颁布的《国家环境政策法规》(NEPA)，另一个是《水土资源规划原则与标准》(以下简称为《原则与标准》)。后者是水资源理事会于 1970 年提出的，并建议水土资源规划要考虑 4 个主要目标：国民经济发展、环境质量、社会福利及地区开发。1973 年经总统批准颁布执行，1979 年又进行了修订。《原则与标准》为联邦水资源工程确立了国民经济发展和环境质量两个同等重要的目标。

美国应用多目标决策的趋势和方向，在其他一些经济发达国家也可以见到。联合国工业发展组织(UNIDO)于 1972 年颁布的计划评价导则中也规定了要考虑多目标问题，如就业、收入再分配、收支平衡等。

20 世纪 80 年代以来，多目标决策理论、方法和应用继续向纵深发展。多目标决策理论、方法与应用的系统著作陆续出版，大大丰富了多目标理论与技术领域，特别是多目标决策的应用范围已经扩大到社会、经济和自然的各个领域。陈刚和 Haimes 于 1983 年出版了 *Multiobjective Making-Theory and Methodology*，该书构建了一套完整的多目标决策理论与方法体系。Goldberg 于 1989 年在其著作 *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning* 中，提出了将经济学中的 Pareto 理论与进化算法结合求解多目标优化问题的新思路，对于后续进化多目标优化算法的研究具有重要的指导意义。Sierea 和 Coello 于 2005 年将多目标决策与粒子群算法耦合，提出了基于粒子群多目标算法。

我国在多目标决策的研究方面起步比较晚，但发展是很迅速的。1981 年，在北京召开了首次全国多目标决策会议。会上共交流了 26 篇论文，理论和方法性的论文与应用性论文各占一半，其特点是综述性和介绍性的文章居多，应用面也比较窄，涉及领域有工程设计、经济、能源、农业和教育等。1984 年，第二次全国多目标决策会议在北京召开。会上共交流了 39 篇论文，理论和方法方面的居多(28 篇)，

应用性的较少。理论上出现了几个新的方向，有些方法得到了重视，如非光滑问题、模糊决策、目标规划、AHP方法、优序法等，应用方面趋于成熟。第三次全国多目标决策会议于1987年在哈尔滨召开。会上交流了论文52篇，其中理论和方法33篇，应用和软件方面19篇。多目标决策的理论研究领域更为宽广和深入，方法的研究和使用更为广泛，应用领域更为宽广，有些项目，如企业生产计划制定等，取得了明显实效。国际多目标决策大会（MCDM）于2009年6月21～24日在我国电子科技大学（四川成都）召开。该大会也是国际多目标决策协会（由来自87个国家和地区超过1500名的知名学者组成）的第二十届年会，也是首次在中国内地举办的年会。会议共收到来自近40个国家和地区的超过600篇论文，其中250余篇被录用。

早在20世纪60年代初期，叶秉如就把多目标规划引入到水利规划与管理中。80年代以后，多目标决策方法在我国获得越来越广泛的应用。例如，1983年，陈珽等提出了一种在目标空间和权空间上对话的方法，并应用于大藤峡水库特征水位的选择；1984～1986年，叶秉如和余里红研究了丹江口水库第二期参数优选问题；1986年，冯尚友等应用改进的多目标动态规划法对丹江口水库发电与供水两目标进行了分析；1986年，郭元裕等把多目标决策应用在洞庭湖区圩垸排涝规划中；1987年，叶秉如等应用非劣解生成法、理想点法、改进权重法对三峡水库参数选择问题进行了研究；1989年，鲁子林研究了多目标决策的模糊数学方法；1989年，金琼等研究了TOPSIS法的应用；1991年，董增川等研究了综合利用水库的多目标实时调度。此外，1989年，董子敖等对梯级水库多目标优化调度问题进行了较系统的研究，提出了梯级水库群和水电站群补偿调节和调度的多目标、多层次优化法；1993年，陈守煜等提出了多目标模糊优选随机动态规划理论，可应用于复杂水资源系统中的方案优选；2001年，王先甲建立了水资源持续利用的多目标决策模型，并分析了目标之间的替代权衡关系的特性和由这种关系表示出的显示决策者偏好的规律性；2006年，方国华指出水资源承载能力具有自然和社会双重属性，涉及水资源系统、社会经济系统和生态环境系统之间的复杂相互作用关系，建立了考虑社会经济发展、生态环境保护和水资源合理利用的水资源承载能力的多目标分析评价模型；2007年，董增川等分析了现行水库调度方法的不足，指出应在实现社会经济多种目标的前提下，兼顾河流生态系统需求，实行水库的多目标生态调度。

