

非线性弹性理论基础

李卓球 董文堂 编著

北 京

内 容 简 介

本书在直角坐标系和正交曲线坐标系下,系统地分析了连续介质有限变形过程中的应力、应变及它们之间的关系,建立了非线性弹性问题的平衡微分方程、几何方程、协调方程和本构方程,系统地论述了线弹性和非线性弹性问题的变分原理,并将有关理论应用到板壳结构的非线性分析上,此外还就与非线性弹性理论相关的张量、偏微分算子、正交曲线坐标等内容做了简要的介绍。

本书可供力学、土木、机械、航空、地矿等专业的科技工作者和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性弹性理论基础/李卓球,董文堂编著. —北京:科学出版社,2004.8
ISBN 7-03-013715-9

I. 非… II. ①李…②董… III. 非线性弹性力学 IV. 0343.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 059666 号

责任编辑:杨家福/ 责任校对:李奕莹
责任印制:吕春珉/ 封面设计:陈 敬

出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 8 月第一次印刷 印张:10 1/2

印数:1—3 000 字数:197 000

定价:22.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

自 1992 年以来,我在武汉理工大学(原武汉工业大学)为研究生开设了“非线性弹性力学基础”与“结构非线性分析”等课程,并编写了相应的讲义。通过教学以及进一步学习,使讲义不断更新和提高,逐步形成成为本书的初稿。2002 年董文堂教授参加本书的编写,重点编写了第 1 章、第 2 章和第 6 章的 6.1、6.5、6.6 三节,并对第 3 章、第 4 章、第 5 章的部分内容进行了修改和充实。

本书主要介绍固体结构的非线性弹性理论的基本概念、基本理论和基本分析方法。第 1 章主要介绍与本书内容相关的数学基础,主要包括张量分析与微分几何基础;第 2 章采用张量分析方法对线弹性力学理论进行了描述和回顾;第 3 章介绍非线性弹性体的几何应变学基础理论;第 4 章介绍了非线性弹性体的应力描述与基本方程;第 5 章介绍了线性与非线性弹性理论的变分原理和方法;第 6 章介绍了板壳结构的非线性分析和部分求解方法。书后附录 A 中给出了 Riemann-Christoffel 张量的协变分量 $R_{ik\lambda\mu}$ 表达式的推导过程,附录 B 给出四边简支板非线性弯曲问题计算机求解程序。

在本书的编写过程中,参阅了有关著作和文献,受益匪浅,特在此向相关作者表示衷心感谢!

本书既可作为相关研究生的教材,又可供有关科技人员参考。

由于水平有限,书中难免有误,恳请同行与读者批评指正。

李卓球

2004 年 3 月于武汉

目 录

前言

第 1 章 应用数学基础	1
1.1 张量分析基础	1
1.2 正交曲线坐标	11
1.3 微分算子简介	15
第 2 章 线弹性理论	23
2.1 线弹性问题的基本方程组	23
2.2 平衡分析	26
2.3 变形分析	29
2.4 应力-应变关系	34
2.5 线弹性问题求解简介	37
第 3 章 有限变形应变分析	41
3.1 构形描述	41
3.2 变形梯度	43
3.3 微弧的变形	48
3.4 应变张量	51
3.5 有限应变张量的几何意义	53
3.6 有限变形的进一步讨论	59
第 4 章 有限变形应力分析	69
4.1 线元、面元与体元的变换	69
4.2 应力张量的三种描述	73
4.3 应力张量之间的转换	75
4.4 应力张量、应力偏量及其不变量	78
4.5 非线性问题平衡方程	81
4.6 非线性弹性本构方程	83
4.7 非线性相容方程	85
4.8 几何非线性弹性边值问题的提法和求解	86
第 5 章 变分原理	88
5.1 基本概念	88
5.2 散度定理	94
5.3 虚功原理与余虚功原理	95

5.4	最小势能原理与最小余能原理.....	97
5.5	非线性弹性的最小势能原理	101
5.6	非线性多变量广义变分原理	104
5.7	弹性静力学变分原理小结	105
5.8	弹性动力学变分原理	106
第 6 章	板壳结构非线性分析.....	111
6.1	薄板弯曲变形非线性分析	111
6.2	四边简支矩形板非线性弯曲问题的求解方程	117
6.3	薄板非线性弯曲问题的计算机求解方法	120
6.4	四边简支矩形板非线性稳定问题的求解方程	124
6.5	薄壳弯曲变形非线性分析	129
6.6	板壳非线性振动分析	137
附录 A	Riemann-Christoffel 张量的协变分量 $R_{ik\lambda\mu}$ 表达式的推导	141
附录 B	四边简支矩形薄板的非线性弯曲问题求解的计算程序	150
参考文献		161

第 1 章 应用数学基础

1.1 张量分析基础

1.1.1 指标符号

在数学和物理学中,一个几何量或一个物理量常需要使用一组与坐标系有关的标量函数来表示或确定,例如三维空间中一向量 P ,使用 3 个直角坐标分量(p_x, p_y, p_z)方可确定。在弹性力学中,一点的应力状态 σ 需要 9 个直角坐标分量($\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$)来表示。显然,这些分量可以统一写成简洁的表达形式 $\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$,但写法不同表达的意思不同。对于 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$,若记作 $x_i(i=1, 2, \dots, n)$,则称下标 i 为指标,括号内标明 i 的取值范围,则表示是一组变量;若未标明 i 的取值范围,只单写 x_i ,则表示是一组变量中的某一个变量。因此,使用指标符号时,必须指出其范围。在笛卡儿直角坐标系中,指标 i 只用下标。运用指标符号,使几何、物理和力学量的表达十分简洁,如: $u_i(i=1, 2, 3)$ 表示一点位移分量 u, v, w ; $p_i(i=1, 2, 3)$ 表示力矢 P 在三个坐标轴上分量 p_x, p_y, p_z ; $\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 表示一点应力的 9 个分量; $\epsilon_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 表示一点的应变分量,写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

类似地,一组 27 个量可标识为 α_{ijk} ,一组 81 个量可标记为 b_{ijkl} ,如此类推。在数学分析中,指标符号一般与坐标系没有对应关系;但在张量分析中,指标与坐标系是对应的,指标被赋值,则所得的数组就是一几何量或物理量在坐标中的分量。

1.1.2 求和约定

在张量分析中,为了简洁地表示一个带有指标符号的表达式,常使用 Einstein 求和约定。即凡在表达式中的同一项内,同一种指标重复一次且仅重复一次,就表示对该指标在它的取值范围内遍历求和,如: $a_ix_i(i=1, 2, \dots, n)$ 表示 n 项的和,即

$$a_ix_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (1.2)$$

式中 n 是 i 的取值范围,是一个具体的数。再如

$$a_{ij}b_ic_j = a_{i1}b_1c_1 + a_{i2}b_2c_2 + a_{i3}b_3c_3 + a_{21}b_2c_1 + a_{22}b_2c_2 + a_{23}b_2c_3 + a_{31}b_3c_1 + a_{32}b_3c_2 + a_{33}b_3c_3 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

$$\sigma_i = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.4)$$

上述诸式中的指标 i, j 重复均表示求和,这种指标称为哑标,哑标适用于字母指标,即它可任意由其他字母代替,如式(1.4)可用 j 代替 i ,求和后便消失。数字指标是确定的值,不存在求和运算,如 σ_3 代表 σ ,不能用 σ_2 代替,也不允许换标。

