

21 世纪高等院校教材

有限元法基础与程序设计

李亚智 赵美英 万小鹏 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书讲述结构分析中有限元法的基本原理、程序设计方法和航空结构有限元分析建模技术。基础理论部分主要介绍杆系结构、平面问题、空间问题和等参数单元,重点是有限元法的基本原理及表达格式的建立途径,单元插值函数和特性矩阵的构造及不同单元特性的比较;程序部分结合二维问题静力分析算例,讨论了有限元结构分析的流程、数据结构、算法及其C语言程序设计,同时也给出了相同结构的FORTRAN语言程序,供不同编程语言偏好的人员选择;应用部分介绍了当前国内外有限元软件的功能、现状、发展趋势和复杂组合航空结构建模技术。

本书可以作为高等工科院校固体力学、飞行器设计专业学生有限元法结构分析的教材,也适合各行业从事结构工程的技术人员、有关学科的研究生在学习和研究工作中参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法基础与程序设计/李亚智,赵美英,万小朋编著. —北京:科学出版社,2004.1

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-012418-9

I. 有… II. ①李…②赵…③万… III. ①有限元法-高等学校-教材
②有限元分析-应用软件-程序设计-高等学校-教材 IV. O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第106757号

责任编辑:杨波 王静/责任校对:赵燕

责任印制:张克忠/封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第一版 开本:B5(720×1000)

2006年6月第三次印刷 印张:18 3/4

印数:5 001—6 500 字数:355 000

定价:26.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

本书内容分成三个组成部分。基础理论部分主要介绍杆系结构、平面问题、空间问题和等参数单元，重点是有限元法的基本原理及表达格式的建立途径，单元插值函数和特性矩阵的构造及不同单元特性的比较；程序部分结合二维问题静力分析算例，讨论了有限元结构分析的流程、数据结构、算法及其 C 语言程序设计，同时也给出了相同结构的 FORTRAN 语言程序，供不同编程语言偏好的人员选择；应用部分介绍了当前国内外有限元软件的功能、现状、发展趋势和复杂组合航空结构建模技术。将程序设计部分放在有限元基础理论后讨论，两部分内容均能保持自身体系结构的完整性，相对独立且各有侧重，便于分别组织教学和参考。

本书共分 12 章。第一章是有限元法引论和概述，第二章讨论杆梁类单元有限元法，第三章介绍有限元分析的一般步骤，第四章讨论平面问题有限元的推导，第五章介绍空间问题有限元法，第六章讨论高次元和等参元的推导，第七章介绍有限元程序设计的算例和几种常用单元刚度矩阵程序段的设计，第八章讨论总刚度矩阵的组集及刚度方程的建立方法，第九章是结构刚度方程的求解算法及其程序设计，第十章结合具体算例讨论平面薄壁结构、平面应力问题的程序设计问题，第十一章概要介绍现有大型有限元结构分析程序系统特点，第十二章介绍航空结构建模技术和大型结构有限元分析范例。

全书力图将理论与应用相结合、简明性与完整性相结合，内容编排上由简到繁，循序渐进，注重有限元分析思路的建立和有限元分析整体轮廓的明晰。基础部分的主要章节后附有习题，供学员作为巩固知识练习之用。程序部分通过对 C 语言和 FORTRAN 语言分别编写的两套计算机程序的算法、结构和流程的了解以及计算机操作练习，巩固和加深理论概念，进而更容易地理解和掌握常用通用结构分析软件系统的特点、功能和使用原理，建立实际结构简化和建模的思路和方法。

本书编写分工为，第一章由赵美英、李亚智编写，第三章由万小朋编写，第二、四、五、六章由赵美英编写，第七章至第十章由李亚智编写，第十一章由万小朋、李亚智编写，第十二章由万小朋、赵美英编写，最后由李亚智统一修订。

本书可作为高等工科院校固体力学、飞行器设计专业学生学习有限元课程的教材，也适合从事结构工程的技术人员、相关学科的研究生在学习和研究工作中参考。

西安交通大学建筑工程与力学学院张陵教授在百忙中抽出时间，详细审阅了本书全稿，指出了多处谬误，提出了许多很好的建议。对此，作者谨致以深深的谢意，并已经根据审阅意见进行了重要的修改。

本书编写中部分得到黄玉珊先生基金会经费资助。

对本书尚存在的不妥和需改进之处，诚恳地希望读者提出批评和改进意见。

编 者

2001年12月

目 录

第一章 有限元方法引论	1
§ 1.1 有限元法简介	1
§ 1.2 有限元分析的一般过程	1
§ 1.3 有限元法在结构分析中的地位	3
第二章 杆系结构有限元法	5
§ 2.1 杆单元	5
2.1.1 一般规定	5
2.1.2 位移函数(形状函数)	5
2.1.3 几何关系及物理关系	7
2.1.4 平衡关系	8
2.1.5 坐标变换	9
2.1.6 全结构的平衡	11
2.1.7 边界条件的处理	12
2.1.8 算例	13
§ 2.2 平面直梁单元	15
2.2.1 位移函数	15
2.2.2 梁元的刚度矩阵	20
2.2.3 等效结点力	21
习 题	24
第三章 有限元方法的一般步骤	27
§ 3.1 结构的离散化	27
3.1.1 基本单元形状	27
3.1.2 离散过程	30
§ 3.2 选择位移函数	39
3.2.1 位移函数的多项式形式	39
3.2.2 插值多项式阶次的选择	40
3.2.3 收敛性要求	42
§ 3.3 单元刚度矩阵的建立	43
3.3.1 虚位移原理	43
3.3.2 单元位移	44

3.3.3	单元应变与应力	45
3.3.4	结点力与单元刚度矩阵	46
3.3.5	结点载荷	47
§ 3.4	单元刚度矩阵组装及整体分析	49
3.4.1	单刚组装形成总刚	49
3.4.2	结点平衡方程	50
3.4.3	位移边界条件	51
3.4.4	总刚度平衡方程的求解	55
3.4.5	求解内力	59
§ 3.5	子结构分析	59
习 题	60
第四章	平面问题有限元法	64
§ 4.1	平面问题的基本关系式	64
§ 4.2	常应变三角形单元	66
4.2.1	位移函数及形状函数	66
4.2.2	几何矩阵, 应力矩阵	70
4.2.3	单元的刚度方程	71
4.2.4	等效结点力	72
§ 4.3	四结点矩形单元	75
§ 4.4	面积坐标与高阶三角形单元	79
§ 4.5	高阶矩形单元	86
习 题	88
第五章	空间问题有限元法	92
§ 5.1	三维应力状态	92
§ 5.2	四面体常应变单元	93
5.2.1	位移函数	94
5.2.2	应变矩阵	95
5.2.3	单元刚度矩阵	96
5.2.4	载荷分配	96
5.2.5	四面体的组合	97
§ 5.3	直六面体单元	98
习 题	100
第六章	等参数单元	102
§ 6.1	平面四结点等参元	102
6.1.1	坐标变换与等参单元	102