近年来，遗传算法、模糊优化、神经网络等现代技术也被应用到多目标优化中，使多目标优化方法取得了很大进步。随着我国政治体制改革和经济体制改革的深入发展，决策民主化和决策科学化的实现，现代化管理水平的提高和管理信息系统的普及，多目标决策必将起着越来越重要的作用。

总的来说，在20世纪70年代，多目标决策是运筹学和管理科学中发展最快、最富有创新精神的领域，70年代末，它成为运筹学和管理科学中发展最活跃、应用

最广泛的领域。80年代以来，理论、方法和应用继续向纵深发展。近年来，出现了许多新的发展方向，尤其在多目标决策，特别是交互式决策方法，与决策支持系统的结合方面，许多学者和应用人员表示出越来越大的兴趣。此外，运用专家系统方法从心理学的角度出发建立描述性决策模型，以便把决策者的经验、判断和推理与定量的决策分析方法结合起来，也是一个重要的发展趋势，这是使多目标决策变得更为实用的重要步骤。另一个趋势是多目标决策的应用已经开始从微观领域扩展到宏观领域，如多维风险分析及其在战略管理与经济政策的决策中的应用。总之，多目标决策正在发展成一门独立的学科。多目标决策方法现已广泛地应用于化工、资源、能源、环境、人口、教育、经济管理等领域。

当然，需要说明的是，多目标决策是一个比较新的研究领域，迄今还处在完善和发展的阶段，其理论和方法都还有不少问题需作进一步研究。

第 2 章　多目标决策基本理论

在多目标问题中，决策的目的在于使决策者获得最满意的方案，或取得最大效用的后果。在决策过程中，必须考虑两个基本问题：一是问题的结构或决策态势，即问题的客观事实；二是决策规则或偏好结构，即人的主观作用。前者要求各个目标（或属性）能够实现最优，即多目标的优化问题；后者要求能够直接或间接地建立所有方案的偏好序列，借以最终择优，这就是效用理论的问题。本章主要介绍多目标决策问题的两个理论基础，即向量优化理论与效用理论。

2.1　概　　述

多目标决策问题，从方法论的角度来看，是一个目标函数中具有向量值的数学规划问题；从决策论的角度来看，它又是决策规则中含有各个目标极值的决策问题。因此，多目标决策问题属于向量优化问题。向量优化问题的解与标量优化问题的解是不同的。标量优化问题对任何两个函数的解，只要比较两个函数值的大小，总可以从中找出一个最优解，并且能排出大小顺序；而多目标优化问题的解不是唯一的，究竟谁优谁劣，很难直接作出判断。经济学家 Pareto 于 1896 年针对多目标优化问题提出了非劣解的概念，但是发展为向量优化问题的非劣解生成技术，还是在 1951 年 Kuhn-Tucker 条件发表以后的事。由于向量优化问题是在标量优化问题的基础上发展起来的，只要通过适当的途径将向量优化问题转化为标量优化问题，就可以利用求解标量优化问题的现有方法，求解具有一定特征的向量优化问题。

当非劣解生成后，如何从中选出最终解（方案），或选出最佳均衡解，这在很大程度上取决于决策者对某方案的偏好价值观和对风险的态度。显然，不同的决策者有不同的偏好，对于同一决策问题会作出不同的决策。测度决策者对各个方案的偏好程度或价值的尺度，就是所谓的效用，或决策者偏好程度量化的代表。当各个方案的效用确定后，就可比较、评价它们之间的优劣，从而作出最终的抉择。