Einstein 求和约定中,定义同一项出现两次以上指标重复为错误写法,运算规则也不允许。在实践运算中,这种标例又常出现,如两个求和项的乘积 $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ 等,处理这种等式要根据哑标的定义,将 $\sigma_i \cdot \sigma_i$ 写成 $\sigma_i \cdot \sigma_{jj}$ 即妥,亦可做专门说明或注释求和与否。

在分式或求导记号中,求和约定法则仍然适用,如

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i,i} &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} \quad (i = 1, 2, 3) \\ a_{i,i} &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (i = 1, 2, 3) \\ b_{i,jj} &= \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 b_i}{\partial x_3^2} \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

凡在同一项中不重复出现的指标,称作自由标。自由标号表示该组变量中任何一项,如 $\sigma_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 表示 9 个应力分量中的任何一个。在同一方程中,各项的自由标号应当相同,且不能任意地用另一种自由指标代替。如弹性力学平衡方程可写为式子

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

式中, j 是哑标, i 是自由标,此方程的形式在自由标变化范围内均可适用。 i 代表一个坐标方向,显然第一项的 i 必须与第二项 i 相同。从上式可以看出,通过哑标可以把多项式写成一项,通过自由指标又把多个方程缩写成一个方程,使书写变得十分简洁;但许多重要含义往往表现在指标的细微变化上,不熟练就容易出错。

1.1.3 Kronecker δ_{ij} 符号

δ_{ij} 的定义为

$$\delta_{ij} = e_i \cdot e_j \quad (1.7a)$$

即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.7b)$$

上式表示 9 个量,其中

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$$

δ_{ij} 可表示为单位矩阵

$$I = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7c)$$

δ_{ij} 符号在数学分析中常会遇到,但它只是一种数学符号,其上的指标与坐标系没有对应关系。它的重要作用在于作为指标替换,简化表达式,在张量分析中有广泛和重要的应用。由定义可导出下列一系列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij}\delta_{ij} &= \delta_{ii} = 3 \\ \delta_{ij}\delta_{jk} &= \delta_{ik} \\ \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km} &= \delta_{im} \\ a_{ij}\delta_{ik} &= a_{kj} \\ a_i\delta_{ij} &= a_j \\ a_{ij}\xi_j - \lambda\xi_i &= (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})\xi_j \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}} = \delta_{jk} \quad (1.9)$$

上述关系式均可由定义和之前的求和约定得证。

在直角坐标系中, δ_{ij} 与坐标轴单位矢量有以下关系:

$$\left. \begin{aligned} dx_i dx_i &= \delta_{ij} dx_i dx_j \\ x_{i,j} &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

1.1.4 Ricci符号 e_{ijk}

置换符号 e_{ijk} 的定义为

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当}(i,j,k) \text{ 为}(1,2,3) \text{ 的偶次置换} \\ -1, & \text{当}(i,j,k) \text{ 为}(1,2,3) \text{ 的奇次置换} \\ 0, & \text{当}(i,j,k) \text{ 中指标有重复时} \end{cases} \quad (1.11)$$

e_{ijk} 符号共有 27 个分量,下标不重合的排列组合有 $3! = 6$ 种,其中 i, j, k 成顺时针排列的有三种,即 $(1,2,3)$ 、 $(2,3,1)$ 、 $(3,1,2)$,成逆时针排列的也有 3 种,即 $(1,3,2)$ 、 $(3,2,1)$ 、 $(2,1,3)$,下标重复排列有 21 种。由定义有

$$\left. \begin{aligned} e_{123} &= e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{132} &= e_{321} = e_{213} = -1 \\ e_{111} &= e_{112} = e_{113} = \cdots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

$$\left. \begin{aligned} e_{ijk} &= e_{jki} = e_{kij} = -e_{ikj} = -e_{kji} = -e_{jik} \\ e_{ijk} e_{ijk} &= 6 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

置换符号常用于简化表达式,例如三阶行列式

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = e_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = e_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \quad (1.14)$$

或

$$a = \frac{1}{6} e_{pqr} e_{ijk} a_{ip} a_{jq} a_{kr} \quad (i, j, k = 1, 2, 3; p, q, r = 1, 2, 3) \quad (1.15)$$

e_{ijk} 与 δ_{ij} 和基矢量有如下关系:

$$e_{ijk} e_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{jp} \delta_{iq} \quad (1.16)$$

$$e \times e = e_{ijk} e \quad (1.17)$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} e u_j v_k \quad (1.18)$$

e_{ijk} 符号在直角坐标中常用, 指标与直角坐标系直接联系, 此时它为张量。

1.1.5 坐标变换

设在三维欧氏空间中任选两个新、老坐标系, x'_i 和 x_j 是同一空间点 P 的新、老坐标值, 则方程组

$$x'_i = x'_i(x_j) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.19)$$

这个从老坐标向新坐标的坐标转换称为正变换, 对应的逆变换为

$$x_j = x_j(x'_i) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.20)$$

对式(1.19)微分

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.21)$$

$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ 可看作系数, 故上式给出了由老坐标微分 dx_j 确定新坐标微分 dx'_i 的线性变换。若其系数行列式

$$\left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = J \quad (1.22)$$

处处不为 0, 则存在相应的逆变换, 即可反过来可用 dx'_i 唯一地确定 dx_j 。由单值、一阶偏导数连续且行列式 J 不为零的转换函数所实现的坐标变换称为容许变换; 当 $J > 0$ 则称为正常变换, 它把一个右手坐标系变换成另一个右手坐标系; 当 $J < 0$ 则称为反常变换, 它把一个右手坐标系转换成左手坐标系。张量分析中使用的变换

大都是正常变换。

在笛卡儿直角坐标系中,坐标变换常写成矩阵形式

$$\left. \begin{aligned} \{x'\} &= [a] \{x\} \\ \{x\} &= [a]^T \{x'\} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

其中 $[a]$ 称为转换矩阵,有下列关系:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$[a]^T = [a]^{-1} \quad (1.25)$$

$$a_{ij} = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (i', j = 1, 2, 3)$$

1.1.6 笛卡儿张量的一般定义

力学中常用的量可分为三类:只有大小没有方向性的物理量称为标量,例如温度 T 、密度 ρ 、时间 t 等;既有大小又有方向性的物理量称为矢量,如矢径 $\mathbf{r}$ 、位移 $\mathbf{u}$ 、速度 $\mathbf{v}$ 、力 $\mathbf{F}$ 等;具有多重方向性的更为复杂的物理量称为张量,例如一点的应力状态 σ ,其应力分量同时取决于截面的法线方向和应力分解方向,即具有双重方向性。任何表示某种物理实体的物理量,包括标量、矢量和张量都不会因人为选择不同参数坐标系而改变其固有的性质。然而矢量或标量的分量则与坐标选择密切相关。例如力的大小和方向与坐标选择无关,但力的分量是随坐标转动而改变的。随坐标转换而千变万化的分量间应该满足一定的转换规律才能反映矢量或张量与坐标选择无关的不变性,体现这个转换规律的一类量被 A. Einstein 定名为张量。