6.1.2	单元刚度矩阵的计算	104
6.1.3	等参变换的条件和等参单元的收敛性	106
§ 6.2	八结点曲边等参单元	108
6.2.1	位移函数	108
6.2.2	等参单元等效结点力	110
§ 6.3	二十结点三维等参单元	113
6.3.1	形状函数	113
6.3.2	单元刚度矩阵	114
§ 6.4	数值积分	116
6.4.1	一维高斯求积公式	117
6.4.2	二维及三维高斯求积公式	117
6.4.3	等参元计算中数值积分阶次的选择	118
6.4.4	二维三角形单元和三维四面体单元的 Hammer 积分	120
§ 6.5	应力修匀	121
6.5.1	单元平均或结点平均	122
6.5.2	总体应力磨平	123
6.5.3	单元应力磨平	124
习 题		125
第七章	单元刚度矩阵有关程序段的设计	128
§ 7.1	有限元分析典型算例	128
§ 7.2	杆元刚度矩阵程序	132
§ 7.3	梁元刚度矩阵程序	134
§ 7.4	常应变三角形单元的刚度矩阵和应力矩阵程序	136
§ 7.5	常剪流任意四边形板单元的刚度矩阵程序	139
§ 7.6	八结点曲边等参单元刚度矩阵和应力矩阵计算程序	142
7.6.1	形函数及其导数计算	142
7.6.2	雅可比矩阵及形函数对整体坐标的导数	144
7.6.3	几何矩阵和应力矩阵	145
7.6.4	单元刚度矩阵	147
§ 7.7	计算单元刚度矩阵的 FORTRAN 子程序	150
7.7.1	杆元刚度矩阵子程序	150
7.7.2	梁元刚度矩阵子程序	151
7.7.3	常应变三角元刚度矩阵和应力矩阵的子程序	153
7.7.4	常剪流四边形元刚度矩阵子程序	155
7.7.5	八结点曲边四边形等参元分析的有关子程序	157

第八章 总刚度矩阵的组集及刚度方程的建立	162
§ 8.1 单元的地址程序段	162
§ 8.2 组装总刚度矩阵的程序	163
8.2.1 整体存储总刚度矩阵程序	164
8.2.2 一维数组, 变带宽存储总刚度矩阵	165
§ 8.3 总载荷向量的形成	168
8.3.1 常应变三角元分布面力的等效结点力和总载荷向量组装程序	169
8.3.2 八结点等参元边界分布面力的等效结点力和总载荷向量组装程序	171
§ 8.4 建立结构总刚度矩阵的 FORTRAN 子例行程序	174
8.4.1 单元的地址程序段	174
8.4.2 整体存储总刚度矩阵程序	174
8.4.3 求某一类单元对总刚半带宽的贡献的子程序	174
8.4.4 单元刚度矩阵进入总刚—组集—维总刚子程序	175
8.4.5 常应变三角元载荷处理子程序	175
8.4.6 八结点等参元载荷处理子程序	176
第九章 结构刚度方程的求解算法及程序设计	178
§ 9.1 高斯消去法	178
§ 9.2 因子化法	182
§ 9.3 结构刚度方程的求解算法 FORTRAN 子例行程序	190
9.3.1 高斯消去法子程序	190
9.3.2 因子化法子程序	191
第十章 平面薄壁结构、平面应力问题的程序设计	193
§ 10.1 平面薄壁结构的算例分析	193
10.1.1 第一种方法, 采用高斯消去的算法	193
10.1.2 第二种方法, 用因子化法求解	200
§ 10.2 平面应力问题的算例分析	202
10.2.1 用常应变三角元离散化求解平面应力问题	202
10.2.2 用八结点四边形等参元离散化求解平面应力问题	208
§ 10.3 平面薄壁结构和平面应力问题算例 FORTRAN 源程序	216
10.3.1 平面薄壁结构分析用源程序	216
10.3.2 平面应力问题用常应变三角元离散化时源程序	224
10.3.3 平面应力问题用八结点等参元离散化时源程序	228
附录 A 平面薄壁结构算例原始数据文件及计算结果	234
A-1 平面薄壁结构算例原始数据文件	234
A-2 平面薄壁结构算例计算结果	236

附录 B 平面应力问题算例的原始数据文件及计算结果	237
B-1 平面应力问题算例采用常应变三角元离散化的原始数据文件	237
B-2 平面应力问题算例采用常应变三角元离散化的计算结果	239
B-3 平面应力问题算例采用八结点等参元离散化的原始数据文件	245
B-4 平面应力问题算例采用八结点等参元离散化的计算结果	253
第十一章 有限元结构分析程序系统特点	259
§ 11.1 有限元软件技术	259
11.1.1 数据管理技术	259
11.1.2 用户界面与系统集成技术	260
11.1.3 智能化技术	260
11.1.4 软件自动生成技术	260
11.1.5 可视化技术	261
11.1.6 面向对象的有限元软件方法	261
§ 11.2 有限元分析程序	262
11.2.1 本体程序	262
11.2.2 前置处理	264
11.2.3 后置处理	265
§ 11.3 大型有限元结构分析程序	268
§ 11.4 MSC. PATRAN/NASTRAN 有限元分析程序系统简介	270
11.4.1 MSC. NASTRAN 软件系统	270
11.4.2 MSC. PATRAN 软件系统	272
11.4.3 MSC. PATRAN/NASTRAN 应用实例	273
第十二章 飞机结构有限元分析	275
§ 12.1 航空组合结构有限元分析模型的建立	275
12.1.1 建模准则	275
12.1.2 单元分析	276
12.1.3 航空结构模型中单元的选取	277
§ 12.2 飞机舵面结构的有限元分析	282
12.2.1 典型结构简介	282
12.2.2 舵面结构传力分析	284
12.2.3 有限元模型的选取	285
12.2.4 边界条件	287
12.2.5 载荷	287
参考文献	290

第一章 有限元方法引论

§ 1.1 有限元法简介

有限元法的基本思想是将一个连续域离散化为有限个单元并通过有限个结点相连接的等效集合体. 由于单元能按不同的联结方式进行组合, 且单元本身又可以有不同形状, 因此可以模型化几何形状复杂的求解域. 有限元法利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数. 单元内的近似函数由未知场函数在单元的各个结点的数值和其插值函数来表达. 这样一来, 一个问题的有限元分析中, 未知场函数在各个结点上的数值就成为新的未知量, 从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题. 一经求解出这些未知量, 就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值, 从而得到整个求解域上的近似解. 显然, 随着单元数目的增加, 也即单元尺寸的缩小, 或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高, 解的近似程度将不断改进. 如果单元是满足收敛要求的, 近似解最后将收敛于精确解.

