应用模糊数学与系统

曹炳元　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

模糊数学是近三十年发展起来的一门崭新的边缘学科，它不仅扩充了经典数学的内容，而且在人工智能、信息处理、自动控制、系统分析、预测预报和经济管理等科技领域中有广泛的应用. 本书包括模糊集合，模糊代数，模糊微积分，模糊规划与模糊图论，模糊概率，模糊多元分析,模糊逻辑与模糊推理，模糊系统与模糊控制，模糊数学与系统的应用实例. 全书贯彻"少而精"和"循序渐进"的原则，力求内容新颖，论述深入浅出，系统性和适应性强.

本书可作为高等院校数学系研究生及高年级本科生的选修课教材或参考书，亦可作为具有大专文化程度的工程技术人员的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用模糊数学与系统/曹炳元著. —北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-015258-1

Ⅰ.应… Ⅱ.曹… Ⅲ.①模糊数学②模糊系统 Ⅳ.①O159 ②N94

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 039230 号

责任编辑：林 鹏 范庆奎／责任校对：朱光光
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 10 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005 年 10 月第一次印刷 印张：17 1/4
印数：1—3 000 字数：327 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

从 1965 年起, 模糊数学经历了 40 年的风风雨雨, 渡过了襁褓期.

一门学科是真科学而不是伪科学, 能自立于世界各学科之林, 首先要有其科学思想的丰富与科学方法的革新. 众所周知, 概率论由于它早期与赌博等活动关系过于密切, 因而曾受到某些不应有的责难, 被斥之为“来路不正”. 只有在 A. H. Koomopob(1903)的工作之后, 数学大家庭才最后接受了这个历史比其他成员悠久得多的分支. 微积分理论在整个 18 世纪对于运算的研究具有一种特殊的痛苦, 由其基础的含糊性导致的矛盾异常尖锐. 然而纯粹分析领域及其应用领域的一个接一个的光辉发现, 即使一时还没有牢固的理论基础的微积分, 它的强大的生命力却在其应用的成就中体现出来, 为世人所公认. 模糊数学虽然发展还很不成熟, 但它是一项开创性的工作, 其意义首先在于它的科学方法论的意义. 马克思认为: 一种科学只有当它成功地利用了数学的时候, 才能达到完善的地步. 然而, 有许多的领域被视为数学的禁区. 例如, 没有哪一把尺子或哪一架天秤能测量出顾客对某种商品的满意程度. 人脑具有一种模糊测量的天赋本领, 即使像“身高”这样可精确测量的物理量, 人脑也往往使用诸如“高个子”、“中等个儿”等测量词语. 因为侦探凭着罪犯是“高个子, 大胡子, 穿着一条黄色的裤子”这些模糊信息, 比告诉他精确的高度、胡子的根数以及裤子的色度更容易在人群中抓到要抓的罪犯. 近代科学的发展, 愈来愈多地要求向那些模糊的、传统数学很少问津的领域进军. L. A. Zadeh (1921~, 美国数学家, 控制论专家)充分领悟到了精确与模糊这一对立统一规律, 提出了模糊数学的核心思想, 就是用数学手段来仿效人脑的思维, 建立对复杂事物进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制和模糊决策的本领. 模糊数学这种崭新的思想, 固然代表了与传统数学不同的另一种倾向, 但绝不意味着是对精确化努力的一种否定. 从某种意义上说, 它使精确化能在更一般的框架下得以展现, 即从模糊性中寻找确定性的信息.

目前, 模糊数学研究方兴未艾. 模糊集理论进一步丰富了经典数学的理论宝库, 为人们处理模糊信息提供了众多巧妙的方法. 现在, 一种中介数学——模糊数学的公理化基础已在建立, 正接受实践的检验并进一步得到完善. 模糊数学的应用极其广泛, 已在各个学科领域取得了一个又一个新的成果.

模糊数学在工程与信息系统中的应用，将具有广阔的前景. 自“中美双边模糊方法和现代决策在电力系统中的应用学术讨论会”于 1984 年 7 月在北京召开以来，模糊数学在电力系统中的应用已有了一些可喜的进展. 然而，在我国仍然有许多“处女地”亟待用模糊数学去开拓. 2005 年，国际模糊系统协会(IFSA)将在北京召开第 11 届大会，这是我国模糊界乃至科学界的一件大事. 为了适应科学技术发展的需要，使模糊集理论在我国生根、开花、结果，在研究生、本专科生中开设模糊数学选修课是非常必要的. 针对当前我国各高校减学时、厚基础、宽口径的特点，为高校理工科与管理类研究生及应用数学系的大学本科生编写了这本教材. 若去掉部分章节及定理证明部分，本书亦可作为理工科与管理类大学生的选修课教材，同时，也可供工程技术人员及高等院校教师参考.

本书的应用实例均具特色，它们一部分是作者本人的科研成果，一部分取自国内外其他著作. 世界著名模糊控制论专家、日本大阪电气通信大学水本雅晴教授来华讲学的手稿使本书的编写受益匪浅.

最后诚挚的感谢国家自然科学基金委对作者研究工作的两次资助(1997.1~1999.12, No. 79670012 和 2003.1~2005.12, No. 70271047)，感谢广州大学出版项目基金的全力资助. 同时，特别感谢广州大学科研处、数学和信息科学学院对本书出版的鼎力相助. 作者的硕士生周雪刚打印了全书书稿，硕士生周雪刚、朱章遐、谷秋鹏和谭云峰做完了书中全部习题并给出了答案，博士生杨吉会协助作者查找了很多史料. 他们与硕士生仇海全、侯勇超一起，校对了全书书稿. 汕头大学数学系 2000 级学生提出了很多有益的建议. 在此对他们为本书所做的大量工作一并加以谢忱.

值得指出的是：1994 年，我的良师益友，著名的模糊系统与数学专家，国防科技大学原政委汪浩少将在他六十大寿时，欣然为本书的前身《经济数学教程》写下了热情洋溢的评语，并担任该册书的顾问. 该书第二篇——线性规划与模糊数学，经使用后修订，将模糊数学部分单独作为本册《应用模糊数学与系统》再版. 值此再版之际，作者再次向汪浩教授致谢.

由于作者才疏学浅，书中一定存在许多缺点与错误，恳请读者批评指正.

作　者

2004 年 5 月

目　　录

第 1 章　模 糊 集 合

本章提出了模糊 (fuzzy) 集合的定义与性质，介绍了模糊数学的三大支柱中的两个：分解定理和表现定理. 介绍了模糊优化的基础 —— 凸模糊集的概念以及应用广泛的两种识别方法，探讨了非常棘手的隶属函数的确定问题. 最后考虑了高型模糊集 (曹炳元 2002).

1.1　模 糊 子 集

为了给出模糊集合的概念，首先给出模糊集论的一个基础概念 —— 论域. 所谓论域是指我们所涉及到的对象的全体，是一个普通的集合，通常用大写英文字母 X、Y、Z 等表示. 以下我们给出模糊子集的数学描述.