满足确定的任意曲线坐标系变换的张量称为一般张量,满足笛卡儿直角坐标系变换的张量定义为笛卡儿张量。张量分量中所含自由指标的数目叫张量的阶,在三维 Euclid 空间中,每一个指标变化从 1~ 3,故 n 阶张量将有 3^n 个分量。

对于标量,它不随坐标系不同而变化,故其只有一个分量,若用张量表示,未含有自由指标, $n=0$,即零阶张量, $3^0 = 3^0 = 1$ 。

对于矢量,它同时具有大小和方向,在每个坐标均有一个分量,在三维空间中 共有 3 个分量,这些分量在坐标变换时要产生变化,变化须服从如下转换规律:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \beta_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, 3) \\ x_j &= \beta_{ij} x'_i \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

其中, x'_i, x_j 是 x 在新、老坐标系中的分量, $\beta_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ 是两个坐标系之间的转换系数。上转换规则与一阶张量的定义相同,有一个自由指标, $n=1$,具有 $3^1 = 3$ 个分量。

对于每个坐标方向都有一个矢量的变量系,它在三维空间就具有 9 个分量 T_{ij} ,坐标变换时这些分量改变且满足如下转换规律:

$$\left. \begin{aligned} T'_{ij} &= \beta_{i'm} \beta_{j'n} T_{mn} \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ T_{mn} &= \beta_{i'm} \beta_{j'n} T'_{ij} \quad (m, n = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

式中, T'_{ij} 和 T_{mn} 是二阶张量 T 在新坐标系中的分量, $\beta_{i'm}$ 、 $\beta_{j'n}$ 是转换系数, 自由指标数目 $n = 2$ 。任意二阶张量的分解式是

$$\begin{aligned} T &= T_{11} \mathbf{e} \mathbf{e} + T_{12} \mathbf{e} \mathbf{e} + \cdots + T_{22} \mathbf{e} \mathbf{e} + \cdots \\ &= T_{mn} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m \\ &= T'_{ij} \mathbf{e}' \mathbf{e}' \end{aligned} \quad (1.28)$$

其中, $\mathbf{e} \mathbf{e}$ 称为基张量。两个基矢量并写在一起只是作为一种记号, 不作任何运算。二阶张量有 9 个分量和 9 个基。它们都随坐标转换而改变。

同理可定义高阶张量, 如三阶张量

$$T = T'_{ijk} \mathbf{e}' \mathbf{e}' \mathbf{e}' = T_{mnl} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l \quad (1.29)$$

用并矢表示为

$$\begin{aligned} T &= \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = (a_i \mathbf{e}_i)(b_j \mathbf{e}_j)(c_k \mathbf{e}_k) \\ &= a_i b_j c_k \mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e} \\ &= T_{ijk} \mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (1.30)$$

可见, 张量的阶数等于并矢的数目。

在 n 维空间中, n 维 k 阶张量要用 n^k 个分量来确定。

1.1.7 张量代数

1. 加减

若有 $T = T_{ijk} \mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e}$ 和 $S = S_{ijk} \mathbf{e} \mathbf{e} \mathbf{e}$, 则

$$\left. \begin{aligned} B &= T \pm S \\ B_{ijk} &= T_{ijk} \pm S_{ijk} \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

同维同阶的张量方可加减, 其结果是一个同维同阶的新张量。

2. 数乘

若 $T = \alpha S$, 则有 $T_{ij} = \alpha S_{ij}$, α 为一标量。

3. 点积

设矢量 $\mathbf{a}$ 与二阶张量 T 点乘, 有:

(1) 矢左点乘

$$\mathbf{a} \cdot T = (a_k \mathbf{e}_k) \cdot (T_{ij} \mathbf{e} \mathbf{e}) = T_{ij} a_k \delta_{ik} \mathbf{e} = T_{ij} a_i \mathbf{e} = b_j \mathbf{e} = \mathbf{b} \quad (1.32)$$

(2) 矢右点乘

$$T \cdot \mathbf{a} = (T_{ij} \mathbf{e} \mathbf{e}) \cdot (a_k \mathbf{e}_k) = T_{ij} a_k \mathbf{e} \delta_{jk} = T_{ij} a_j \mathbf{e} = \mathbf{b} \quad (1.33)$$

其中

$$b_i = T_{ij} a_j$$

矢量与二阶张量点乘的结果是一个新的矢量。

4. 叉乘

(1) 矢左叉乘

$$a \times T = a_i e_i \times T_{jk} e_j e_k = a_i T_{jk} (e_i \times e_j) e_k = a_i T_{jk} (e_{ijl} e_l) e_k = a_i T_{jk} e_{ijl} e_l e_k \quad (1.34)$$

(2) 矢右叉乘

$$T \times a = T_{jk} e_j e_k \times a_i e_i = T_{jk} a_i e_j e_k e_i = a_i T_{jk} e_{kil} e_j e_i \quad (1.35)$$

(3) 两矢叉乘

$$c = a \times b = (a_j e_j) \times (b_k e_k) = e_{ijk} a_j b_k e_i = c_i e_i \quad (1.36)$$

易验证

$$\left. \begin{aligned} e_i \times e_j &= e_{ijk} e_k \\ e_i &= \frac{1}{2} e_{ijk} e_j \times e_k \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

5. 并乘

设有两个不同维的张量

$$A = A_{ijk} e_i e_j e_k, \quad B = B_{lm} e_l e_m$$

并乘则为

$$T = AB = T_{ijkln} e_i e_j e_k e_l e_n \quad (1.38)$$

其分量关系为

$$T_{ijkln} = A_{ijk} B_{ln}$$

可以看出,并乘得到一新张量,张量的阶数等于原张量阶数之和,其指标结构按 A、B 指标结构并乘次序顺排,并乘不满足交换率,先变换后并乘与先并乘后变换结果一样。

6. 内积

设

$$A = A_{ij} e_i e_j, \quad B = B_{kl} e_k e_l$$

(1) 单点积

$$A \cdot B = (A_{ij} e_i e_j) \cdot (B_{kl} e_k e_l) = A_{ij} B_{kl} e_i e_j e_k e_l = A_{ij} B_{jl} e_i e_i = C_{il} e_i e_i \quad (1.39)$$

故

$$C_{il} = A_{ij} B_{jl}$$

二阶张量单点积的结果是一个新的二阶张量(i, l 为自由指标),这种运算亦称为缩并,比并乘低两阶。

(2) 串双点积

$$A \cdot \cdot B = (A_{ij} e_i e_j) \cdot \cdot (B_{kl} e_k e_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} (e_i \cdot e_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = A_{ij} B_{ji} \quad (1.40)$$

运算顺序为“内内,外外”。

(3) 并双点积

$$A \cdot B = (A_{ij} e_i e_j) : (B_{kl} e_k e_l) = A_{ij} B_{kl} (e_i \cdot e_k) (e_j \cdot e_l) = A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = A_{ij} B_{ij} \quad (1.41)$$