在任何决策过程中，都直接或间接地隐含能够排列方案的序关系，以便比较方案并作出最终决策。如果这种序关系反映了决策者的偏好，则称这种关系为偏好序。对于单目标决策问题，偏好序与该目标数量的多少是一致的。例如，当采用人们认识一致的费用最小准则选择工程设计方案时，无须事先了解决策者的偏好序，只要应用适当的优化技术就可解决。这就是说，目标函数值最小的相应方案就是决策者偏好的方案或偏好序。

但是,对于多目标决策问题,则需另外了解决策者的偏好和偏好结构,并将其直接明确地表示出来。所谓决策者的偏好是指决策者对行动后果的爱好程度。偏好结构是指建立在可行方案集上的某种序关系。这种序关系是以序数表示的两两元素(或方案)之间的相互比较关系。构造这种序关系和偏好序的技术前提,是决策者的偏好结构能用实函数来表示,或者说,这种偏好序要与一个有序的实函数相对应,这个函数便是效用函数。一旦建立起这种函数,最终方案的选择就相对得容易了。例如,对确定性决策问题,选取具有最大效用函数值的相应方案便是决策者最满意的解;对于不确定性决策问题,具有最大期望效用值的相应方案便是最终的决策。

研究决策者的偏好关系、偏好结构和构造效用函数等的理论便是效用理论。效用理论是通过效用函数来表示的,借以进行满意方案的选择。效用函数是反映决策者偏好的显式函数。这种理论是符合人类思维规律的一种公理化的理论,也是多目标评价决策技术的基础。

2.2 向量优化理论

多目标决策问题属于向量优化问题,向量优化理论是生成多目标问题非劣解的基础。本节主要介绍有关向量优化问题的基本理论,如非劣解概念、最佳均衡解概念、Kuhn-Tucker 条件等,其中提到的许多概念和术语,在本书的后继章节中都是很有用的。

2.2.1 非劣解和非劣解集概念

设求解 $f_1(\boldsymbol{x})$和 $f_2(\boldsymbol{x})$两个目标的最大值,它们的可行解域如图 2.1 所示。图中,可行解域内部的各点数据总是劣于可行域边界上的某点值,这是因为内部的任一点总可以在边界上至少找出一个相应点,它的目标函数值不劣于内部这点所反映的目标函数值,而且至少有一个目标函数值优于内部这点的目标函数值。

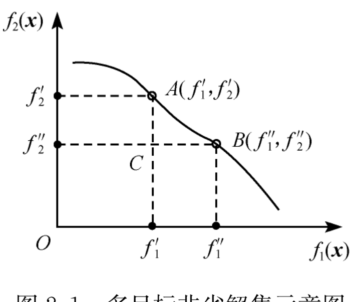


图 2.1 多目标非劣解集示意图

例如,图 2.1 中的 C 点就劣于 A 点和 B 点之间任一点所反映的目标函数值。因此,在优选中,类似于 C 点的一些点可以舍去,并将这些可以舍去的解称为劣解。但是可行域边界上各点所代表的解就不能直接判断它们的优劣(如 A 点、B 点就是这样)。因为这些点中任一个与其他任一个相比较,总会发现一个目标函数值比其他另一个函数值优越,但又不是两个目标函数值都优越。像这样的解既不会被舍去,又不是全面优于其他解,则称为非劣解。

一般来说,多目标问题得不出绝对最优解,即得不到同时满足各个目标最优的

解,而只能得到非劣解。非劣解通常不是一个唯一的解,而是一组解,所有非劣解的集合称为非劣解集。

设有 p 个目标 $f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})$,在 m 个不等式约束 $g_1(\boldsymbol{x}),g_2(\boldsymbol{x}),\cdots,g_m(\boldsymbol{x})$和决策变量向量非负条件下,要求 p 个目标函数值越小越好,表示为

$$\min \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})) \tag{2.1}$$

$$\text{s.t.} \quad g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{2.2}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2.3}$$

其中,$f_k(\boldsymbol{x})$为 p 维目标函数向量中的第 k 个目标函数,$g_i(\boldsymbol{x})$为第 i 个约束条件,$\boldsymbol{x}$ 为决策变量组成的 n 维向量,即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。令

$$X=\{\boldsymbol{x}\mid g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i=1,2,\cdots,m\} \tag{2.4}$$