虽然近些年才采用了有限元这个名字, 但有限元的概念在几个世纪以前就已经用过了. 例如古代数学家用多边形逼近圆的办法求出圆周长. 现代有限元法第一个成功的尝试, 是将刚架位移法推广应用于弹性力学平面问题, 这是 Turner, Clough 等人在分析飞机结构时于 1956 年得到的成果, 他们第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答. 随着高速计算机的发展, 有限元的应用也以十分惊人的速度发展. 现在有限元法已被工程师和科学家们公认是一种完善的和方便的分析工具. 40 多年来, 有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题, 由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题. 分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等, 从固体力学扩展到流体力学、传热学等连续介质力学领域. 在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合. 鉴于本书是大学生教科书, 其重点是介绍线性静力分析内容.

§ 1.2 有限元分析的一般过程

采用有限元法时, 先把连续体或结构划分为若干个有限大小的单元, 这就叫“有限单元”或简称为“有限元”, 它们的形状随所选的模型不同而异, 如面元可以是

三角形、矩形或四边形等.各个单元的大小可以不同,排列方式也没有严格的要求.每个单元通过一些特定的“结点”与周围其他单元联结,例如图 1-1 所示.

有限元法解题的整个过程扼要叙述如下:

步骤 1:结构的离散化.有限元法的第一步,是把结构或连续体分割成许多单元,因而在着手分析时,必须用适当的单元把结构模型化,并确定单元的数量、类型、大小和布置.

步骤 2:从区域或结构中取出其中一个单元来研究.选择适当的插值模式或位移模式近似地描述单元的位移场.由于在任意给定的载荷作用下,复杂结构的位移解不可能预先准确地知道,因此,通常把插值模式取为多项式形式.从计算的观点看多项式简单,而且满足一定的收敛要求.单元位移函数用多项式来近似后,问题就转化为如何求出结点位移.结点位移确定后,位移场也就确定了.

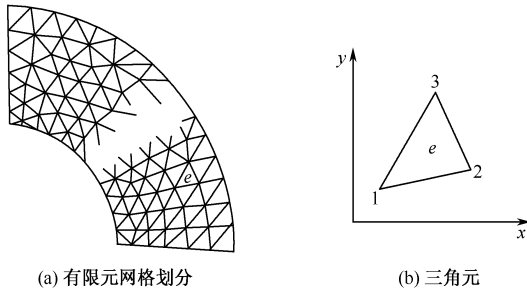


图 1-1 有限元网格划分

步骤 3:单元刚度矩阵和载荷向量的推导.根据假设的位移模式,利用平衡条件或适当的变分原理可以推导出单元 e 的刚度矩阵 $[K]^{(e)}$ 和载荷向量 $p^{(e)}$.

步骤 4:集合单元方程得到总的平衡方程组.连续体或结构是由许多个有限单元组合而成,因此,对整个连续体或结构进行有限元分析时,就需进行组合.把各个单元刚度矩阵和载荷向量按适当方式进行组合,从而建立如下形式的方程组:

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \tag{1-1}$$

式(1-1)是结点上内力与外力的平衡方程,称为总体刚度平衡方程或简称总刚度方程.其中, $[K]$ 称为总刚度矩阵; $\{\delta\}$ 是整体结构的结点位移; $\{P\}$ 是作用在整个结构的有限元结点上的外力.

步骤 5:求解未知结点位移.按问题的边界条件修改总的平衡方程,使结构不可刚体移动,对于线性问题可以很容易地从代数方程组中解出结点位移 $\{\delta\}$.

步骤 6:单元应变和应力的计算.可根据已知的结点位移利用固体力学或结构力学的有关方程算出单元的应变和应力.

§ 1.3 有限元法在结构分析中的地位

经典的弹性力学方法在处理复杂的结构问题时,尽管人们做了极大努力,但真正解决的问题却为数不多.而做过某些简化的结构力学方法,在以往的结构设计和计算中是可行的,也广泛地得到应用,但所需人员之多,计算周期之长也是不可讳言的.有限元法是在力学原理基础上,以电子计算机为工具,简便而有效的对复杂工程结构问题进行数值分析的方法.随着有限元法的数值分析理论和计算机技术的发展,使越来越复杂的工程问题和大型结构的分析用有限元法求解成为现实,各类专用、通用有限元结构分析软件已经成为力学理论工作者和从事结构工程的技术人员不可或缺的分析工具,结构分析工作所耗人力、时间大大减小.所以说对于从事结构设计与分析的工程人员来说,掌握和运用有限元法是必不可少的.通过学习有限元基础理论和编程实践,一方面能有效地利用现有的成果和计算程序,掌握正确的建模技术,很好地解决工程实际问题,另一方面也具有改进现有方法和计算程序并发展新的单元、算法以及计算程序的能力.

为了很好地求解一个工程结构,除了拥有大容量高速度的计算机和高级计算软件外,还有十分重要的一条就是要建立一个好的有限元分析模型.未经系统训练或只听过有限元引论讲座的人使用功能很强的有限元程序解题是不太适宜的,他们不能对计算机所提供的结果进行正确的判断,从而无法对计算模型做必要的修改.盲目地相信计算机提供的结果是相当危险的.要知道,尽管计算程序已经过严格鉴定,但你的有限元模型中可能会有潜在的危险.只有当模型能如实地反映结构的几何形状、材料特性、传力路线、承载方式及边界约束条件等因素时才有可能取得一个接近真实的分析结果.要建立一个好的模型,必须有丰富的经验和良好的工程直感.因此,本书不仅介绍有限元法的基本理论,也重点介绍结构建模技术.在掌握有限元基本原理基础上,进一步掌握建模技术,将为学员今后从事像航空结构这类复杂组合结构的分析,提供更实际、更有效的帮助.

有限元程序设计是学习有限元法的实践性环节.在科学技术发展的今天,有限元法取得了巨大的进展,很多通用程序和专用程序投入了实际应用,成功地解决了大批有重大意义的问题.但是,有限元程序设计仍有存在的必要.因为,了解有限元法的理论,与在实际工作中理解或应用有限元程序之间,仍有很大距离.首先,进行科学研究和解决某些特殊的工程问题时仍可能借助于自行编制的各种专用有限元分析程序.其次,学习有限元程序设计原理,能够帮助学员进一步巩固有限元法的概念,熟悉结构分析的过程,使得在使用各种大型结构分析软件时做到心中有数.另一方面,以有限元法为媒介进行基本的编程训练,也对学员掌握一般的程序设计方法有实际的帮助.这对于今后从事更为复杂庞大的程序设计工作或从事其他工

程领域的工作是不无裨益的.学习有限元程序设计的重点是掌握数据的表达方式、数据结构和算法.所以,在理解有限元法的基本原理、建模技术的基础上,进一步掌握有限元程序设计的方法,一方面能有效地利用现有的成果和计算程序,另一方面能具有改进现有方法和计算程序、发展新的单元和数值方法以及计算程序的能力.