定义 1.1.1　所谓集合 X 的一个模糊子集 $\tilde{A}$, 它是集合

$$\tilde{A}=\{(\mu_{\tilde{A}}(x),x)|x\in X\},$$

其中 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 是区间 [0, 1] 中的一个确定的数，称为点 x 对 $\tilde{A}$ 的隶属度. 在区间 [0, 1] 上定义的这个函数

$$\tilde{A}(\cdot)\text{ 或 }\mu_{\tilde{A}}(\cdot):X\longrightarrow[0,1],$$
$$x\mapsto\mu_{\tilde{A}}(x)$$

称为模糊子集 $\tilde{A}$ 的隶属函数.

在不致误解的情况下，模糊子集 $\tilde{A}$ 和它的隶属函数 $\tilde{A}(x)$ 将不加区分. 同时，模糊子集也常简称为模糊集.

由模糊集的定义 1.1.1, 显然有以下几个结论：

(1) 模糊集的概念是经典集合概念的推广.

若以 $\mathcal{F}(X)$ 表示 X 上模糊集的全体，即

$$\mathcal{F}(X)=\{\tilde{A}|\tilde{A}\text{是}X\text{上的模糊集}\},$$

则 $P(X)\subset\mathcal{F}(X)$, 其中 $P(X)$ 是 X 上的幂集合，即

$$P(X)=\{A|A\text{是}X\text{的普通子集}\}.$$

这就是说，若模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属函数只取 0 与 1 两个值时， $\tilde{A}$ 便蜕化为一个 X 的普通子集.

(2) 隶属函数的概念是特征函数概念的推广.

当 $A \in P(X)$ 是 X 的普通子集时，那么 A 的特征函数是

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \quad (x \text{ 对 } A \text{ 的隶属度为 } 1), \\ 0, & x \notin A \quad (x \text{ 对 } A \text{ 的隶属度为 } 0). \end{cases}$$

这就意味着在模糊集合论中，模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度 $\tilde{A}(x)$ 越是接近 1, 那么 x 属于 $\tilde{A}$ 的程度就越大；反之，$\tilde{A}(x)$ 越是接近 0, 那么 x 属于 $\tilde{A}$ 的程度也就越小. 如果 $\tilde{A}(x)$ 的值域是 $\{0, 1\}$ 时，则模糊集 $\tilde{A}$ 就是普通集合 A, 而隶属函数 $\tilde{A}(x)$ 就是特征函数 $\chi_A(x)$.

(3) 我们称 $\mathcal{F}(X) \diagdown P(X)$ 中的模糊集为真模糊集.

以下列出模糊集的几种表示法：

1° Zadeh(模糊集合的创始人) 的表示法 (Zadeh 1965).

若集合 X 为有限集，设论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则模糊集为

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}(x_1)}{x_1} + \frac{\tilde{A}(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\tilde{A}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{A}(x_i)}{x_i},$$

这里符号“ Σ” 不再是数字的和， $\tilde{A}(x_i)/x_i$ 也不是分数，它只有符号意义，只表示点 x_i 对模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属度是 $\tilde{A}(x_i)$.

若集合 X 为无限集，此时 X 上的一个模糊集为

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\tilde{A}(x)}{x}.$$

同样，符号“ $\int$” 不再是积分，只有无穷逻辑和的意义. 而 $\tilde{A}(x)/x$ 的意义和有限情况是一致的.

2° 论域 X 为有限集时，按定义 1.1.1 的表示法为

$$\tilde{A} = \{(\tilde{A}(x_1), x_1), (\tilde{A}(x_2), x_2), \cdots, (\tilde{A}(x_n), x_n)\}.$$

3° 论域 X 为有限集时，按向量形式的表示法为

$$\tilde{A} = (\tilde{A}(x_1), \tilde{A}(x_2), \cdots, \tilde{A}(x_n)).$$

值得注意的是： X 和 $\varnothing$ 也可看作 X 的模糊集，若隶属函数 $\tilde{A}(x) \equiv 1$ 和 $\tilde{A}(x) \equiv 0$ 时，则 $\tilde{A}$ 分别为全集 X 和空集 $\varnothing$.

隶属度为 1 的元素肯定属于这个模糊集，隶属度为 0 的元素肯定不属于这个模糊集. 而在 (0,1) 内的隶属函数值，形成了不分明边界，所以也把模糊集称为不分明子集 (fuzzy subset).

对一个模糊事物用模糊集去描述时，它的隶属函数的取法是关键. 现在我们给出三类基本的隶属函数：

(1) 偏小型 (戒上型，如图 1.1.1)

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} [1+(a(x-c))^{b}]^{-1}, & \text{当 } x \geqslant c \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } x<c \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $c\in X$ 是任一点， $a>0, b>0$ 是两个参数.

(2) 偏大型 (戒下型，如图 1.1.2)

$$\tilde{A}(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x \leqslant c \text{ 时}, \\ [1+(a(x-c))^{-b}]^{-1}, & \text{当 } x>c \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $c\in X$ 是任一点， $a>0, b>0$ 是两个参数.

(3) 正态型 (中间型，如图 1.1.3)

$$\tilde{A}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{2}\right],$$

$a\in X$ 为任一值， $b>0$ 是参数.

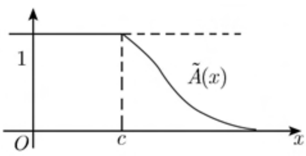

图 1.1.1

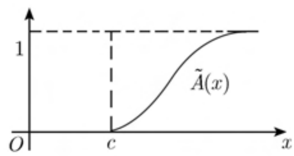

图 1.1.2

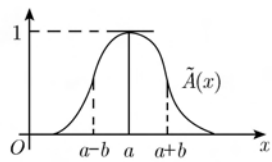

图 1.1.3

显然，型 1, 2 是对偶的，其意义一目了然；型 3 是模糊集 $\tilde{A}$ “充分接近 a 的数集”，那么这个 $\tilde{A}$ 的隶属函数据此定义为中间型.