综上所述,非劣解的数学定义可以表述如下:

定义 2.1　设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$,若不存在 $\boldsymbol{x}\in X$,满足 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\geqslant\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}})$,并且至少有一个分量 i,使得严格不等式关系成立(即 $f_i(\boldsymbol{x})>f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$),则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为多目标决策问题(2.1)~(2.3)的严格非劣解,简称为非劣解。

例 2.1　求解下列具有两个决策变量和两个目标函数的线性多目标问题:

$$\max \quad (f_1(\boldsymbol{x})=5x_1-2x_2,f_2(\boldsymbol{x})=-x_1+4x_2) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.} \quad & -x_1+x_2\leqslant 3\\ & x_1+x_2\leqslant 8\\ & x_1\leqslant 6\\ & x_2\leqslant 4\\ & x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

这个线性问题以决策变量 x_1 和 x_2 为坐标的可行域绘于图 2.2 中,其中约束条件形成的封闭面积,即决策变量 x_1 和 x_2 的可行域,也就是本问题的决策空间。图 2.2 中,A,B,C,D,E,F 为极点,决策空间标以 X。

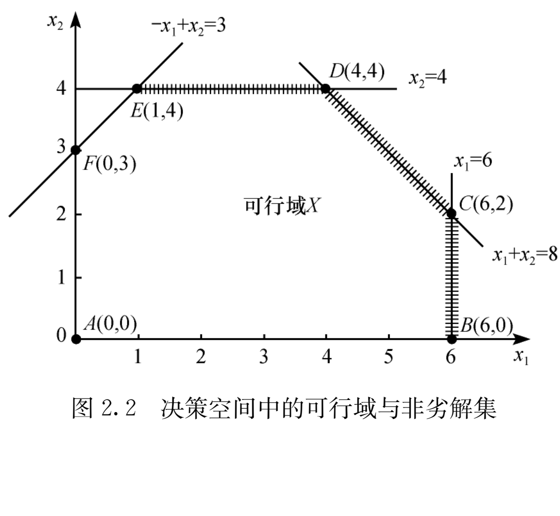


图 2.2　决策空间中的可行域与非劣解集

各目标函数值是根据决策空间内各可行顶点处的 x_1 和 x_2 值，直接代入相应的目标函数中求得的。有关决策变量及目标值列于表 2.1 中。

表 2.1 决策变量与目标函数值

顶　点	x_1	x_2	$f_1(\boldsymbol{x})=5x_1-2x_2$	$f_2(\boldsymbol{x})=-x_1+4x_2$
A	0	0	0	0
B	6	0	30	−6
C	6	2	26	2
D	4	4	12	12
E	1	4	−3	15
F	0	3	−6	12

要评价决策空间内各个可行顶点处的目标函数值 f_1 和 f_2，需在新的空间，即目标空间中进行。这个空间是以目标函数值为坐标而绘成的，如图 2.3 所示。

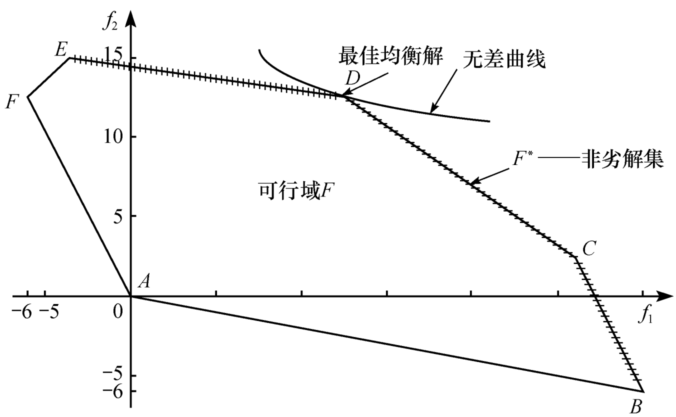


图 2.3 目标空间中可行域、非劣解集及最佳均衡解

图 2.3 中，目标空间的可行域标以 F，它是由决策空间 X 转换而来的，其形状依目标函数的特性而定。目标函数的非劣解集标以 F^*，如 $BCDE$ 线段所示。