第二章 杆系结构有限元法

杆系结构的共同点是它们本身含有有限个自然结点.对于桁架结构,这些结点就是二力杆端部的铰接点,对于刚架结构,这些自然结点或是结构的转折点,或者是集中载荷作用点.全结构被这些自然结点离散化为有限个单元,桁架可以视为仅能承受轴向拉压的杆单元的集合,刚架可视为既承受弯、剪,又承受轴力及扭转的梁单元的集合.

杆单元和梁单元是有限元法中最简单的单元,对这些单元进行分析,有较清晰的物理意义,其结论在很大意义上反映了有限元法的本质.本着先简后繁,先易后难的原则,先从杆元、梁元进行分析,其目的是得出有限元法共同的、规律性的东西.

§ 2.1 杆 单 元

2.1.1 一般规定

图 2-1 表示某一杆单元 ij ,现约定附属于该单元的局部坐标系为 xyz , i 点为原点, x 轴沿着杆轴线,其正方向为由 i 指向 j ,其余各轴按右手螺旋规则确定.设 $u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j$ 为杆元结点位移分量, $U_i, V_i, W_i, U_j, V_j, W_j$ 为结点力分量,上述分量一律规定和坐标轴正向一致时为正.设杆的长度为 l ,弹性模量为 E ,横截面积为 A .

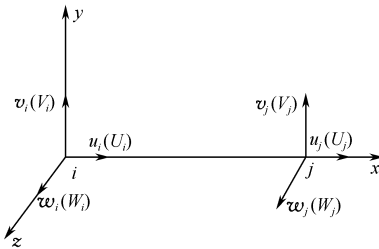


图 2-1 杆单元结点位移、结点力分量

2.1.2 位移函数(形状函数)

对于铰接杆单元,在小变形假设的前提下,与杆垂直方向的位移并不使杆产生

应变和应力.于是,对每一个结点只需考虑一个结点位移及结点力,因而只需研究如图 2-2 所示的杆单元即可.

单元在结点力作用下各点的位移叫内位移,描绘内位移的函数叫位移函数.由材料力学知道:仅受轴向作用的二力杆,其应力及应变在轴线各点处均是恒定常数,因而位移沿杆子轴线呈线性变化,即

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (2-1)$$

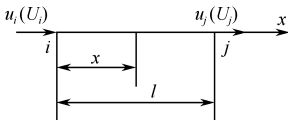


图 2-2 二力杆单元

这就是二力杆单元的位移函数.式中 a_1, a_2 是两个待定常数,可由 i, j 两结点的位移惟一确定.当

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad u(0) = u_i \\ x = l, & \quad u(l) = u_j \end{aligned} \quad (2-2)$$

将式(2-2)代入式(2-1)有: $u_i = a_1, u_j = a_1 + a_2 l$,从而可得

$$\begin{aligned} a_1 &= u_i \\ a_2 &= \frac{u_j - u_i}{l} \end{aligned} \quad (2-3)$$

将式(2-3)中的 a_1, a_2 值代入式(2-1)得

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l} x = \left| 1 - \frac{x}{l} \right| u_i + \frac{x}{l} u_j$$

或写成

$$u(x) = \left| 1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right| \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N_i, N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta \}^e$$

通常用 $\{ u \}$ 代表单元内位移

$$\{ u \} = [N] \{ \delta \}^e = N_i u_i + N_j u_j \quad (2-4)$$

其中

$$N_i = 1 - \frac{x}{l}, N_j = \frac{x}{l}$$

在有限元法中, N_i, N_j 叫做 i 点、 j 点的形状函数或插值函数, $[N]$ 叫形状函数矩阵.形状函数矩阵十分重要,它把单元的结点位移和单元的内位移连接起来了.显然形状函数矩阵中的每一个元素都是坐标的函数.

下面分析式(2-4):当 $u_i = 1, u_j = 0$ 时,杆单元的位移 $u(x)$ 就是 N_i ,当 $u_j = 1, u_i = 0$ 时杆单元的位移分布就是 N_j ,所以形状函数的力学含义是当单元的一个结点位移为单位值,其他结点的位移为零时,单元内位移的分布规律.杆单元形状函数 N_i, N_j 如图 2-3 所示.当结构变形之后, i, j 点的位移通常都不为零,这时单元内位移按式(2-4)由结点位移和相应的形状函数线性组合求得,正因为形状函数反映了单元的位移分布形态,矩阵 $[N]$ 及其元素 N_i, N_j 也由此而得名为形状函数

矩阵和形状函数.

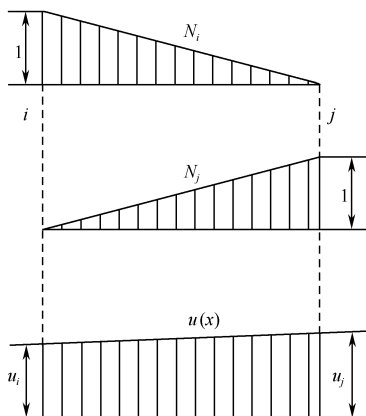


图 2-3 形状函数和位移函数

再分析式(2-4)可以看出:通过形状函数把两孤立的常值位移 u_i 、 u_j 化为连续函数 $u(x)$, 数学上讲, 就是已知函数在闭区间两个端点上的值 u_i 、 u_j , 构成一个连续函数 $u(x)$, 它在端点应保证等于 u_i 、 u_j , 这样的计算步骤就是内插, 形状函数 N_i 、 N_j 就是实现内插的两个函数, 所以 $N_i(x)$ 、 $N_j(x)$ 又叫内插函数, 形状函数矩阵 $[N]$ 又叫内插函数矩阵, 而式 $u(x) = N_i u_i + N_j u_j$ 又叫内插多项式.

形状函数除上面所谈的力学意义之外, 还有更重要的数学意义. 如果说结构被自然结点离散化为有限元的集合, 实现了结构模型离散化, 那么, 形状函数完成了数学模型离散化, 这两个离散化的步骤构成了有限元法的理论基础. 在用有限元法解连续介质问题时, 这个离散化就显得格外重要.