例 1.1.1 设 $X\subseteq R^{+}$(非负实数集). 以年龄为论域，取 X=[0, 120], Zadeh 给出的“年老” $\tilde{O}$ 和“年轻” $\tilde{Y}$ 这两个模糊集的隶属函数分别为

$$\tilde{O}(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 50, \\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\leqslant 100, \\ 1, & x>100. \end{cases}$$

$$\tilde{Y}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<x\leqslant 100,\\ 0, & x>100.\end{cases}$$

如果某人的年龄是 28 岁，则他属于“年轻人”和“老年人”的隶属度分别为

$$\left[1+\left(\frac{28-25}{5}\right)^2\right]^{-1}=0.735 \quad \text{和} \quad 0\ .$$

如果某人的年龄是 55 岁，则他属于“年轻人”和“老年人”的隶属度分别为

$$\left[1+\left(\frac{55-25}{5}\right)^2\right]^{-1}=0.027 \quad \text{和} \quad \left[1+\left(\frac{55-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}=0.5.$$

例 1.1.2　考察某商店商品销售利润的经济效益. 以论域 $X=[0,k]$ 表示该商品销售利润额的范围：最小利润额为 0, 最大利润额为 k, 其隶属函数

$$\tilde{A}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x}{n}-m\right)^2\right],\quad x\in[0,k],$$

表示利润额为 x 时经济效益好的程度. 其中常数 n 表示同期商品销售额，常数 m 表示销售利润效益最好时刻的利润率. 例如取 $m=0.2$, $n=100$, 则当 $x=30$ 时，可算得 $\tilde{A}(30)=e^{-0.01}\approx 0.549$, 即说该商店此时商品销售利润的经济效益好的程度是 0.549.

根据上述三种类型的隶属函数，就可以对某个具体的对象 x 算出其隶属度. 在精度要求不高时，为简便计，可采取评判法确定隶属度.

例 1.1.3　设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, 这四个元素要组成一个小数的集合. 显然，元素 1 是标准的小数，应属于这个集合，隶属度为 1；元素 4 不是小数，应不属于这个集合，隶属度为 0. 元素 2“也还小”或算作“八成小”，隶属度为 0.8；元素 3 只能是“勉强小”，或者算作“二成小”，隶属度为 0.2. 把小数这个模糊集写成 $\tilde{A}$, 其元素仍为 1, 2, 3, 4, 同时给出元素在 $\tilde{A}$ 中的隶属度，用 Zadeh 的表示法为

$$\tilde{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0}{4}.$$

用序偶表示法为

$$\tilde{A}=\{(1,1),(0.8,2),(0.2,3),(0,4)\}.$$

用向量表示法简捷地表示为

$$\tilde{A}=(1,0.8,0.2,0).$$

1.2　模糊集的运算

由于模糊集的隶属函数相当于分明子集特征函数的值域从 $\{0, 1\}$ 扩张到 $[0, 1]$, 因此，类似于用特征函数来表达分明子集之间的关系，有

定义 1.2.1　设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 若对任何 $x \in X$, 有

包含：　$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Longleftrightarrow \tilde{A}(x) \leqslant \tilde{B}(x)$;

相等：　$\tilde{A} = \tilde{B} \Longleftrightarrow \tilde{A}(x) = \tilde{B}(x)$.

由定义 1.2.1, $\tilde{A} = \tilde{B} \Longleftrightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ 且 $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$. 这就是说，包含关系是模糊幂集 $\mathcal{F}(X)$ 上具有下述性质的二元关系，即

(1) $\tilde{A} \subseteq \tilde{A}$　(自反性);

(2) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ 且 $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \Longrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$　(对称性);

(3) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ 且 $\tilde{B} \subseteq \tilde{C} \Longrightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{C}$　(传递性).

因此，$(\mathcal{F}(X), \subseteq)$ 是一个偏序集，因为关系“ $\subseteq$ ”构成 $\mathcal{F}(X)$ 上的一个序关系．由于 $\phi, X \in \mathcal{F}(X)$, 故 $\mathcal{F}(X)$ 具有最大元 X 及最小元 ϕ.

定义 1.2.2　设 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 则我们定义

并：　$\tilde{A} \cup \tilde{B}$, 其隶属函数为 $(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) \bigvee \tilde{B}(x) = \max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$;

交：　$\tilde{A} \cap \tilde{B}$, 其隶属函数为 $(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) \bigwedge \tilde{B}(x) = \min\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$;

余 (补): $\tilde{A}^c$, 其隶属函数为 $\tilde{A}^c(x) = 1 - \tilde{A}(x)$.

他们的图像分别如图 1.2.1～ 图 1.2.3 所示：

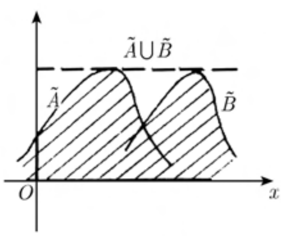

图 1.2.1

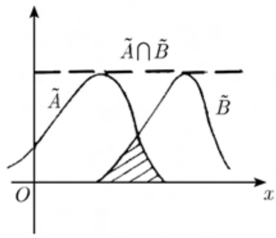

图 1.2.2

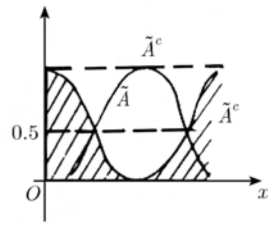

图 1.2.3

与分明集的并、交和余运算相比较，我们立即发现，模糊集运算正是分明集运算的平行定义，$\tilde{A} \cup \tilde{B}$ 是既包含 $\tilde{A}$ 又包含 $\tilde{B}$ 的最小模糊集．$\tilde{A} \cap \tilde{B}$ 是既包含于 $\tilde{A}$ 又包含于 $\tilde{B}$ 的最大模糊集.

按论域 X 为有限或无限的两种情况，模糊集 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的并、交和余的计算公式可分别为

(1) 论域为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 且 $\tilde{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\tilde{A}(x_i)}{x_i}$, $\tilde{B}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\tilde{B}(x_i)}{x_i}$, 则

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{A}(x_i)\bigvee\tilde{B}(x_i)}{x_i},\quad \tilde{A}\cap\tilde{B}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{A}(x_i)\bigwedge\tilde{B}(x_i)}{x_i},\quad \tilde{A}^c=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\tilde{A}(x_i)}{x_i}.$$

(2) X 为无限集，且 $\tilde{A}=\int_{x\in X}\tilde{A}(x)/x$, $\tilde{B}=\int_{x\in X}\tilde{B}(x)/x$, 则

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\int_{x\in X}\tilde{A}(x)\bigvee\tilde{B}(x)/x,\quad \tilde{A}\cap\tilde{B}=\int_{x\in X}\tilde{A}(x)\bigwedge\tilde{B}(x)/x,$$

$$\tilde{A}^c=\int_{x\in X}(1-\tilde{A}(x))/x\ .$$

例 1.2.1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\tilde{A}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{0.8}{x_2}+\dfrac{0.2}{x_3}+\dfrac{0}{x_4}$, $\tilde{B}=\dfrac{0}{x_1}+\dfrac{0.2}{x_2}+\dfrac{0.8}{x_3}+\dfrac{0}{x_4}$, 则

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\frac{1\bigvee 0}{x_1}+\frac{0.8\bigvee 0.2}{x_2}+\frac{0.2\bigvee 0.8}{x_3}+\frac{0\bigvee 0}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0}{x_4},$$

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\frac{1\bigwedge 0}{x_1}+\frac{0.8\bigwedge 0.2}{x_2}+\frac{0.2\bigwedge 0.8}{x_3}+\frac{0\bigwedge 0}{x_4}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.2}{x_3}+\frac{0}{x_4},$$

$$\tilde{A}^c=\frac{1-1}{x_1}+\frac{1-0.8}{x_2}+\frac{1-0.2}{x_3}+\frac{1-0}{x_4}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{1}{x_4}.$$