由此，非劣解集（又称为非劣集）的定义如下：

定义 2.2 由决策空间的所有非劣解组成的集合称为非劣解集。

2.2.2 折中分析和最佳均衡解

例 2.1 中，B 点的 f_1 值为 26，f_2 值为 2，D 点的两个目标值均为 12，哪个更好些？在一般情况下，这是无法回答的。如果举例说以 f_1 的 14 个单位换取 f_2 的 10 个单位是否值得，却是日常生活常常遇到的问题，由此引出下面的问题。

多目标决策的任务是在可行决策空间中寻找非劣解，并在非劣解之间进行折

中分析,以确定满意解。这种折中分析是在非劣解集中进行的。由于目标之间的矛盾性,改善某个目标必然以牺牲别的目标值作为代价。这种折中分析可以用所谓的折中因子(或称为权衡率)定量描述。

定义 2.3　为改善目标 $f_i(\boldsymbol{x})$,设改善量为 $\Delta f_i(\boldsymbol{x})$,必须以损失其他目标 $f_j(\boldsymbol{x})(i\neq j)$作为代价。设损失量为 $\Delta f_j(\boldsymbol{x})$,令 $T_{ij}=\Delta f_i(\boldsymbol{x})/\Delta f_j(\boldsymbol{x})$,则称 T_{ij} 为目标函数 $f_i(\boldsymbol{x})$和 $f_j(\boldsymbol{x})$之间的折中因子。

例如,例 2.1 中,进行 f_1 与 f_2 间的折中分析。从 D 点移向 C 点,也即 f_2 必须给出 5/7 个单位才能换取 f_1 的一个单位。当然,也可以反过来,取折中因子为 7/5,即牺牲 f_1 而取得 f_2。在解决实际问题中,非劣解集和折中分析都是决策的重要信息。

非劣解集一般包括有许多方案,显然,不是所有的方案都能被选中,而被选中的方案只是非劣解集中决策者偏好的方案,称为最佳均衡解。

如何选择最佳均衡解? 途径很多,将在以后的章节中讨论,其中之一是用非劣解集的图解表示,根据可能与折中分析进行选择。选择多目标的组合方案常根据对多目标组合的偏好而定。偏好可用无差曲线来表示,每条无差曲线表示在给定效用量下,都能使各目标组合产生最大效用的可行方案,即为最佳均衡解。图 2.3 中无差曲线切于 D 点处的相应方案就是最佳均衡解。

以上举的是线性多目标决策的例子。下面再举一个简单的一个决策变量和两个目标的非线性多目标决策的例子,以便于进一步深化对非劣解的了解。

例 2.2　求解

$$\begin{aligned}&\min\quad (f_1(x)=x-1,f_2(x)=(x-3)^2+1)\\&\text{s.t.}\quad x\geqslant\theta,x\in X\end{aligned}$$

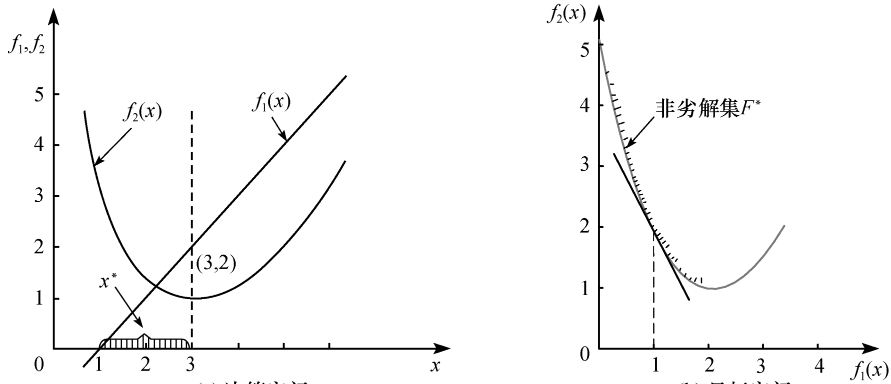
对于这个问题的求解过程与例 2.1 类似,其结果如图 2.4 所示,其中(a)和(b)分别展示出问题的非劣解集在决策空间和目标空间的表现形式。在图 2.4(a)中,介于变量 1~3 区间内的任一点 x 均为问题的非劣解。因为在这个区域内,若想减少 $f_1(x)$的值,势必要引起 $f_2(x)$值的增加;反之亦然。问题的非劣解集为