2.1.3 几何关系及物理关系

有了位移函数, 就可分析单元的应变及应力, 根据应变定义

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

将位移函数(2-4)式代入有

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x\} = \frac{d}{dx} [N] \{\delta\}^e = \left| \frac{d}{dx} \left[1 - \frac{x}{l} \right], \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{l} \right] \right| \{\delta\}^e = \frac{1}{l} [-1, 1] \{\delta\}^e$$

或写成

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e \quad (2-5)$$

其中, $[B] = \frac{1}{l} [-1, 1]$ 叫做几何矩阵. 几何矩阵 $[B]$ 把单元的结点位移 $\{\delta\}^e$ 和应

变列阵 $\{\epsilon\}$ 联系起来.对于拉(压)杆,应力与应变之间的关系有

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

用矩阵表示为

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (2-6)$$

在杆单元中 $\{\sigma\}$ 是应力列阵,只有一个元素, $[D]$ 叫弹性矩阵,是 1×1 阶的.将式(2-5)代入式(2-6)得

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e = [S]\{\delta\}^e$$

其中 $[S]=[D][B]$ 叫应力矩阵,对于杆单元 $[S]=\frac{E}{l}[-1, 1]$.

2.1.4 平衡关系

单元产生结点位移之后,相应的在单元端点有结点力作用,结点力列阵以 $\{F\}^e$ 表示,对于杆单元, $\{F\}^e = \{U_i, U_j\}$,单元在外力和内力作用下处于平衡,反映单元平衡状态的关系式就是刚度方程,现利用最小势能原理推导单元的刚度方程.

最小势能原理是说:在满足连续条件和边界条件的位移中,满足平衡条件的位移其总势能最小,反之亦然.单元总势能 Π^e 为

$$\Pi^e = U^e + V^e \quad (2-7)$$

其中, U^e 为单元的应变能; V^e 为单元的外力势.

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V ([B]\{\delta\}^e)^T [D][B]\{\delta\}^e dV \\ &= \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T \int_V [B]^T [D][B] dV \cdot \{\delta\}^e \end{aligned}$$

令 $[K]^e = \int_V [B]^T [D][B] dV$,故

$$U^e = \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T \cdot [K]^e \cdot \{\delta\}^e \quad (2-8)$$

外力势 $V^e = -(\{\delta\}^e)^T \{F\}^e$,则总势能:

$$\Pi^e = U^e + V^e = \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T [K]^e \cdot \{\delta\}^e - (\{\delta\}^e)^T \cdot \{F\}^e$$

使 $\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{\delta\}^e} = 0$,则

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{\delta\}^e} = [K]^e \cdot \{\delta\}^e - \{F\}^e = 0$$

故

$$[K]^e \cdot \{\delta\}^e = \{F\}^e \quad (2-9)$$

式(2-9)即杆单元的平衡方程.其中杆单元在局部坐标系下单元刚度矩阵的显式为

$$\begin{aligned}
 [K]^e &= \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_0^l \frac{1}{l} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{l} [-1, 1] A dx \\
 &= \frac{AE}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2-10)
 \end{aligned}$$

2.1.5 坐标变换

上面的分析均是建立在单元的局部坐标系上,这样得出的刚度矩阵简单一些.但是在研究结点的平衡时,由于每个结点通常总是连接两个以上的单元,与之有关的结点力分别属于不同的单元,这时如果采用单元专有的局部坐标就很不方便.另外结点位移的量度也应沿着统一的坐标轴才易体现位移的协调条件,因而要把局部坐标系的刚度矩阵转换到各单元统一的总体坐标系中.

设 $x-Oy$ 为总体坐标系, xOy 为局部坐标系,如图 2-4 所示,规定由总体坐标系 x 轴到局部坐标系 x 轴的夹角 α 逆时针为正.平面杆单元总体坐标系下的结点位移分量用 u_i, v_i 表示,局部坐标系下的位移分量用 u_i, v_i 表示.平面杆单元结点 i 总体坐标系结点位移在局部坐标系下的位移分量有

$$\begin{aligned}
 u_i &= u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha \\
 v_i &= -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha
 \end{aligned}$$

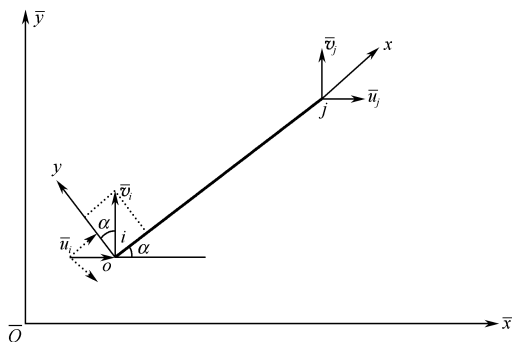


图 2-4 平面杆单元总体坐标系位移在局部轴方向分量

同样对于 j 点有

$$\begin{aligned}
 u_j &= u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha \\
 v_j &= -u_j \sin \alpha + v_j \cos \alpha
 \end{aligned}$$

用矩阵表示为

$$\{\delta_l\} = \begin{vmatrix} u_l \\ v_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_l \\ v_l \end{vmatrix} = [\lambda] \{\delta_l\} \quad (l = i, j)$$

式中 $\{\delta_l\}$, $\{\delta_T\}$ 分别表示 l 结点位移在局部坐标系和总体坐标系中的位移列阵, $[\lambda]$ 矩阵是方向余弦矩阵. 对两结点杆单元, 当用总体坐标系位移 $\{\delta\}^e$ 表示局部坐标系中的位移 $\{\delta\}^e$ 时有转换关系

$$\{\delta\}^e = \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [\lambda] & \\ & [\lambda] \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{vmatrix} = [T]\{\delta\}^e \quad (2-11)$$

式中 $[T]$ 矩阵叫坐标变换矩阵. $[T]$ 矩阵是以 $[\lambda]$ 阵为子阵的对角方阵. 因 $[T]$ 是正交矩阵, 所以 $[T]^{-1}=[T]^T$, 当用局部坐标系位移表示总体坐标系中的位移时有

$$\{\delta\}^e = [T]^T\{\delta\}^e$$

利用类似的办法, 可以建立起总体坐标系与局部坐标系间结点力的关系式

$$\{F\}^e = [T]^T\{F\}^e \quad (2-12)$$

最后, 把式(2-9)代入式(2-12), 再把式(2-11)代入得

$$\{F\}^e = [T]^T\{F\}^e = [T]^T[K]^e\{\delta\}^e = [T]^T[K]^e[T]\{\delta\}^e$$

令 $[K]^e=[T]^T[K]^e[T]$, 则

$$\{F\}^e = [K]^e\{\delta\}^e \quad (2-13)$$

式(2-11), (2-12), (2-13)就是两种坐标系中的全部转换关系, 利用式(2-13)就可很容易地将局部坐标系的刚度矩阵转换为总体坐标系的刚度矩阵. 对于图 2-4 所示的杆单元, 其表示式为

$$[K]^e = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} AE \\ l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2-14)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{AE}{l} \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & & & \text{对} \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & & \text{称} \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix}$$