例 1.2.2 计算 1.1 节中例 1.1.1 的模糊集 $\tilde{Y}$ 与 $\tilde{O}$ 的并、交和余．由定义

$$\tilde{Y}\cup\tilde{O}=\int_{x\in X}\tilde{Y}(x)\bigvee\tilde{O}(x)/x=\int_{0\leqslant x\leqslant 25}\frac{1}{x}+\int_{25<x\leqslant x^*}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/x$$
$$+\int_{x^*<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/x+\int_{x>100}\frac{1}{x},\ \text{其中}\ x^*\approx 51,$$

$$\tilde{Y}\cap\tilde{O}=\int_{50<x\leqslant x^*}\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}/x+\int_{x^*<x\leqslant 100}\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}/x,$$

$$\tilde{O}^c=\int_{0\leqslant x\leqslant 50}\frac{1}{x}+\int_{50<x\leqslant 100}1-\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}/x,$$

$$\tilde{Y}^c=\int_{25\leqslant x\leqslant 100}1-\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}/x+\int_{x>100}\frac{1}{x}.$$

模糊集的并、交运算，可以推广到任意多个模糊集合上去.

定义 1.2.3 设 T 为指标集，$\tilde{A}_t \in \mathcal{F}(X)$ $(t \in T)$, 则

$$\left(\bigcup_{t\in T}\tilde{A}_t\right)(x)=\bigvee_{t\in T}\tilde{A}_t(x)=\sup_{t\in T}\tilde{A}_t(x),\quad x\in X,$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}\tilde{A}_t\right)(x)=\bigwedge_{t\in T}\tilde{A}_t(x)=\inf_{t\in T}\tilde{A}_t(x),\quad x\in X.$$

显然有 $\bigcup\limits_{t\in T}\tilde{A}_t, \bigcap\limits_{t\in T}\tilde{A}_t \in \mathcal{F}(X)$. 特别地，当 T 为有限集时，

$$\left(\bigcup_{t\in T}\tilde{A}_t\right)(x)=\max_{t\in T}\tilde{A}_t(x),\quad x\in X,$$

$$\left(\bigcap_{t\in T}\tilde{A}_t\right)(x)=\min_{t\in T}\tilde{A}_t(x),\quad x\in X.$$

定理 1.2.1 $(\mathcal{F}(X), \bigcup, \bigcap, c)$ 满足以下性质：

(1) 幂等律：$\tilde{A}\bigcup\tilde{A}=\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcap\tilde{A}=\tilde{A}$;

(2) 交换律：$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\tilde{B}\bigcup\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\tilde{B}\bigcap\tilde{A}$;

(3) 结合律：$(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})\bigcup\tilde{C}=\tilde{A}\bigcup(\tilde{B}\bigcup\tilde{C})$, $(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})\bigcap\tilde{C}=\tilde{A}\bigcap(\tilde{B}\bigcap\tilde{C})$;

(4) 吸收律：$(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})\bigcap\tilde{A}=\tilde{A}$, $(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})\bigcup\tilde{A}=\tilde{A}$;

(5) 分配律：$(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})\bigcap\tilde{C}=(\tilde{A}\bigcap\tilde{C})\bigcup(\tilde{B}\bigcap\tilde{C})$,
$(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})\bigcup\tilde{C}=(\tilde{A}\bigcup\tilde{C})\bigcap(\tilde{B}\bigcup\tilde{C})$;

(6) 0-1 律：$\tilde{A}\bigcap X=\tilde{A}$, $\tilde{A}\bigcap\phi=\phi$; $\tilde{A}\bigcup X=X$, $\tilde{A}\bigcup\phi=\tilde{A}$;

(7) 复原律：$(\tilde{A}^c)^c=\tilde{A}$;

(8) 对偶律：$(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\bigcap\tilde{B}^c$, $(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\bigcup\tilde{B}^c$.

证明 以性质 (8) 为例证明，其余可直接验证得到.

由 $\forall x\in X$, 有

$$\begin{aligned}(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})^c(x) &= 1-(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})(x)=1-\max\{\tilde{A}(x),\tilde{B}(x)\}\\ &= \min\{1-\tilde{A}(x),1-\tilde{B}(x)\}\\ &= \min\{\tilde{A}^c(x),\tilde{B}^c(x)\}=(\tilde{A}^c\bigcap\tilde{B}^c)(x).\end{aligned}$$

所以

$$(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\bigcap\tilde{B}^c.$$

同理可证

$$(\tilde{A}\bigcap\tilde{B})^c=\tilde{A}^c\bigcup\tilde{B}^c.$$

我们指出，模糊集合不再满足互余律. 即一般情况下，有

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{A}^c \neq X,\ \tilde{A}\bigcap\tilde{A}^c \neq \phi.\quad \text{但有}\tilde{A}\bigcup\tilde{A}^c \geqslant \frac{1}{2},\ \tilde{A}\bigcap\tilde{A}^c \leqslant \frac{1}{2}.$$

例 1.2.3　若 $\tilde{A}(x) \equiv 0.5,\ \tilde{A}^c(x) \equiv 0.5$, 则

$$(\tilde{A}\bigcup\tilde{A}^c)(x) = \max\{0.5,\ 0.5\} = 0.5 \neq 1,$$

$$(\tilde{A}\bigcap\tilde{A}^c)(x) = \min\{0.5,\ 0.5\} = 0.5 \neq 0.$$

此外，我们还考虑模糊集运算的其他定义.

定义 1.2.4　对 $\tilde{A},\ \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 定义其并、交运算的一般形式为

$$(\tilde{A}\bigcup\tilde{B})(x) \triangleq \tilde{A}(x)\bigvee{}^*\tilde{B}(x),\ (\tilde{A}\bigcap\tilde{B})(x) \triangleq \tilde{A}(x)\bigwedge{}^*\tilde{B}(x).$$

这里 $\bigvee^*$ ，$\bigwedge^*$ 是 $[0, 1]$ 的二元运算，简称为模糊算子，取为

I. 最大乘积算子 $(\bigvee, \cdot)$

$$\tilde{A}(x)\bigvee\tilde{B}(x) = \max\{\tilde{A}(x),\ \tilde{B}(x)\},\ \tilde{A}(x)\text{、}\tilde{B}(x)\text{表示普通实数乘法}.$$

II. 有界和与积算子 $(\oplus, \odot)$

$$\tilde{A}(x) \oplus \tilde{B}(x) \triangleq \min\{\tilde{A}(x) + \tilde{B}(x),\ 1\},\ \tilde{A} \odot \tilde{B} \triangleq \max\{0,\ \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - 1\}.$$

III. 概率和与积算子 $(\widehat{+}, \cdot)$

$$\tilde{A}(x)\widehat{+}\tilde{B}(x) \triangleq \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x),\ \tilde{A}(x) \cdot \tilde{B}(x)\text{表示普通实数乘法}.$$

用初等计算方法可以验证：算子 I 满足算子 $(\bigvee, \bigwedge)$ 所满足的算律，而算子 II, III 则不满足幂等律，吸收律和分配律.