$$x^*=\{x\mid x\in X,1\leqslant x\leqslant 3\}$$

在图 2.4(b)中,非劣目标集为

$$F^*=\{\boldsymbol{f}\mid \boldsymbol{f}=(f_1,f_2),f_2=(f_1+1-3)^2+1,0\leqslant f_1\leqslant 2\}$$

对于这两个目标的最小值问题,相应的非劣解集位于目标空间可行域边界上左边的阴影部分,并且具有负的斜率。非劣目标集 F^* 内任一点的导数 $\mathrm{d}f_2(f_1)/\mathrm{d}f_1$ 也必然为负值。这是由于任一目标函数值的增减必将引起另一目标值反向所导致的。如果多于两个目标以上的最小问题,非劣目标集将为非劣目标集边界上



(a) 决策空间　　(b) 目标空间

图 2.4　非劣解集在决策空间和目标空间的表现形式

一个超曲面的左边部分,并且至少有一对 $\sigma f_k/\sigma f_i<0$。前面所说的 $\mathrm{d}f_2(f_1)/\mathrm{d}f_1$ 称为权衡率,与例 2.1 的权衡值意义相同。例 2.2 的最佳均衡解也依决策者的偏好而定,其中通过权衡率的分析也可作出最终决策。

2.2.3　非劣性的 Kuhn-Tucker 条件

前面已经提过,求解向量优化问题非劣解的一般途径,是将其转化为标量优化问题来求解的。而标量优化问题的最优性条件已由 Kuhn 和 Tucker 于 1951 年导出,并成为数学规划中许多算法的基础。同时,向量优化问题非劣解的非劣性条件也由 Kuhn 和 Tucker 根据标量优化的同样思路导出。因此,这里将首先介绍单目标规划的 Kuhn-Tucker 条件,然后介绍多目标规划的 Kuhn-Tucker 条件。

1. 单目标规划的 Kuhn-Tucker 条件

单目标规划问题一般可以写成下列形式:

$$\begin{aligned}
&\max \quad f(\boldsymbol{x})\\
&\text{s.t.} \quad h_i(\boldsymbol{x})=0,\quad i=1,2,\cdots,l\\
&\qquad\ \ g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,m
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中,$\boldsymbol{x}$ 为欧氏空间中的 n 维向量(即由 n 个决策变量组成的变量),$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$;$f,g_j,h_i(j=1,\cdots,m,i=1,\cdots,l)$具有一阶连续偏导数。

在给出 Kuhn-Tucker 条件之前,先介绍几个概念。所谓正则点的定义如下:

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是满足 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)\leqslant 0$ 和 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^*)=0$ 的点,令 J 是使得 $g_j(\boldsymbol{x}^*)=0$ 的那些下标 j 的集合。如果梯度向量 $\nabla h_i(\boldsymbol{x}^*)$,$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)$($1\leqslant i\leqslant l,j\in J$)是线性无关的,则称 $\boldsymbol{x}^*$ 为上述约束的一个正则点。

这里,$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)$和$\nabla h_i(\boldsymbol{x}^*)$定义为

$$\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = \left[\frac{\partial g_j}{\partial x_1}, \frac{\partial g_j}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial g_j}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_1}, \frac{\partial h_i}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial h_i}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