运算顺序为“前前,后后”。

7. 商判则

由内积运算引出的一个判别张量的准则。它表示为:和任意矢量的内积为 $k-1$ 阶张量的量一定是一个 k 阶张量。

8. 常用特殊张量

(1) 零张量。全分量为零,记为 0 ,在其他坐标系中也为零,即:若 $T=0$,则 $T_{ij}=0, T'_{ij}=0$ 。

(2) 单位张量。分量为 δ_{ij} 的二阶张量,记为 I ,即

$$I = \delta_{ij} e_i e_j = e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3$$

$$I'_{ij} = \beta'_{i'k} \beta_{j'l} I_{kl} = \beta'_{i'k} \beta_{j'l} \delta_{kl} = \beta'_{i'k} \beta_{j'k} = \delta'_{i'j'} = \delta_{ij} \quad (1.42)$$

(3) 转置张量。设二阶张量 $T = T_{ij} e_i e_j$,则定义

$$T^T = T_{ij} e_j e_i \quad (1.43)$$

(1.43)式中的 e_i 与 e_j 的位置不能调换,否则相当于哑标换名,结果仍然是 T 。

设 a 为矢量,则

$$T \cdot a = a \cdot T^T, \quad T_{ij} a_j = a_j T_{ji}^T \quad (1.44)$$

$$\left. \begin{aligned} (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \\ (A^T)^T &= A \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

(4) 对称张量。转置后等于自身的张量的称为对称张量,即

$$T = T^T, \quad T_{ij} = T_{ji} \quad (1.46)$$

(5) 反对称张量。转置后等于其负张量的张量称为反对称张量,即

$$T = -T^T, \quad T_{ij} = -T_{ji} \quad (1.47)$$

反对称张量有 $T_{ii} = 0$ 。

(6) 球形张量。主对角线为 α 其余分量为零的二阶张量,它是数 α 与单位张量的数积,即

$$S = \alpha I, \quad S_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (1.48)$$

(7) 逆张量。二阶张量 T 的逆张量 T^{-1} 定义为

$$\left. \begin{aligned} T \cdot T^{-1} &= I, \quad T^{-1} \cdot T = I \\ T_{ij} T^{-1}_{jk} &= \delta_{ik}, \quad T^{-1}_{ij} T_{jk} = \delta_{ik} \\ (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

(8) 正交张量。其定义为

$$T \cdot T^T = T^T \cdot T = I \quad (1.50)$$

显然满足 $T^{-1} = T^T$ 。

(9) 置换张量。以 e_{ijk} 为分量的三阶张量

$$e = e_{ijk} e_i e_j e_k = e'_{ijk} e'_i e'_j e'_k \quad (1.51)$$

(10) 各向同性张量。全分量均不因坐标变换而改变的张量称为各向同性张量。标量、单位张量、球张量、置换张量均是各向同性张量。

一般的四阶各向同性张量分量 A_{ijkl} 具有下列形式:

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.52)$$

其中, λ 和 μ 为两个独立的标量。

9. 主方向与主分量

一个矢量 a 和张量 T 的点乘将是另一个矢量 b , 即

$$T \cdot a = b, \quad T_{ij} a_j = b_i \quad (1.53)$$

矢量 a, b 一般不同向。由此可知, 二阶张量可定义为将矢量 a 变换为 b 的线性变换算子。若选择 a , 使其通过 T 作线性变换后的 b 恰好平行于 a , 则有

$$\lambda a = T \cdot a = b (\lambda \text{ 为标量})$$

写成

$$(T - \lambda I) a = 0$$

或

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) a_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.54)$$

上式中, λ 和 a_j 均为未知量。 a_j 存在非零解的充分必要条件是 $|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.55)$$

展开得到关于 λ 的特征方程

$$\lambda^3 - I \lambda^2 + II \lambda - III = 0 \quad (1.56)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I &= T_{ii} \\ II &= \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) \\ III &= e_{ijk} T_{1i} T_{1j} T_{3k} \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

特征方程(1.56)的三个特征根称为张量 T 的主分量。

当 T 是实对称张量时, 存在三个实特征根 $\lambda_{(k)} (k = 1, 2, 3)$ 。将每个 $\lambda_{(k)}$ 代回到 $(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) a_j = 0$ 式, 由单位矢量条件 $a_i a_i = 1$, 可解出相应的方向余弦 $a_{j(k)}$, 三个单位矢量 $a_{(k)} = a_{j(k)} e_j$ 称为张量 T 的主方向。

10. 加法分解

任何二阶张量 T 均可分解为对称张量 N 和反对称张量 Ω 之和, 即

$$T = N + \Omega \quad (1.58)$$

其中

$$N = \frac{1}{2}(T + T^T)$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(T - T^T)$$

而对称张量 N 又可分解为球形张量 P 和偏斜张量 D 之和

$$N = P + D, \quad N_{ij} = P_{ij} + D_{ij} \quad (1.59)$$

其中

$$P_{ij} = \frac{1}{3}N_{kk}\delta_{ij}, \quad D_{ij} = N_{ij} - \frac{1}{3}N_{kk}\delta_{ij}$$

11. 乘法分解

设 T 为任意一个可逆的二阶张量, 则它可以分解为

$$T = R \cdot U = V \cdot R \quad (1.60)$$

其中 R, R 为单位正交张量, U, V 为正定对称张量。可以证明 $R = R = R$, R 表示旋转, U, V 代表纯变形, $R \cdot U$ 称为右极分解, $V \cdot R$ 称为左极分解, 于是 T 对应的线性变换可写为

$$T \cdot \alpha = R \cdot U \cdot \alpha = V \cdot R \cdot \alpha \quad (1.61)$$

$R \cdot U \cdot \alpha$ 表示先变形后转动, $V \cdot R \cdot \alpha$ 表示先转动后变形。

12. 笛卡儿张量的微积分

考虑笛卡儿张量

$$T = T_{mn} e_n e_m$$

对 x_i 求偏导数

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_i} e_n e_m \quad (1.62)$$

$\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_i}$ 可简写为 $T_{mn,i}$ 。当坐标转换时, 若

$$T'_{rs} = \beta_{r'm} \beta_{s'n} T_{mn}$$

则有

$$T'_{rs,j} = \frac{\partial T'_{rs}}{\partial x_j} = \beta_{r'm} \beta_{s'n} \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \beta_{r'm} \beta_{s'n} \beta_{j'i} T_{mn,i} \quad (1.63)$$

其中, 由式(1.26), 有

$$\beta_{j'i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

引进 Hamilton 算子 ∇ , 其定义为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_i} e_i = u_i e_i = u_{j,i} e_j e_i \quad (1.64)$$

$$\nabla u = e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = e_i \partial_i u = \partial_i u_j e_j e_i \quad (1.65)$$

在矢量场和张量场中, 一般说来

$$u \nabla \neq \nabla u$$

对二阶张量

$$\left. \begin{aligned} T \nabla &= T_{mn,i} e_n e_i e_m \\ \nabla T &= \partial_i T_{mn} e_i e_n e_m \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

张量微分运用规则常用的有

$$\left. \begin{aligned} (A \pm B) \nabla &= A \nabla \pm B \nabla \\ \nabla (A \pm B) &= \nabla A \pm \nabla B \\ (\lambda A) \nabla &= A(\lambda \nabla) + \lambda(A \nabla) \\ \nabla (\lambda A) &= (\nabla \lambda) A + \lambda(\nabla A) \\ (A_{ij} B_{rs})_{,p} &= A_{ij,p} B_{rs} + A_{ij} B_{rs,p} \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