依照同样道理,在空间桁架的计算中,也可以进行方便的转换.设局部坐标的 x, y, z 轴与总体坐标轴 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 之间夹角方向余弦为 $\cos(x, \bar{x}), \cos(x, \bar{y}), \cos(x, \bar{z}), \cos(y, \bar{x}), \cos(y, \bar{y}), \cos(y, \bar{z}), \cos(z, \bar{x}), \cos(z, \bar{y}), \cos(z, \bar{z})$, 则相应的位移关系为

$$u_i = \bar{u}_i \cos(x, \bar{x}) + \bar{v}_i \cos(x, \bar{y}) + \bar{w}_i \cos(x, \bar{z})$$

$$v_i = \bar{u}_i \cos(y, \bar{x}) + \bar{v}_i \cos(y, \bar{y}) + \bar{w}_i \cos(y, \bar{z})$$

$$w_i = \bar{u}_i \cos(z, \bar{x}) + \bar{v}_i \cos(z, \bar{y}) + \bar{w}_i \cos(z, \bar{z})$$

方向余弦矩阵 $[\lambda]$ 为

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos(x, \bar{x}) & \cos(x, \bar{y}) & \cos(x, \bar{z}) \\ \cos(y, \bar{x}) & \cos(y, \bar{y}) & \cos(y, \bar{z}) \\ \cos(z, \bar{x}) & \cos(z, \bar{y}) & \cos(z, \bar{z}) \end{bmatrix}$$

于是空间杆单元坐标变换矩阵 $[T]$ 为

$$[T] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix}$$

单元在两个坐标系中刚度矩阵转换关系同样有

$$[K]^e = [T]^T [K]^e [T] \quad (2-15)$$

总结以上坐标变换矩阵,需要指出,由于 $[T]$ 矩阵中仅仅包含有坐标的倾角,可见当坐标轴平移时, $[T]$ 矩阵变成单位矩阵 $[I]$,对刚度矩阵没有影响,因而如果仅平行地移动坐标轴,刚度矩阵中元素值不变,矩阵的阶数也不改变.

2.1.6 全结构的平衡

一旦在公共的总体坐标系中求得了单元刚度矩阵,下一步的工作是将全部单元的刚度矩阵叠加起来,得到整个结构的刚度矩阵.集合单元矩阵和向量的方法是以单元结点处的“协调性”要求为基础.这意味着在结点处各单元是连在一起的.在统一的坐标系内,与任一结点 i 相连的各单元,在此结点处的位移是相同的,它们对 i 结点的作用力,与 i 结点上的外载荷是互相平衡的.因此,可在统一的坐标系内,将全部单元的刚度矩阵叠加起来,就得到整个结构的刚度矩阵

$$[K] = \sum_{e=1}^m [K]^e \quad (2-16)$$

具体做法是把各单元刚度矩阵中的元素值按全结构位移排列顺序,逐个装入相应的位置上. $[K]$ 为对称、奇异、带状的稀疏阵.有了 $[K]$ 之后,即可得到全结构全部结点载荷列阵 $\{P\}$ 与全部结点位移列阵 $\{\delta\}$ 间的关系,即全结构的平衡方程

$$[K]\{\delta\} = \{P\} \quad (2-17)$$

应注意到,结点载荷与结点力是不相同的,前者是结构在结点处受到的外载荷,后者是单元结点处受到的内力.本书中用 $\{P_i\}$ 表示结点外载荷,用 $\{F_i\}$ 表示结点

内力。

2.1.7 边界条件的处理

集成后的结构总刚度矩阵是奇异的,因而它的逆不存在,所以从方程(2-17)不能解出结点位移 $[\delta]$ 。这种情况的物理意义是,除非提供某些支承约束来保持物体或结构在载荷作用下的平衡,否则承载物体或结构就会自由地做不受限制的刚体运动。因而在求解 $\{\delta\}$ 以前,必须把某些边界条件或支承条件引入方程(2-17)。如果结构平衡成立,对于平面结构,它必须满足 $\sum X=0, \sum Y=0, \sum M_z=0$;对于空间结构,它必须满足 $\sum X=0, \sum Y=0, \sum Z=0, \sum M_x=0, \sum M_y=0, \sum M_z=0$ 。由于结构满足上述三个或六个平衡条件,而结构刚度方程是按各结点力平衡方程列出,因而自由结构中按结点列出的平衡方程组必有三个或六个是线性相关的,致使自由结构刚度矩阵呈现奇异性,例如图 2-5 所示的桁架装配好之后的总刚度矩阵为

$$[K] = \frac{AE}{2l} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} & -1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

很显然一、三、五、七行是线性相关的,用三、五、七行元素乘 -1 叠加即得第一行中元素值。同理二、四、六、八行;一、四、八行也是线性相关的。如果线性相关行列不处理, $[K]$ 是奇异矩阵,不能求逆。在结构分析中,采用引入边界条件的办法删去相关的行(列)。本例中,结点 2,3,4 的 x, y 方向不能发生位移,所以位移边界条件是

$$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$$

用删行删列办法处理,将三至八行和三至八列删除,这样结构刚度方程简化为

$$[K] = \frac{AE}{2l} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix}$$

处理边界条件的具体办法通常有三种:删行删列法,“置大数法”,“置 1 法”。详细介绍见第三章。

2.1.8 算例

如图 2-5 所示三根杆子组成的简单桁架结构, 结点编号及单元的几何、物理参数见图 2-5, 求结点 1 的位移、各杆内力、支座反力。

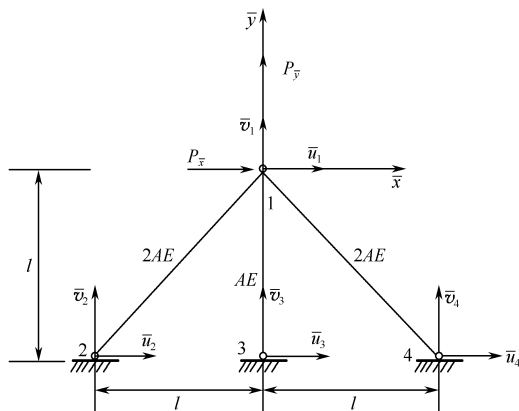


图 2-5 算例

解: 先计算各单元相对总体坐标系的刚度矩阵。

杆 1-2, 取 1 为局部坐标系原点, 由 1 指向 2 为 x 轴正向, 由 \bar{x} 轴到 x 轴按逆时针为正, 则 $\alpha = 225^\circ$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 按式 (2-10) 有局部坐标系下的单刚为

$$[K]_{1-2} = \frac{2AE}{\sqrt{2}l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[\lambda]_{1-2} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$[T]_{1-2} = \begin{vmatrix} [\lambda] \\ [\lambda] \end{vmatrix}$$

按式 (2-15) 有

$$[K]_{1-2} = [T]^T [K] [T] = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