1.3　模糊集的分解定理和表现定理

模糊集合的分解定理给出了模糊集合与经典集合之间的关系，它是联系普通集和模糊集的桥梁. 本节先引进 λ- 截集的概念，再讨论模糊集的分解定理，最后略述表现定理.

1.3.1　λ-截集

定义 1.3.1　设 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$, 对任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 记

$$(\tilde{A})_\lambda = A_\lambda = \{x|\tilde{A}(x) \geqslant \lambda\},$$

称 A_λ 为 $\tilde{A}$ 的 λ- 截集， λ 称为置信水平. 又记

$$(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x|\tilde{A}(x) > \lambda\},$$

称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 $\tilde{A}$ 的 λ- 强截集. 称

$$(\tilde{A})_{\underset{\cdot}{0}} = \{x|\tilde{A}(x) > 0\} = \text{supp } \tilde{A}$$

为 $\tilde{A}$ 的支集. 若该支集 supp $\tilde{A} = \{x\}$ 为单点集, 则称 $\tilde{A}$ 为 X 上的一个模糊点.

A_λ 的直观意义是, 若 x 对 $\tilde{A}$ 的隶属度达到或超过水平 λ 者就算作合格成员, 而这些合格成员的全体便构成 A_λ, 它是 X 的一个经典子集.

例 1.3.1 设 $\tilde{A} = \dfrac{0.5}{x_1} + \dfrac{0.7}{x_2} + \dfrac{0}{x_3} + \dfrac{0.9}{x_4} + \dfrac{1}{x_5}$, 则

$$\begin{array}{lll}
\lambda = 1 \text{ 时}, & A_1 = \{x_5\}, & A_{\underset{\cdot}{1}} = \phi, \\
\lambda = 0.9\text{时}, & A_{0.9} = \{x_4,\ x_5\}, & A_{\underset{\cdot}{0.9}} = \{x_5\}, \\
\lambda = 0.7\text{时}, & A_{0.7} = \{x_2,\ x_4,\ x_5\}, & A_{\underset{\cdot}{0.7}} = \{x_4,\ x_5\}, \\
\lambda = 0.5\text{时}, & A_{0.5} = \{x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5\}, & A_{\underset{\cdot}{0.5}} = \{x_2,\ x_4,\ x_5\}, \\
\lambda = 0 \text{ 时}, & A_0 = X, & A_{\underset{\cdot}{0}} = \{x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5\},
\end{array}$$

截集具有下列性质:

性质 1.3.1 (1)$(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \bigcup B_\lambda$, $(\tilde{A} \bigcap \tilde{B})_\lambda = A_\lambda \bigcap B_\lambda$;

(2) $(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \bigcup B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $(\tilde{A} \bigcap \tilde{B})_{\underset{\cdot}{\lambda}} = A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \bigcap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

证明 仅证 (1), (2) 可类似地证明.

$$\begin{aligned}
(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})_\lambda &= \{x|(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})(x) \geqslant \lambda\} = \{x|\tilde{A}(x) \bigvee \tilde{B}(x) \geqslant \lambda\} \\
&= \{x|\tilde{A}(x) \geqslant \lambda\} \bigcup \{x|\tilde{B}(x) \geqslant \lambda\} = A_\lambda \bigcup B_\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{A} \bigcap \tilde{B})_\lambda &= \{x|(\tilde{A} \bigcap \tilde{B})(x) \geqslant \lambda\} = \{x|\tilde{A}(x) \bigwedge \tilde{B}(x) \geqslant \lambda\} \\
&= \{x|\tilde{A}(x) \geqslant \lambda\} \bigcap \{x|\tilde{B}(x) \geqslant \lambda\} = A_\lambda \bigcap B_\lambda.
\end{aligned}$$

性质 1.3.2 (1) $\left(\bigcup\limits_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_\lambda \supseteq \bigcup\limits_{t \in T} (\tilde{A}_t)_\lambda$, $\left(\bigcap\limits_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_\lambda = \bigcap\limits_{t \in T} (\tilde{A}_t)_\lambda$, $(\tilde{A}^c)_\lambda = (A_{\underset{\cdot}{1-\lambda}})^c$;

(2) $\left(\bigcup\limits_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{t \in T} (\tilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $\left(\bigcap\limits_{t \in T} \tilde{A}_t\right)_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq \bigcap\limits_{t \in T} (\tilde{A}_t)_{\underset{\cdot}{\lambda}}$, $(\tilde{A}^c)_{\underset{\cdot}{\lambda}} = (A_{1-\lambda})^c$.

性质 1.3.2 的证明很简单, 读者自证.

必须指出: (1) 中第一式和 (2) 中第二式不能换为等式.

例 1.3.2 令 $\tilde{A}_n(x) \equiv \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, $n = 1,\ 2, \cdots$, 则 $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right)(x) \equiv \dfrac{1}{2}$, 于是

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n\right)_{0.5} = X\ .$$

但
$$(\tilde{A}_n)_{0.5}=\phi(n\geqslant 1),$$
从而
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{A}_n)_{0.5}=\phi.$$
所以
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\right)_{0.5}\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}(\tilde{A}_n)_{0.5}.$$

同样, 令 $\tilde{B}_n(x)\equiv\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n=1,\ 2,\cdots$, 可以证明 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n\right)_{0.5}\neq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\tilde{B}_n)_{0.5}$.

定义 1.3.2　设 $\tilde{A}\in\mathcal{F}(X)$, 集合
$$\mathrm{Ker}\tilde{A}=\{x\mid\tilde{A}(x)=1\}$$
称为 $\tilde{A}$ 的核, 若 $\mathrm{Ker}\tilde{A}\neq\phi$, 则称 $\tilde{A}$ 为正规模糊集.

1.3.2　分解定理

定义 1.3.3　设 $\lambda\in[0,1]$, $\tilde{A}\in\mathcal{F}(X)$, λ 与 $\tilde{A}$ 的数积为
$$(\lambda\tilde{A})(x)=\lambda\bigwedge\tilde{A}(x).$$

定理 1.3.1(模糊集合的分解定理 I)　对于任意 $\tilde{A}\in\mathcal{F}(X)$, 有
$$\tilde{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda, \tag{1.3.1}$$
$$\tilde{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}. \tag{1.3.2}$$

证明　因为 $A_\lambda(x)=\begin{cases}1, & x\in A_\lambda,\\ 0, & x\notin A_\lambda,\end{cases}$ 故
$$\left(\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda\right)(x)=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\lambda A_\lambda(x)=\sup_{x\in A_\lambda}\lambda=\sup_{\lambda\leqslant\tilde{A}(x)}\lambda=\tilde{A}(x).$$

同理可证 (1.3.2) 式.