式中, λ 是坐标的函数。

单位张量 I 和置换张量 e 都是与坐标无关的恒张量, 求导时作为常量处理。

1.2 正交曲线坐标

1.2.1 曲线坐标的概念

三维欧氏空间中任意点 M 的位置由三个笛卡儿坐标 $x_j (j=1, 2, 3)$ 唯一确定, 也可以用三个任意独立参数 $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ 作为参数坐标。两组坐标之间的转换关系为

$$x_j = x_j(\alpha) \quad (1.68)$$

或

$$\alpha_i = \alpha_i(x_j) \quad (1.69)$$

为了使两坐标间有一一对应关系, 须满足

$$J = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (1.70)$$

设由空间点 $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 出发, 让坐标 α_1 任意变化而 α_2 和 α_3 保持不变, 可做出一条过 M 点的空间曲线, 即坐标线 α_1 , 同样可以得到坐标线 α_2 和 α_3 , 如图 1.1 所示。令 α_1 和 α_2 任意变化而 α_3 保持不变, 则相应的空间点的轨迹构成了坐标面 $\alpha_1 \alpha_2$, 同样可以得到坐标面 $\alpha_1 \alpha_3$ 和 $\alpha_2 \alpha_3$ 。很显然, 相邻坐标面的交线就是坐标线, 过每个空间点都有三个坐标面和三根坐标线。若在空间里的任意一点处坐标曲线都相互正交, 相应的各坐标面也相互正交, 这种坐标系称为正交曲线坐标系。常用的直角坐标、极坐标、球坐标、柱坐标都是它的特例。

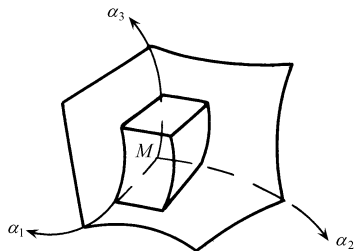


图 1.1

曲线坐标 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 上的切线单位矢量依次用 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 表示,其正向分别指向 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 增加的一侧。在曲线坐标系中,单位矢量随点 M 的变化而变化,这是与笛卡儿直角坐标系的根本区别。

有了单位矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 后,过 M 点的任一矢量 $\mathbf{a}$ 都可表示为

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = \alpha_i \mathbf{e}_i \quad (1.71)$$

1.2.2 坐标曲线的弧微分

考虑到图 1.2 中的两相邻点 $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 和 $N(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2, \alpha_3 + d\alpha_3)$, 它们的矢径分别是 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, 其中

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 = \mathbf{g}_i d\alpha_i \quad (1.72)$$

式中

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.73)$$

$\mathbf{g}_i$ 为沿坐标线 α_i 的切线方向并指向坐标值增加一方的矢量,称为该曲线坐标的基矢量。

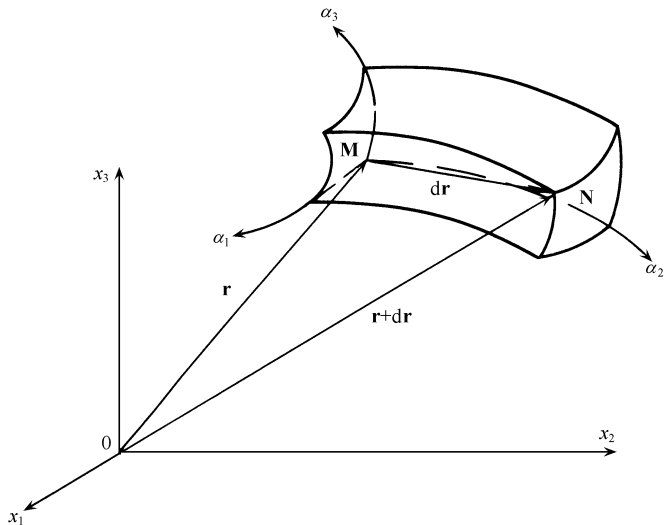


图 1.2

从式(1.73)可以看出,矢径微分对基矢量 $\mathbf{g}_i$ 分解所得到的分量就是曲线坐标的微分 $d\alpha_i$ 。在正交曲线坐标系中,三个基矢量 $\mathbf{g}_i$ 互相垂直,但不一定是单位矢量,它们与单位矢量的关系是

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{g}_i}{h_i} \quad (i \text{ 非哑标}) \quad (1.74)$$

式中, h_i 称为 Lamé 系数,其定义为

$$h_i = |\mathbf{g}_i| = \sqrt{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i} \quad (1.75)$$

在笛卡儿直角坐标中, $\mathbf{e} = \mathbf{g}$, 故有

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_j} \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_j} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_l}{\partial \alpha_j} \delta_{kl} \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} \quad (k \text{ 为哑标}) \end{aligned} \quad (1.76)$$

令式(1.76)中 $i = j$, 再代入到式(1.75)展开, 有

$$h_i = \sqrt{\left[\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \right]^2 + \left[\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_i} \right]^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.77)$$

与笛卡儿坐标系对应, 正交曲线坐标系中单位基矢量亦有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \delta_{ij} \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j &= \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

将式(1.74)代入到式(1.72), 得到

$$d\mathbf{r} = \mathbf{g} d\alpha = \sum_{i=1}^3 h_i d\alpha_i \mathbf{e}_i = ds_i \mathbf{e}_i \quad (1.79)$$

其中

$$ds_i = h_i d\alpha_i \quad (i \text{ 为自由指标}) \quad (1.80)$$

从式(1.80)可以看出, Lamé 系数是当坐标改变时 α 曲线的弧长增量与 α 坐标增量的比值。当可以从几何上直接确定线元长度 ds_i 时, 用式(1.80)求 Lamé 系数是很方便的。如笛卡儿坐标系中的 $ds_i = dx_i$, 所以 $h_i = 1 (i = 1, 2, 3)$ 对于平面极坐标系, $ds_1 = dr, ds_2 = r d\theta$, 因此 Lamé 系数 $h_1 = 1, h_2 = r$ 。正交曲线坐标系中, 线元长度 ds 的计算公式为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = ds_i ds_j \delta_{ij} = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 \quad (1.81)$$

面元面积计算公式为

$$dA_k = ds_i ds_j = h_i h_j d\alpha_i d\alpha_j \quad (i \neq j \neq k) \quad (1.82)$$

体元体积计算公式为

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (1.83)$$

1.2.3 单位基矢量的导数

1. 对异坐标的偏导数

正交曲线坐标系单位基矢量的长度处处为 1, 方向随点移动而变, 因而其对坐标的导数一般不为零。下面利用单位基矢量的一些性质推导对它求导数的一些法则。由

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1 \quad (1.84)$$

上式中, i 为自由指标, 下同。

式(1.84)等号两边对坐标 α_j 求导

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (1.85)$$

要满足此式, 必须

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (1.86)$$

由此可看出, 正交曲线坐标系中任何单位基矢量的导数必与其本身正交。

由矢径连续条件

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_j \partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}$$