杆 1-3, $\alpha=270^\circ$, $\cos \alpha=0$, $\sin \alpha=-1$, 故

$$[\mathcal{K}]_{1-3} = \frac{EA}{l} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

杆 1-4, $\alpha=315^\circ$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$[\mathcal{K}]_{1-4} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

组成全结构刚度矩阵,对三个杆单元单刚按对应行列组装叠加成结构总刚,总刚度矩阵见前.处理边界条件,用删行删列办法处理,缩聚之后的结构刚度方程为

$$\frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \end{vmatrix}$$

其中, P_x 和 P_y 为作用在结点 1 的 x 和 y 方向的载荷,求解上面方程得

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \end{vmatrix} = \frac{l}{EA} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{P_x l}{\sqrt{2} EA} \\ \frac{P_y l}{(1 + \sqrt{2}) EA} \end{vmatrix}$$

结构位移求得之后,可求单元结点力

$$\{F\}^e = [\mathcal{K}]^e \{\delta\}^e$$

例如对于杆 1-2 有

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{vmatrix} = \frac{EA}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{EA}{\sqrt{2}l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{P_x l}{\sqrt{2} EA} \\ \frac{P_y l}{(1 + \sqrt{2}) EA} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

因

$$\{F\}^e = [T]\{F\}^e$$

故

$$\{F\}_{1-2}^e = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \psi_1 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

同理可计算出杆 1-3, 杆 1-4 的结点力。

当然, 以上计算出的结点力, 如杆 1-2 必有 $V_1=0, V_2=0, U_1=U_2, U_1$ 或 U_2 为杆 1-2 的内力, 如果为正, 表示与局部坐标系 x 轴正向一致, 反之为负。根据已计算的单元结点力, 单元内力及支座反力不难求得。

由以上各节的分析可知, 不论对什么样的杆件结构, 其分析过程都是一样的, 一般分析步骤为:

- (1) 单元刚度矩阵分析, 必要时先在局部坐标系内建立单元刚度矩阵, 再变换到统一坐标系;
- (2) 叠加形成结构的整体刚度矩阵, 建立结构平衡方程 $[K]\{\delta\} = \{P\}$;
- (3) 加入位移约束条件, 求解全结构平衡方程;
- (4) 求解各单元的内力及应力。

§ 2.2 平面直梁单元

平面直梁是指变形前轴线为直线、载荷位于其主形心惯性平面内的能承受弯的杆件。现取一单元, 结点为 i, j 。坐标选取如图 2-6 所示, 结点力列阵为 $\{F\}^e$, 相应位移为 $\{\delta\}^e$ 。

$$\begin{aligned} \{F\}^e &= [N_i \quad Q_i \quad M_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j]^T \\ \{\delta\}^e &= [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \end{aligned}$$

2.2.1 位移函数

我们先将轴力与剪力、弯矩分开考虑。先回顾一下直梁弯曲时的变形情况, 根据平面假设, 原来垂直轴线的平面, 变形后仍垂直轴线。若梁中面挠度为 v , 则因弯曲而引起的轴向位移为

$$u(x, y) = -y \left| \frac{dv}{dx} \right|$$

其中 y 是所讨论点离中面的距离. 应变

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}$$

又根据平衡关系有

$$\sigma_x = \frac{yM}{I}$$

其中 I 是切面惯性矩, $I = \int_A y^2 dA$. 根据胡克定律, $\sigma_x = E\epsilon_x$, 有

$$\frac{yM}{I} = E \left| -y \frac{d^2v}{dx^2} \right|$$

因

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

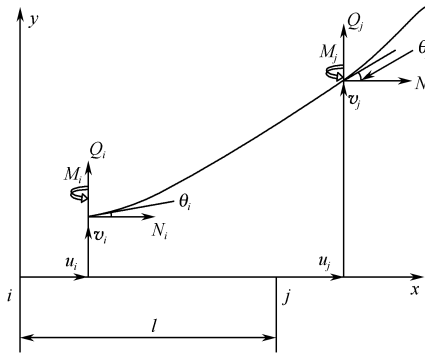


图 2-6 平面直梁单元

又根据剪力与弯矩的关系: $Q = \frac{dM}{dx}$, 有

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q = \frac{d^2}{dx^2} \left| -EI \frac{d^2v}{dx^2} \right|$$

现讨论的梁 E, I 为常数, 故

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = q$$

若梁上无分布剪力, 即 $q=0$, 则 $EI \frac{d^4v}{dx^4} = 0$, 由此可以判断 v 是 x 的三次函数. 设

$$v(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (2-18)$$

则梁的转角

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \quad (2-19)$$

将 i, j 结点位移代入式(2-18), (2-19)

$$\begin{aligned} v_i &= b_0, & \theta_i &= b_1 \\ v_j &= b_0 + b_1 l + b_2 l^2 + b_3 l^3, & \theta_j &= b_1 + 2b_2 l + 3b_3 l^2 \end{aligned}$$

用矩阵表示

$$\begin{vmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

从而得

$$\begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix}$$

$$v(x) = [1, x, x^2, x^3] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix} = [N_v] \begin{vmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix}$$

单元的形状函数矩阵 $[N_v]$ 为

$$\begin{aligned} [N_v] &= \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right] \\ &= [H_{0i} \quad H_{1i} \quad H_{0j} \quad H_{1j}] \end{aligned} \quad (2-20)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{0i} &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, & H_{1i} &= x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ H_{0j} &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, & H_{1j} &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \quad (2-21)$$

设 $\xi = \frac{x}{l}$, 则式(2-21)可写成

$$\begin{aligned} H_{0i} &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & H_{1i} &= l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ H_{0j} &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & H_{1j} &= l(\xi^3 - \xi^2) \end{aligned} \quad (2-22)$$

以上四个函数即是二结点梁单元的形状函数. 由于每结点有两个位移参数, 则每结点有两个形状函数. H_{0i} 是指 i 结点零阶导数(即 i 点位移)对应的形函数, H_{1i} 指 i 结点一阶导数(即 i 结点转角)对应的形函数, 位移函数用内插多项式表示为

$$v(x) = H_{0i}v_i + H_{1i}\theta_i + H_{0j}v_j + H_{1j}\theta_j = [N_v] \begin{vmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix}$$

现在分析形状函数的性质, 当 $x=0$, 即 $\xi=0$, $H_{0i}(0)=1-3\xi^2+2\xi^3=1$; 当 $x=l$, 即 $\xi=1$, $H_{0i}(1)=0$, 其图像如图 2-7(a)所示. 它表示当 i 点垂直位移 $v_i=1$, 单元其他位移等于零时梁元的挠曲形状. 又有: $\frac{dH_{0i}}{dx} = -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}$, 当 $x=0$, $\frac{dH_{0i}}{dx}|_{x=0}=0$; $x=l$ 时 $\frac{dH_{0i}}{dx}|_{x=l}=0$, 这说明 H_{0i} 曲线在 i, j 点切线平行 x 轴, 即 H_{0i} 不引起结点转角值的改变.