例 1.3.3　设论域 X={2, 1, 7, 6, 9}, 试应用分解定理将模糊集
$$\tilde{A}=\frac{0.1}{2}+\frac{0.3}{1}+\frac{0.5}{7}+\frac{0.9}{6}+\frac{1}{9}$$
进行分解.

解　模糊集的有关截集为

$$\begin{aligned}
&A_{0.1}=X, && 0<\lambda\leqslant 0.1, && A_{0.3}=\{1,\ 7,\ 6,\ 9\}, && 0.1<\lambda\leqslant 0.3,\\
&A_{0.5}=\{7,\ 6,\ 9\}, && 0.3<\lambda\leqslant 0.5, && A_{0.9}=\{6,\ 9\}, && 0.5<\lambda\leqslant 0.9,\\
&A_{1}\ =\{9\}, && 0.9<\lambda\leqslant 1, && &&
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\tilde{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda&=\bigcup_{0<\lambda\leqslant 0.1}\lambda\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)\bigcup_{0.1<\lambda\leqslant 0.3}\lambda\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)\\
&\quad\bigcup_{0.3<\lambda\leqslant 0.5}\lambda\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)\bigcup_{0.5<\lambda\leqslant 0.9}\lambda\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\right)\bigcup_{0.9<\lambda\leqslant 1}\lambda\left(\frac{1}{9}\right)\\
&=0.1A_{0.1}\bigcup 0.3A_{0.3}\bigcup 0.5A_{0.5}\bigcup 0.9A_{0.9}\bigcup 1A_1.
\end{aligned}$$

定义 1.3.4　设 X 是论域，若集值映射 H: $[0,\ 1]\to P(X)$, $\lambda\mapsto H(\lambda)$, 满足 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$,

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_2)\subseteq H(\lambda_1),$$

则称之为 X 上的一个集合套，X 上全体集合套组成的集合记为 $\mathbf{H}(X)$.

利用定义 1.3.4, 可以得到更一般的分解定理.

定理 1.3.2(模糊集合的分解定理 II)　设 $\tilde{A}\in\mathcal{F}(X)$, 若存在集值映射

$$\begin{aligned}
H:\ \ &[0,1]\to P(X),\\
&\quad\ \lambda\mapsto H(\lambda),
\end{aligned}$$

使得 $\forall\lambda\in[0,1]$, $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$, 则

(1) $\tilde{A}=\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$;　　(2) $\lambda_1<\lambda_2\Longrightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$;

(3) $A_\lambda=\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}H(\alpha),\quad\lambda\neq 0,\qquad A_{\underset{\cdot}{\lambda}}=\bigcap\limits_{\alpha>\lambda}H(\alpha),\quad\lambda\neq 1.$

证明　(1)
$$\begin{aligned}
A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda\ &\Longrightarrow\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\lambda H(\lambda)\subseteq\lambda A_\lambda\\
&\Longrightarrow\tilde{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1)}\lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\\
&\qquad\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda=\tilde{A}\\
&\Longrightarrow\tilde{A}=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).
\end{aligned}$$

(2) 因为 $\forall x\in X$, 有 $x\in A_{\lambda_2}\Longrightarrow\tilde{A}(x)\geqslant\lambda_2>\lambda_1\Longrightarrow x\in A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}}$, 所以，有 $\lambda_1<\lambda_2\Longrightarrow H(\lambda_1)\supseteq A_{\underset{\cdot}{\lambda_1}}\supseteq A_{\lambda_2}\supseteq H(\lambda_2)$.

(3) $\forall\alpha<\lambda, H(\alpha)\supseteq A_{\underset{\cdot}{\alpha}}\supseteq A_\lambda\Longrightarrow\bigcap\limits_{\alpha<\lambda}H(\alpha)\supseteq A_\lambda,\quad\lambda\neq 0.$

又有
$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha = A_{(\bigvee\limits_{\alpha<\lambda} \alpha)} = A_\lambda, \quad \lambda \neq 0.$$
因此，有
$$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha).$$

第二式可类似证明.

分解定理 II 说明模糊集 $\tilde{A}$ 可由集合套 $H(A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda)$ 灵活地表示，因此 $H(\lambda)$ 在实际中具有更广泛的应用.

下面从代数角度出发，给出模糊集的普通集表示法，从另一角度阐明模糊集是由经典集扩充而成的，特提出表现定理.

1.3.3* 表现定理

定义 1.3.5 设 $H_1, H_2 \in \mathbf{H}(X)$, 若 $\forall\lambda \in [0,1]$, 有 $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H_1(\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H_2(\alpha)$, 则称 H_1 和 H_2 等价，记为 $H_1 \sim H_2$, 其中 $\bigcap\limits_{\alpha<0} H(\alpha) = X$. 显然，关系 “ $\sim$ ” 满足

(1) $H \sim H$ (反身性);

(2) $H_1 \sim H_2 \Rightarrow H_2 \sim H_1$ (对称性);

(3) $H_1 \sim H_2$ 又 $H_2 \sim H_3 \Rightarrow H_1 \sim H_3$ (传递性).

记 $\mathbf{H}'(X) = \{\{H\} | H \in \mathbf{H}(X)\} = \mathbf{H}(X)/\sim$, 其中类 $\{H\} = \{H' | H' \sim H\}$.

定义 1.3.6 设 $H, H_1, H_2 \in \mathbf{H}(X)$, 且 $H_t \in \mathbf{H}(X)(\forall t \in T)$ 和 $\forall\lambda \in [0,1]$, 则

(1) 包含 $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow H_1(\lambda) \subseteq H_2(\lambda)$;

(2) 并 $\bigcup\limits_{t\in T} H_t : \left(\bigcup\limits_{t\in T} H_t\right)(\lambda) \triangleq \bigcup\limits_{t\in T} H_t(\lambda)$;

(3) 交 $\bigcap\limits_{t\in T} H_t : \left(\bigcap\limits_{t\in T} H_t\right)(\lambda) \triangleq \bigcap\limits_{t\in T} H_t(\lambda)$;

(4) 余 $H^c : H^c(\lambda) \triangleq (H(1-\lambda))^c$.

定理 1.3.3(表现定理) 设 $H \in \mathcal{F}'(X)$, 则 $\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda)$ 是 X 上一个模糊集，记作 $\tilde{A}$, 并且 $\forall\alpha, \lambda \in [0,1]$, 有

(1) $A_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} H(\alpha), \quad \lambda \neq 0$； (2) $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \bigcup\limits_{\alpha>\lambda} H(\alpha), \quad \lambda \neq 1$.

证明 按数与集合乘积的定义， $\forall\lambda \in [0,1], H(\lambda) \in P(X)$, 则 $\lambda H(\lambda) \in \mathbf{H}(X)$, 故 $\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda) \in \mathbf{H}(X)$. 记 $\tilde{A} = \bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda)$.