有

$$\frac{\partial(h_i \mathbf{e})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e} + h_i \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} \mathbf{e} + h_j \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha} \quad (1.87)$$

上式等号两边同乘 $\mathbf{e}$, 注意到式(1.86), 得到

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} \quad (j \text{ 为自由标, 下同}) \quad (1.88)$$

由

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (1.89)$$

上式等号两边对坐标 α_k 求导, 有

$$\frac{\partial(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_k} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_k} = 0$$

即

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_k} \cdot \mathbf{e} = - \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_k} \quad (1.90)$$

由此式可看出, 对换求导基矢量与另一基矢量的点积结果, 二者差一负号。在式(1.90)中, 令 $k = j$, 将式(1.88)代入, 得到

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} = - \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} \quad (i \neq j) \quad (1.91)$$

再将上式代入到式(1.90), 得到

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} \mathbf{e} \quad (j \text{ 为自由指标}) \quad (1.92)$$

用 $\mathbf{e}$ 点乘式(1.92), 有

$$\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (1.93)$$

2. 对同坐标的偏导数

由 $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x \mathbf{e}$, 等号两边对坐标取偏导数, 注意到式(1.91), 有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \alpha} \\
&= \frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \left[\frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_k} \right] \mathbf{e} \\
&= -\frac{1}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_j} \mathbf{e} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \alpha_k} \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{1.94}$$

与异坐标偏导数不同,同坐标偏导数一般不沿坐标轴方向。

正交曲线坐标系中的单位矢量 $\mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{e}_j$ 、 $\mathbf{e}_k$ 与笛卡儿直角坐标系中的单位矢量 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 之间的变换经常用到。令

$$\theta_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i}, \quad \beta_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j}, \quad \gamma_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_k} \tag{1.95}$$

二者之间方向余弦关系见表 1.1。

表 1.1

	i	j	k
$\mathbf{e}_i$	θ_i	β_i	γ_i
$\mathbf{e}_j$	θ_j	β_j	γ_j
$\mathbf{e}_k$	θ_k	β_k	γ_k

这样

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} &= \theta_i \mathbf{i} + \beta_j \mathbf{j} + \gamma_k \mathbf{k} \\
\mathbf{i} &= \theta_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{j} = \beta_j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{k} = \gamma_k \mathbf{e}_k
\end{aligned}$$

利用后边式(1.97)也可导出切线单位矢量对曲线坐标的导数公式。

1.3 微分算子简介

1.3.1 场的概念

描述物理量在空间分布和变化规律用场的概念非常简便,这在数学、物理学当中有详尽论述,这里只简介连续介质力学中用到的场论知识。

全部空间或部分空间里的每一个点都对应着某个物理量的一个确定值,在该空间里就确定了物理量的一个场。物理量是标量就称这个场为标量场;物理量是矢量就称这个场为矢量场。连续介质力学中的位移场、应力场都是矢量场。场中物理量在各点处的对应值不随时间变化的场称为稳定场。反之,称为不稳定场。

1.3.2 Hamilton算子 ∇

场论的三个基本概念是梯度、散度和旋度。简洁地表示它们要用 Hamilton 算子 ∇ 。

∇ 是一个微分计算的符号,同时也当作矢量看待,具有矢性和微分双重性质。读作 N abla。在笛卡儿坐标系中,它定义为

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.96)$$

∇ 运算规则是

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_1} i + \frac{\partial u}{\partial x_2} j + \frac{\partial u}{\partial x_3} k \quad (1.97)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \quad (1.98)$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad (1.99)$$

式(1.97)中 u 是数性函数,式(1.98)、(1.99)中 A 是矢性函数。

作为 ∇ 算子涵义的延伸,又可定义如下形式的算子

$$A \cdot \nabla = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.100)$$

由此式,显然有

$$(A \cdot \nabla)u = A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad (1.101)$$

式(1.101)中, u 为数性或矢性函数上式均成立, $A \cdot \nabla \neq \nabla \cdot A$ 。

∇ 与数性函数或矢性函数通过并乘、点乘和叉乘可组合成多种表达形式,其运算规则建立在矢性函数的运算规则和 ∇ 算子的运算规则上,要特别注意“ $\nabla \cdot$ ”,“ $\nabla \times$ ”后只能跟矢性函数; ∇ 后跟数性函数还是跟矢性函数结果将大为不同,也是易出错的地方。

除了众所熟悉的公式外,下面再列出一些常用到的公式,其中 u 为数性函数, A 、 B 为矢性函数, C 为常矢量。

$$(1) \nabla \cdot (uC) = \nabla u \cdot C \quad (1.102)$$

$$(2) \nabla \times (uC) = \nabla u \times C \quad (1.103)$$

$$(3) \nabla \cdot (uA) = u \nabla \cdot A + \nabla u \cdot A \quad (1.104)$$

$$(4) \nabla \times (uA) = u \nabla \times A + \nabla u \times A \quad (1.105)$$

$$(5) \nabla (A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + (A \cdot \nabla) B + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla) A \quad (1.106)$$

$$(6) \nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) \quad (1.107)$$

$$(7) \nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla) A - (A \cdot \nabla) B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) \quad (1.108)$$

$$(8) \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u, (\nabla \cdot \nabla) A = \nabla^2 A \quad (1.109)$$

$$(9) \nabla \times (\nabla u) = 0 \quad (1.110)$$

$$(10) \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \quad (1.111)$$

$$(11) \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad (1.112)$$

算子 ∇ 本身并乘、点乘和叉乘构成的多重算子一般视为整体算子,作为一个符号看待。如 $\nabla \cdot \nabla$ 、 $\nabla \times \nabla \times$ 、 $\nabla \nabla \cdot$ 等,其后跟按单重算子所限定的函数。常用的 Laplace 算子 Δ 与 Hamilton 算子 ∇ 的关系显示了 $\nabla \cdot \nabla$ 作为整体算子的涵义,描述电磁波理论的双旋度算子 $\nabla \times \nabla \times$ 也反映了整体性的要求。Laplace 算子的定义为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (1.113)$$

两种算子之间的关系为

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \left[i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \left[i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \\ &= \Delta \end{aligned} \quad (1.114)$$

∇ 由 Hamilton 1843 年在建立四元数论中首次提出,后由 J. C. Maxwell 在电磁场理论研究中加以完善,它的数学定义使有关物理现象的描述非常简洁。由于应用的延伸,其本身的表达形式及其物理含义也在逐步完善。

1.3.3 笛卡儿坐标系中的梯度、散度和旋度

1. 梯度

梯度是导数概念的推广。笛卡儿坐标系中,梯度定义在标量场 $u = u(x_1, x_2, x_3)$, 其表达式为

$$\text{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_1} i + \frac{\partial u}{\partial x_2} j + \frac{\partial u}{\partial x_3} k \quad (1.115)$$

用 ∇ 算子和左右梯度表示

$$\text{左梯度} \quad \nabla u = \mathbb{I} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \mathbb{I} \partial_i u \quad (1.116)$$

$$\text{右梯度} \quad u \nabla = \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathbb{I} = u_{,i} \mathbb{I} \quad (1.117)$$