$H_{1i}(\xi)=l(\xi-2\xi^2+\xi^3)$, 当 $x=0$, 即 $\xi=0$, $H_{1i}(0)=0$; $x=l$, 即 $\xi=1$, $H_{1i}(1)=0$, 这表示当 i 点产生单位转角 $\theta_i=1$, 其他位移是零值时的挠曲线. 又 $\frac{dH_{1i}}{dx} = 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2}$, 当 $x=0$, $\frac{dH_{1i}}{dx}|_{x=0}=1$; $x=l$ 时 $\frac{dH_{1i}}{dx}|_{x=l}=0$, 这说明 H_{1i} 它不引起 i, j 结点位移值的改变, 其图像如图 2-7(b)所示. 同样对于 H_{0j}, H_{1j} 也可作类似分析, 其变化如图 2-7(c)、(d)所示. 上述形函数的性质列表如下:

	H_{0i}	$\frac{dH_{0i}}{dx}$	H_{1i}	$\frac{dH_{1i}}{dx}$
i	1	0	0	0
j	0	0	0	1

这样保证了在 i 点 $v = v_i, \frac{dv}{dx} = \theta = \theta_i$.

轴力 N 引起的位移 $u(x)$ 仍设为线性, $u(x) = a_0 + a_1x$, 将结点位移代入可得

$$\begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ u_j \end{vmatrix}$$

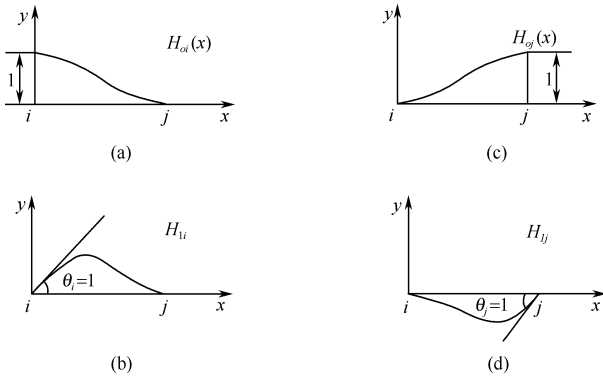


图 2-7 梁单元形状函数

由此得

$$u(x) = [1, x] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = [1, x] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = [N_u] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$

其中, $[N_u] = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l} \right] = [1 - \xi \quad \xi]$.

现将结点位移列阵合并为

$$\{\delta\}^e = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T$$

位移函数改写为

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = [N] \{\delta\}^e$$

则形状函数 $[N]$ 为

$$[N] = \begin{bmatrix} N_u \\ N_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & H_{0i} & H_{1i} & 0 & H_{0j} & H_{1j} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

位移函数求得后,可得到应变和应力的表达式:若忽略剪切影响, ϵ_N 是拉力引起的应变, ϵ_b 是弯曲引起的应变

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_N \\ \epsilon_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -y \frac{d^2v}{dx^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d[N_u]}{dx} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \\ -y \frac{d^2}{dx^2} [N_v] \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & y \left| \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right| & -y \left| \frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right| & 0 & -y \left| \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right| & y \left| \frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{vmatrix} \quad (2-24)$$

应力为

$$\{\sigma\} = \begin{vmatrix} \sigma_N \\ \sigma_b \end{vmatrix} = E\{\epsilon\} = E[B]\{\delta\}^e \quad (2-25)$$

最后,梁的应力应是 σ_N 和 σ_b 的代数和.

2.2.2 梁元的刚度矩阵

现根据最小势能原理求梁元的刚度矩阵.梁的应变能 U_0

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^{eT} [B]^T E [B] \{\delta\}^e dV \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} \int_V [B]^T E [B] dV \{\delta\}^e = \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K]^e \{\delta\}^e \end{aligned}$$

梁上的结点力 $\{F\}^e = [N_i, Q_i, M_i, N_j, Q_j, M_j]^T$, 并有分布力 $q(x)$ 作用. 在选位移函数时虽然假设了 $q=0$, 若作用有分布载荷 $q(x)$, 位移函数仍可用三次幂函数近似, 分析过程完全同前. 只是外力势中增加 $-\int_0^l \{v\}^T \{q(x)\} dx$ 项, 这时外力势 V 为

$$V = -\{\delta\}^{eT} \{F\}^e - \int_0^l \{v\}^T \{q(x)\} dx$$

总势能

$$\begin{aligned} \Pi^e &= U_0 + V \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K]^e \{\delta\}^e - \{\delta\}^{eT} \{F\}^e - \{\delta\}^{eT} \int_0^l [N]^T \cdot \{q(x)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K]^e \{\delta\}^e - \{\delta\}^{eT} \{F\}^e - \{\delta\}^{eT} [Q]^e \end{aligned}$$

式中, $\{Q\}^e = \int_0^l [N]^T \cdot \{q(x)\} dx$ 是分布载荷的等效结点力.

Π^e 取驻值时有: $\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{\delta\}^e} = 0$, 得

$$[K]^e \{\delta\}^e = \{F\}^e + \{Q\}^e$$

上式就是刚度方程. 现分别计算其中各项:

刚度矩阵

$$[K]^e = E \int_V [B]^T [B] dV \quad (2-26)$$

将式(2-24)中 $[B]$ 代入, 并进行积分, 得

$$[K]^e = \begin{vmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ & & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{4EI_z}{l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI_z}{l} \end{vmatrix} \quad (2-27)$$

式中, A 为梁截面积, $I_z = \iint y^2 dA$ 是截面对主轴的惯矩.

对薄壁短梁, 高度 $H > \frac{l}{5}$ (l 是跨度) 时, 应计及剪切影响. 这时可对刚度矩阵做如下修正:

$$[K]^e = \begin{vmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{(1+\varphi)l^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi)l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\varphi)l^3} & \frac{6EI_z}{(1+\varphi)l^2} \\ & & \frac{(4+\varphi)EI_z}{(1+\varphi)l} & 0 & \frac{6EI_z}{(1+\varphi)l^2} & -\frac{(4+\varphi)EI_z}{(1+\varphi)l} \\ & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI_z}{(1+\varphi)l^3} & -\frac{6EI_z}{(1+\varphi)l^2} \\ & & & & & \frac{(4+\varphi)EI_z}{(1+\varphi)l} \end{vmatrix}$$

式中, $\varphi = 12EI_z / GA_s l^2$ 是剪切影响系数, A_s 是有效抗剪面积.

2.2.3 等效结点力

等效结点力是根据功互等原理, 将分布载荷转移到结点上所得到的载荷, 这样