按分解定理 II, 若满足条件 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$, 便可得 (1) 和 (2). 下面证明此条件成立.

$\forall\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} x \in A_{\underset{\cdot}{\lambda}} &\Longrightarrow \tilde{A}(x) > \lambda \\ &\Longrightarrow \Big(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha H(\alpha)\Big)(x) > \lambda \\ &\Longrightarrow \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \bigwedge H(\alpha)(x)) > \lambda \\ &\Longrightarrow \exists\lambda_0 \in [0,1], \text{使}\lambda_0 \bigwedge H(\lambda_0)(x) > \lambda \\ &\Longrightarrow \lambda_0 > \lambda \text{ 且 } H(\lambda_0)(x) = 1 \\ &\Longrightarrow x \in H(\lambda_0) \subseteq H(\lambda), \quad \lambda \neq 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in H(\lambda) &\Longrightarrow H(\lambda)(x) = 1 \\ &\Longrightarrow \bigvee_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \bigwedge H(\alpha)(x)) \geqslant \lambda \bigwedge H(\lambda)(x) = \lambda \\ &\Longrightarrow \tilde{A}(x) \geqslant \lambda \\ &\Longrightarrow x \in A_\lambda. \end{aligned}$$

因此，条件 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$ 成立.

对 $\forall H \in H(X)$, 若记 $\tilde{A} = \bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda)$, 由定理 1.3.3 容易得到

(1) $\mathbf{H}'(X)$ 与 $\mathcal{F}(X)$ 一一对应;

(2) $\tilde{A}(x) = \bigvee\limits_{x\in H(\lambda)} \lambda$.

例 1.3.4 设 $X = [-1,1]$, X 中的集合套为

$$H(\lambda) = [\lambda^2 - 1, 1 - \lambda^2], \quad \lambda \in [0,1],$$

求由 H 所确定的模糊集 $\tilde{A}$ 的隶属函数.

解 $\tilde{A}(x) = \bigvee\limits_{x\in H(\lambda)} \lambda, \quad \lambda \in [0,1]$.

当 $-1 \leqslant x \leqslant 0$, 即 $x = \lambda^2 - 1$ 时,

$$\tilde{A}(x) = \bigvee_{\lambda=\sqrt{1+x}} \lambda = \sqrt{1+x};$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 即 $x = 1 - \lambda^2$ 时,

$$\tilde{A}(x) = \bigvee_{\lambda=\sqrt{1-x}} \lambda = \sqrt{1-x}.$$

因此有 $\tilde{A}(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{1-x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$ 其图像如图 1.3.1 所示.

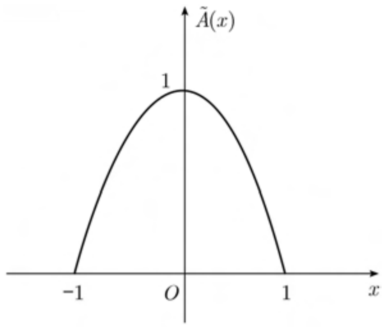

图 1.3.1

1.4 凸 模 糊 集

首先回忆一下普通凸集的概念. 设 $X = R^n$ 为 n 维欧氏空间, A 是 X 的普通子集. 若对任意的 $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ 及任意的 $\alpha \in [0,1]$, 都有

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A,$$

则称 A 为凸集.

在引进凸模糊集概念之前，我们先证明下面的结果.

定理 1.4.1 设 $\tilde{A}$ 是 X 的模糊集. $\lambda \in [0,1]$, $A_\lambda = \{x|\tilde{A}(x) \geqslant \lambda\}$ 都是凸集的充要条件是对任意的 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $\alpha \in [0,1]$, 都有

$$\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2). \tag{1.4.1}$$

$\tilde{A}$ 是凹集的充要条件是它的余集 $\tilde{A}^c$ 是凸的.

证明 仅证凸的情形. 如果已知 $\lambda \in [0,1]$, A_λ 都是凸集, 对任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X$, 不妨设 $\tilde{A}(x_2) \geqslant \tilde{A}(x_1) = \lambda_0$, 则

$$\tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2) = \lambda_0.$$

因 A_{λ_0} 是凸集，所以，对 $x_1 \in A_{\lambda_0}$, $x_2 \in A_{\lambda_0}$ 及任意 $\alpha \in [0,1]$, 都有

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A_{\lambda_0}.$$

于是

$$\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \lambda_0.$$

因此

$$\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2).$$

反之，如果已知对任意的 $x_1 \in X, x_2 \in X, \alpha \in [0,1]$, 都有

$$\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2),$$

那么，若 $\lambda \in [0,1], x_1 \in A_\lambda$, $x_2 \in A_\lambda$, 则 $\tilde{A}(x_1) \geqslant \lambda$, $\tilde{A}(x_2) \geqslant \lambda$, 故有

$$\tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2) \geqslant \lambda,$$

于是

$$\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2) \geqslant \lambda.$$

所以 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A_\lambda$, 因此， A_λ 为凸集.

定义 1.4.1 设 $X = R^n$ 为 n 维欧式空间， $\tilde{A}$ 为 X 的模糊集. 如果对所有 $\lambda \in [0,1]$, A_λ 都是凸集，则称模糊集 $\tilde{A}$ 是凸的.

由定理 1.4.1 知， $\tilde{A}$ 是凸的充要条件是：对任意的 $\alpha \in [0,1]$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, 都有

$$\tilde{A}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \tilde{A}(x_1) \bigwedge \tilde{A}(x_2).$$

定义 1.4.2 设 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$, 若 $\forall \lambda \in [0,1], A_\lambda$ 均为 X 中的有界集，则称 $\tilde{A}$ 为 X 中的有界模糊集.

利用 1.3 节 λ- 截集的性质和定义 1.4.2, 不难证明：

定理 1.4.2 两个有界模糊集的并和交为有界模糊集.

1.5 模糊集的模糊性指标及第二类模型识别方法

定义 1.5.1 设 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$, 令

$$\underline{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \tilde{A}(x) > 0.5 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \tilde{A}(x) \leqslant 0.5 \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $\underline{\tilde{A}}$ 是一个普通子集，称之为与 $\tilde{A}$ 最接近的普通子集.

根据定义 1.5.1, 容易验证：

(1) $\underline{(\tilde{A} \bigcap \tilde{B})} = \underline{\tilde{A}} \bigcap \underline{\tilde{B}}$; (2) $\underline{(\tilde{A} \bigcup \tilde{B})} = \underline{\tilde{A}} \bigcup \underline{\tilde{B}}$.

定义 1.5.2 设 $X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ 为有限集， $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(X)$, 令

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [\tilde{A}(x_k) - \tilde{B}(x_k)]^2}, \tag{1.5.1}$$

$$\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\tilde{A}(x_k) - \tilde{B}(x_k)|, \tag{1.5.2}$$

则称 $d(\tilde{A},\tilde{B})$ 和 $\delta(\tilde{A},\tilde{B})$ 分别为模糊集 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 之间的欧几里得距离和海明距离.