式中, u 是标量,但 ∇u 作为整体是一个矢量,它是相应点处方向导数的最大值。标量场左右梯度相同, ∇u 具有两个重要的性质:

(1) ∇u 在 v 方向的投影等于函数 u 在该方向的方向导数,即

$$\frac{\partial u}{\partial v} = v \cdot \nabla u$$

(2) ∇u 沿函数 u 等值面的法线方向,并指向 u 值增加的一方。

梯度的这两个性质表明了梯度矢量和方向导数以及数量场的等值面之间存在

着一种确定的关系,这种关系有极为重要的应用。

数量场中每一点与该点的梯度一一对应起来就得到一个矢量场,这个矢量场称为由数量场产生的梯度场。

梯度运算的基本公式如下:

$$\nabla C = 0 \quad (C \text{ 为常数}) \quad \nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u \quad (1.118)$$

$$\nabla(Cu) = C \nabla u \quad (C \text{ 为常数}) \quad \nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v \nabla u - u \nabla v) \quad (1.119)$$

$$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad \nabla f(u) = f'(u) \nabla u \quad (1.120)$$

2. 散度

散度定义是算子 ∇ 与一矢量的点积,它定义在矢量场 $A = A(x_1, x_2, x_3)$ 。矢量 A 的散度由式

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A = \nabla \cdot A &= \mathbf{I} \cdot \frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (1.121)$$

给出,式中 A 是矢量, $\nabla \cdot A$ 为标量,可见矢量场的散度是一个标量场。

将矢量场的散度的定义推广到张量场,由 ∇ 与一张量点积将得到一个降阶的新张量,但两者的位置不同,结果也不相同。以二阶张量 $T = T_{mn} \mathbf{I}_m \mathbf{I}_n$ 为例,有

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot T &= \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} = \partial_i T_{mn} \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}_m \mathbf{I}_n = \partial_i T_{in} \mathbf{I}_n \\ T \cdot \nabla &= \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{I} = T_{mn,i} \mathbf{I}_m \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{I} = T_{mi,i} \mathbf{I}_m \end{aligned} \right\} \quad (1.122)$$

一般情况下, $\nabla \cdot T \neq T \cdot \nabla$, 但当 $T = T^T$ 时,二者是相等的。

3. 旋度

矢量场 $A(x_1, x_2, x_3)$ 的旋度为算子 ∇ 与一矢量的叉乘,它的分量形式是

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} A = \nabla \times A &= \mathbf{I} \times \frac{\partial A}{\partial x_j} = \mathbf{I} \times \frac{\partial(A_k \mathbf{I}_k)}{\partial x_j} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \mathbf{I} \times \mathbf{I}_k \\ &= \partial_j A_k \epsilon_{ijk} \mathbf{I}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.123)$$

矢量场的旋度是一个矢量场。

推广到张量场 T , 可定义

$$\text{左旋度} \quad \nabla \times T = \mathbf{I} \times \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.124)$$

$$\text{右旋度} \quad T \times \nabla = \frac{\partial T}{\partial x_i} \times \mathbf{I} \quad (1.125)$$

张量场的旋度是一个具有同阶的张量,但 $\nabla \times T \neq T \times \nabla$ 。

梯度、散度和旋度在固体力学中有重要的作用,例如应变张量与位移场的梯度

有关,转动张量与位移场的旋度有关,平衡方程与应力场的散度有关,此外,保守力系的定义也与梯度有关等。

1.3.4 正交曲线坐标系中的梯度、散度和旋度

正交曲线坐标系中,除了标量、矢量和张量是坐标的函数外,单位基矢量、拉梅系数也是坐标的函数。

1. 标量场 u 的梯度

它由正交曲线坐标系中算子 ∇ 的表示,标量场 u 的梯度为

$$\nabla u = u \nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \mathbf{e}_3 \quad (1.126)$$

标量场没定义散度和旋度。

2. 矢量场 A 的梯度、散度和旋度

(1) 梯度

$$\left. \begin{aligned} \nabla A &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} = \mathbf{e}_j \frac{\partial A}{\partial s_j} \\ A \nabla &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial A}{\partial s_j} \mathbf{e}_j \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3 \text{ 哑标}) \quad (1.127)$$

(2) 散度

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (1.128)$$

(1.128)式中第一项展开为

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{e}_i \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_1 \mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 \cdot \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_1 \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3 \cdot \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (A_1 \mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \mathbf{e}_1 + A_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_1} \right] + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{e}_1 + A_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_2} \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_3 \cdot \frac{1}{h_3} \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} \mathbf{e}_1 + A_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \alpha_3} \right] \end{aligned}$$

代入单位基矢量对坐标偏导的结果,得到

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{e}_i \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_1 \mathbf{e}_1) &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1} A_1 + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1} A_1 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (h_2 h_3 A_1) \end{aligned} \quad (1.129)$$

同理,第二项、第三项展开分别为

$$\sum \mathbf{e}_i \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_2 \mathbf{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (h_3 h_1 A_2) \quad (1.130)$$

$$\sum \mathbf{e} \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (A_3 \mathbf{e}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (h_1 h_2 A_3) \quad (1.131)$$

由以上展开过程可以看出

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \quad (1.132)$$

展开须遵循先偏导后点乘的顺序。

当 $\mathbf{A} = \nabla u$ 时

$$\nabla \cdot \nabla u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \alpha_3} \right) \right] \quad (1.133)$$

这就是拉普拉斯算子表达式。

(3) 旋度

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \times \frac{\partial \mathbf{A}}{h_i \partial \alpha_i} \\ &= \sum_{i,k=1}^3 \left[\frac{1}{h_i} \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k + \frac{1}{h_i} A_k \mathbf{e}_i \times \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \alpha_i} \right] \end{aligned} \quad (1.134)$$

展开并整理,最后有

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (1.135)$$

展开须遵循先导后叉乘的顺序。

3. 张量场 T 的梯度、散度和旋度

(1) 梯度

$$\left. \begin{aligned} \nabla T &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial T}{\partial s_j} \\ T \nabla &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial T}{\partial s_j} \mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 3 \text{ 哑标}) \quad (1.136)$$

令 $T = T_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$, 有

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + T_{mn} \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial \alpha_i} \mathbf{e}_n + T_{mn} \mathbf{e}_m \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial \alpha_i} \quad (1.137)$$

(2) 散度

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot T &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \\ T \cdot \nabla &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \quad (1.138)$$

(3) 旋度

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{T} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \times \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha_i} \\ \mathbf{T} \times \nabla &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \alpha_i} \times \mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \quad (1.139)$$

4. 柱面坐标系中的梯度、散度、旋度与 Laplace 算子

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.140)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.141)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \quad (1.142)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.143)$$

5. 球面坐标系中的梯度、散度和旋度与 Laplace 算子

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (1.144)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi \sin \varphi) \quad (1.145)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \left[\frac{\partial(\sin \varphi A_\theta)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (1.146)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) \right] \quad (1.147)$$

上两种坐标系中的 θ 角定义一致。

1.3.5 Gauss 积分定理

设 $\mathbf{A}$ 是定义在三维域 V 上的矢量场, S 是 V 的闭合边界曲面, 其面元 dS 的外法线单位矢量为 $\mathbf{n}$ 。若 $\mathbf{A}$ 在闭域 $V + S$ 上有连续的偏导数, 则