于是将单目标规划的 Kuhn-Tucker 最优性必要条件(或称为一阶必要条件)叙述如下：

设 $f(\boldsymbol{x})$，$g_j(\boldsymbol{x})$，$h_i(\boldsymbol{x})$在欧氏空间的某一开集上一阶连续可微，若 $\boldsymbol{x}^*$ 是式(2.7)约束条件的正则点，则必然存在 Kuhn-Tucker 乘子集 $\lambda^* \in \mathbf{R}^l$ 和 $\mu^* \in \mathbf{R}^m$，并且 $\mu^* \geqslant 0$，使得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^* \nabla h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \tag{2.8}$$

$$\mu_j^* g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \tag{2.9}$$

设 $\boldsymbol{x}^*$ 为式(2.7)约束条件的正则点，假设存在 Kuhn-Tucker 乘子集 $\lambda^* \in \mathbf{R}^l$ 和 $\mu^* \in \mathbf{R}^m$，并且 $\mu^* \geqslant 0$，使得式(2.8)和式(2.9)成立。

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^* \nabla^2 h_i(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \nabla^2 g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \tag{2.10}$$

为正定矩阵，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是式(2.7)的局部最小值。

对于求极小值的优化问题，则可以通过增加负号将其转化为求极大值问题，然后再分析其 Kuhn-Tucker 条件。

2. 多目标规划的 Kuhn-Tucker 条件

多目标规划一般可表示如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_p(\boldsymbol{x})) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in X \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中，约束定义为

$$X = \{\boldsymbol{x} \mid g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, h_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, l, j = 1, 2, \cdots, m\} \tag{2.12}$$

已经知道，上述问题一般没有最优解，只有非劣解。

可以证明，式(2.11)、式(2.12)解的非劣性条件和式(2.7)的最优性条件非常相似。首先，给出式(2.11)、式(2.12)非劣解的 Kuhn-Tucker 必要条件如下：

设某向量 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$，并且 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 X 中的正则点。又设 f_k，g_j，h_i 为连续可微的函数($k=1,2,\cdots,p$，$j=1,2,\cdots,m$，$i=1,2,\cdots,l$)，若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是式(2.11)的非劣解，则必然存在向量 γ，λ 和 μ，其中 $\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)^{\mathrm{T}}$，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_m)^{\mathrm{T}}$，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)^{\mathrm{T}}$，并且 $\lambda_i \geqslant 0$，$\mu_j \geqslant 0$，$\gamma_k \geqslant 0$，$\gamma_{k0} \geqslant 0$，$k=1,2,\cdots,p$，$j=1,2,\cdots,m$，$i=1,2,\cdots,l$，$1 \leqslant k_0 \leqslant n$，使得

$$\gamma_k \nabla f_k(\bar{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla h_i(\bar{\boldsymbol{x}}) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \tag{2.13}$$

$$\mu_j g_j(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{2.14}$$

这里不讨论一般多目标问题非劣解的充分条件,仅给出凸规划情况的结论如下:

若目标函数 $f_k(\boldsymbol{x})(k=1,2,\cdots,n)$都是凸函数,并且所有 $\gamma_k \geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$,$X$ 是凸域,则式(2.13)和式(2.14)也是 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为非劣解的充分条件。

2.3 效用理论

决策问题的决策效果不仅取决于决策者所选用的决策规则,而且还取决于决策时所处在的决策环境(如自然状态等)。当自然状态确定时,所研究的效用理论或问题就称为确定性效用理论或问题;当自然状态具有不确定性时,就称为不确定性或随机性效用理论或问题。本节重点研究非确定下的效用理论,即多属性效用函数的存在性。存在性问题是解决决策者的偏好结构在什么条件下可以用效用函数来表示。

在多属性决策问题中,决策者必须能按自己的偏好对可行方案集中的成对方案进行比较,才能选出各方案的排列次序。方案的比较是在每两个方案中进行的,属于二元关系。这个二元关系的序关系便是效用理论研究的出发点。

2.3.1 序关系与偏好序

序关系是任意两个元素(或方案)间相互比较的关系,也是以序数尺度作为两两方案比较的相互关系。它是解决某些多目标决策问题非常有用的概念,特别对那些采用方案排序方法选择最终决策的一类问题尤为有用。

设在一个决策问题中,若 A 表示可行方案集,R 表示可行方案集 A 中任意两个方案的相互(二元)关系,而 a,b,c 分别为 A 中的任意方案,则两两方案的相互关系可有下列基本形式:

(1) 若 aRb 和 bRc,则 aRc,它们相互关系是可传递的,称 R 为传递关系。

(2) 若 aRa,则二元关系 R 是自返的;否则,若 aRa 不成立,则其关系是非自返的。

(3) 若 aRb 且 bRa,则二元关系 R 是对称的;否则,若 aRb,而 bRa 不成立,则 R 是不对称的。

(4) 若 aRb 和 bRa,并且有 $a=b$(即 a 与 b 恒等),则 R 为反对称的。

(5) 若对所有的 $a\in A$ 和 $b\in A$,aRb 和/或 bRa,则二元关系 R 是连通的(或完备的)。

作为序关系的任何相互关系,起码必须是传递的,再加上其他特性,就可构造

出不同类型的序数关系。例如，一个传递关系 R，若它同时也是自返的，则称为拟序(quasi-order)或预序(preorder)；若它同时既是自返的，又是连通的，则称为弱序(weak order)；若它同时既是非自返的，又是连通的，则称为严格(或强)序(strict partial order)；若它是自返的、反对称的，则称为(自返)偏序；若它是非自返的、反对称的、连通的，则称为线序(linear order)，也称为全序或简单序(total order or simple order)。

在效用理论中，偏好是一个重要的概念。它是序关系中的一种关系，用以反映决策者对方案进行比较、排序的偏好或优先权。优于、等价和不劣于是偏好关系中三个最基本的序关系。采用符号"$\succ$"表示严格偏好序"优于"，用符号"$\sim$"表示无差序"等价"，用符号"$\succcurlyeq$"表示"不劣于"。将其中任一种偏好序作为原始概念，可以定义其余的序。例如，以$\succcurlyeq$作为原始的概念，则可定义等价序$\sim$和严格偏好序$\succ$如下：

(1) A 与 B 等价，当且仅当 A 不劣于 B 和 B 不劣于 A，即

$$A \sim B \Leftrightarrow A \succcurlyeq B \text{ 和 } B \succcurlyeq A \tag{2.15}$$

(2) A 优 B，当且仅当 A 不劣于 B 和 B 劣于 A，即

$$A \succ B \Leftrightarrow A \succcurlyeq B \text{ 和非 } B \succcurlyeq A \tag{2.16}$$

同样，从严格偏好序$\succ$出发，也可定义其余两种偏好关系。

在某些决策问题中，作为偏好结构基础的不劣于$\succcurlyeq$(也可用$\sim$和$\succ$)是存在的。但这个假设是以偏好性可以测度为前提，也就是说，偏好关系的存在必定是偏好可测的。在某些决策问题中，将费用作为测度的属性，也即作为偏好性的测度代表，则偏好的测度问题就变成了简单的计算每一方案的属性值(费用值)问题。

然而，在多数情况下，用什么属性作为偏好性测度的代表，又用什么作为尺度单位，并不是都很清楚的，或者说，是很难确定的。这时可以先通过偏好序特性，再确定合适的测量尺度。通常，偏好的测度可用效用来表示。这就是说，效用是决策者对方案偏好程度的测量尺度，或偏好程度量化的代表。

偏好序列的存在保证了偏好可用序数尺度来度量。从偏好度量的角度来看，以$\succcurlyeq$表示的序关系必须是弱序(即可传递的、自返的和连通的)，它在效用理论中起着重要的作用。

$\succcurlyeq$必须是可传递的，即 a 不劣于 b，b 不劣于 c，a 则也不劣于 c。这点似乎是合理的，但在某些情况下并不尽然。例如，当评价三个具有不同风格的网球运动员时，甲乙相比，甲优于乙；乙丙相比，乙优于丙；而甲丙相比时，由于他们打球的风格截然不同，丙比甲优得多。另外，当决策者在不可比方案集中进行排序时，可传递性并不存在。因此，传递性需经证明才能成立。

连通性也是不经严格验证就无法假定它是成立的。连通性要求任意两个方案 $a,b\in A$，或者 a 不劣于 b，或者 b 不劣于 a。也就是说，要么 a 优于 b，要么 b 优于 a，