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS \quad (1.148)$$

或

$$\int_V \mathbf{A} \cdot \nabla dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

写成分量形式为

$$\int_V \partial_i A_i dV = \int_S n_i A_i dS \quad (1.149)$$

或

$$\int_V A_{i,i} dV = \int_S A_i n_i dS$$

写成标量形式有

$$\int_V \left[\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right] dV = \int_S (A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3) dS \quad (1.150)$$

这也就是在高等数学中熟悉的 Gauss 公式。

Gauss 积分定理亦称散度定理,给出了体积积分和面积积分的变换关系,弹性力学中许多能量原理都是在此理论基础上推导出来的。

Gauss 积分定理有不同表示形式,但核心是把体积积分中的“ ∇ ”变为面积积分中的“ n ”。这一规律适用于矢量场,同样也可以推广到连续可微的标量场和张量场。如有

$$\int_V \nabla \varphi dV = \int_S n \varphi dS \quad (\varphi \text{ 为标量}) \quad (1.151)$$

$$\int_V \nabla \cdot T dV = \int_S n \cdot T dS \quad (T \text{ 为张量}) \quad (1.152)$$

及其分量的对应表达式。

多重积分中的分部积分是 Gauss 积分定理的推论。如由

$$\int_{\tau} (uv)_{,i} d\tau = \int_{\tau} u v_{,i} d\tau + \int_{\tau} u_{,i} v d\tau = \int_S u v n_i dS$$

得到

$$\int_{\tau} u v_{,i} d\tau = \int_S u v n_i dS - \int_{\tau} u_{,i} v d\tau \quad (1.153)$$

式中 u, v 是标量,但 u, v 是矢量分量或张量分量上式仍成立。这种处理方法在弹性力学中也有重要、广泛的应用。

Gauss 积分定理可推广到面与线的变换关系。

第 2 章 线弹性理论

2.1 线弹性问题的基本方程组

线弹性体力学最基本的问题是确定 15 个未知量,即 3 个位移分量 u_i 、6 个应变分量 ε_{ij} 和 6 个应力分量 σ_{ij} 。这 15 个未知函数(都是坐标分量的函数)满足三组偏微分方程,即平衡方程 3 个、几何方程 6 个和本构方程 6 个,此外还要满足变形协调条件、位移单值条件和相应的边界条件。如果针对具体结构问题所得到的解答能全部满足 15 个微分方程和全部边界条件,则解答是精确的;若只能满足部分方程和部分边界条件,则解答是近似的。

本章通过分析微元体的平衡、变形和本构关系,导出线弹性力学基本问题的全部方程,它们是:

(1) 平衡方程(Navier 方程)

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3 \text{ 哑标遍历求和})$$

(2) 几何方程(Cauchy 方程)

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

(3) 应变协调方程(Saint-Venant 方程)

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ki} = 0 \quad (2.3)$$

(4) 本构方程(Hooke 定律)。对各向异性体,有

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

其中, C_{ijkl} 为弹性张量,容易证明

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.5)$$

由式(2.5),可以看出 C_{ijkl} 中的独立常量最多不超过 21 个。

式(2.4)的本构关系可用应力分量表示,即

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.6)$$

复合材料力学中把 a_{ijkl} 称为柔度系数分量,而把 C_{ijkl} 称为刚度系数分量。容易验证

$$C_{ijkl} \cdot a_{ijkl} = 1 \quad (2.7)$$

对于各项同性体

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (k = 1, 2, 3, \text{为哑标}) \quad (2.8)$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.9)$$

式中

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

其中, λ, μ 称为拉梅常数, E 为弹性模量, ν 为泊松比。

(5) 边界条件。弹性力学空间问题边界条件大致分为三类:位移边界条件、力边界条件和混合边界条件。设 S 是物体的总边界,位移边界用 S_u 表示,力边界用 S_p 表示。

当边界上处处给定外部作用力 p_i 的力边界 S_p 时,相应的边界条件为

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad (2.11)$$

即域内应力场的边界值应满足 Cauchy 公式。当 $p_i = 0$ 时称为自由表面,集中力的作用应化为单位面积上的均布面力作用,集中力矩作用则化为非均匀表面力的作用。

当边界上处处给定位移约束 u_i 的位移边界 S_u 时,相应的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2.12)$$

即域内位移场的边界值等于给定边界值。当未给定位移边界值时,可用位移边界的导数值或应变值。当部分边界给定外力、部分边界给定位移时,要根据具体情况做变换或做放松处理。在以位移为基本未知量的解法中,力边界可转换为位移边界,但以应力为基本未知量的解法中位移边界都不能转换成为力边界。

线弹性问题的研究是从弹性体元微分入手,导出一组描述微元静力平衡、变形几何及弹性关系的基本方程,配上相应的边界条件,把弹性力学问题归结于求解偏微分方程组的边界问题,这在弹性力学问题理论中称为边值提法或微分提法,这一组基本方程已经完全是数学物理问题了。

从力学观点上看,可把上述微分方程和边界条件分为三类:第一类由几何方程和边界条件组成,它们同是连续性的要求,故称之为连续性条件。第二类由物理方程组成,它反映物体自身的力学性质,因而称之为本构关系。第三类由平衡方程和力边界条件组成,它们同是反映平衡要求,故称之为平衡条件。

此外,物理方程还可以通过应变能密度或余应变能密度表示出来。

应变能密度 $W(\varepsilon_{ij})$ 定义为

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{(\varepsilon_{ij})} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.13)$$

上式中 σ_{ij} 是 ε_{ij} 的单值可积函数。从式(2.13)看出, $W(\varepsilon_{ij})$ 的物理意义就是当物体的应变状态由 0 增至 ε_{ij} 时应力所做的功。可以证明, 它表示单位体积内储存的变形能, 亦称应变能。物体总应变能为

$$U = \iiint_{\tau} W(\varepsilon_{ij}) d\tau \quad (2.14)$$

将式(2.13)两端微分, 得

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

可见有

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (2.15)$$

在线弹性状态下, σ_{ij} 是 ε_{ij} 的线性函数。式(2.13)可进一步表为

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \quad (2.16)$$

可以看出, W 是 ε_{ij} 的二次齐次方。

$$W = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} [\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}]^2 + \mu [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2] + 2\mu(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{12}^2) \quad (2.17)$$

余应变能密度可定义为

$$W^*(\sigma_{ij}) = \int_0^{(\sigma_{ij})} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (2.18)$$

上式要求 ε_{ij} 是 σ_{ij} 的可积单值函数, 将其与式(2.13)相加后, 得

$$W + W^* = \int d(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) \quad (2.19)$$

可见

$$W + W^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

式(2.20)表明余应变能与应变能互补的性质。此外, 由式(2.19)同样可以证明下列关系成立:

$$\frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \quad (2.21)$$

在线弹性状态下, 将式(2.19)积分, 可得

$$W^* = \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} \quad (2.22)$$

对于线弹性状态下的各向同性材料, 式(2.22)可进一步简化为

$$W^* = \frac{1}{2E} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + 2(1+\nu)(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)] \quad (2.23)$$