上述两种距离已经规范化了，具有 $0\leqslant d(\tilde{A},\tilde{B})\leqslant 1,\quad 0\leqslant \delta(\tilde{A},\tilde{B})\leqslant 1$.

如果 X 为无限集，那么相应地距离要用级数或积分来表示.

定义 1.5.3　设 X 为有限集， $\tilde{A}$ 为 X 的一个模糊集， $\underline{A}$ 为与 $\tilde{A}$ 最接近的普通子集. 令

$$\alpha(\tilde{A})=2d(\tilde{A},\underline{A}),\quad \beta(\tilde{A})=2\delta(\tilde{A},\underline{A}),$$

则 $\alpha(\tilde{A})$ 为 $\tilde{A}$ 在欧几里得距离意义下的模糊性指标， $\beta(\tilde{A})$ 为 $\tilde{A}$ 在海明距离意义下的模糊性指标.

这种模糊性指标只刻画模糊集 $\tilde{A}$ 中的元素的隶属度是 0 或 1 的情况. 例如， $\tilde{A}$ 为普通子集 A 时， $\alpha(A)=0, \beta(A)=0$. 当 $\tilde{A}$ 的隶属函数 $\tilde{A}(x)\equiv 0.5$ 时， $\alpha(\tilde{A})=1$, $\beta(\tilde{A})=1$, 这时模糊性指标最大.

例 1.5.1　设论域 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$,

$$\tilde{A}=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.8}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.4}{x_6},$$

$$\tilde{B}=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{0.6}{x_6},$$

求 $d(\tilde{A},\tilde{B}), \delta(\tilde{A},\tilde{B}), \alpha(\tilde{A}), \beta(\tilde{A})$.

解

$$\begin{aligned} d(\tilde{A},\tilde{B}) &= \sqrt{\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}[\tilde{A}(x_k)-\tilde{B}(x_k)]^2}=\sqrt{\frac{1}{6}(0.04+0.04+0.04+0.04+0.04+0.04)} \\ &= \sqrt{\frac{0.24}{6}}=\sqrt{0.04}=0.2. \end{aligned}$$

$$\delta(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}|\tilde{A}(x_k)-\tilde{B}(x_k)|=\frac{1}{6}(0.2+0.2+0.2+0.2+0.2+0.2)=0.2.$$

又 $\underline{A}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}+\dfrac{1}{x_5}+\dfrac{0}{x_6}$,

$$d(\tilde{A},\underline{A})=\sqrt{\frac{1}{6}(0.16+0.04+0+0.04+0.16+0.16)}\approx 0.31,$$

$$\delta(\tilde{A},\underline{A})=\frac{1}{6}(0.4+0.2+0+0.2+0.4+0.4)=0.267.$$

所以 $\alpha(\tilde{A})=0.62, \beta(\tilde{A})=0.534$.

定义 1.5.4　设 $\tilde{A},\tilde{B}\in\mathcal{F}(X)$, 则称

$$\sigma(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{1}{2}[\tilde{A}\otimes\tilde{B}+(1-\tilde{A}\odot\tilde{B})]$$

为 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的贴近度，其中 $\tilde{A}\otimes\tilde{B}=\bigvee\limits_{x\in X}[\tilde{A}(x)\bigwedge\tilde{B}(x)]$, $\tilde{A}\odot\tilde{B}=\bigwedge\limits_{x\in X}[\tilde{A}(x)\bigvee\tilde{B}(x)]$ 分别称为 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的内积与外积. 这里 $A_1\neq\phi$, $B_1\neq\phi$, $\mathrm{supp}\tilde{A}\neq X$, $\mathrm{supp}\tilde{B}\neq X$.

择近原则　设 $\tilde{A}_i,\ \tilde{B}\in\mathcal{F}(X)(1\leqslant i\leqslant n)$, 若存在 $\tilde{A}_{i0}$, 使得

$$\sigma(\tilde{A}_{i0},\ \tilde{B})=\max\{\sigma(\tilde{A}_1,\tilde{B}),\sigma(\tilde{A}_2,\tilde{B}),\cdots,\sigma(\tilde{A}_n,\tilde{B})\},$$

则称 $\tilde{B}$ 与 $\tilde{A}_{i0}$ 最相近，判定 $\tilde{B}$ 应属于 $\tilde{A}_{i0}$ 类.

这里要判断的对象不是 X 中的一个元素，而是 X 上的一个模糊集. 下面给出这种识别方法的一个例子.

例 1.5.2　小麦品种的识别问题.

今有五种小麦优良品种，它们是早熟、矮杆、大粒、高肥丰产、中肥丰产. 根据抽样实测结果，利用数理统计的方法，已知它们的百粒重分别为如下的正态模糊集：

早熟 $(\tilde{A}_1)$: $\tilde{A}_1(x)=\exp\left[-\left(\dfrac{x-3.7}{0.3}\right)^2\right]$,

矮杆 $(\tilde{A}_2)$: $\tilde{A}_2(x)=\exp\left[-\left(\dfrac{x-2.9}{0.3}\right)^2\right]$,

大粒 $(\tilde{A}_3)$: $\tilde{A}_3(x)=\exp\left[-\left(\dfrac{x-5.0}{0.3}\right)^2\right]$,

高肥丰产 $(\tilde{A}_4)$: $\tilde{A}_4(x)=\exp\left[-\left(\dfrac{x-3.9}{0.3}\right)^2\right]$,

中肥丰产 $(\tilde{A}_5)$: $\tilde{A}_5(x)=\exp\left[-\left(\dfrac{x-3.7}{0.2}\right)^2\right]$.

现有一小麦品种 $\tilde{B}$, 不知道它的品种名字, 用统计方法得知它的百粒重 (多次采样，每次取 100 粒，称出其重量，称为百粒重) 的隶属函数为 $\tilde{B}(x)=\exp\left[-\left(\dfrac{x-3.43}{0.28}\right)^2\right]$. 现在要求识别从百粒重这一特征上看，$\tilde{B}$ 属于哪一种品种.

用定义 1.5.4 中的贴近度公式计算. 由于对两个正态模糊集 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, 有

$$\tilde{A}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2\right],\ b_1>0,\quad \tilde{B}(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2\right],\ b_2>0.$$

于是

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=\exp\left[-\left(\frac{a_1-a_2}{b_1+b_2}\right)^2\right],\quad \tilde{A}\odot\tilde{B}=0.$$

事实上，先求 $\tilde{A}(x)$ 与 $\tilde{B}(x)$ 的交点，解方程

$$\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2=\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2,$$

得

$$x_1=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2},\quad x_2=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_2-b_1}.$$

由于 $\tilde{A}(x)$ 与 $\tilde{B}(x)$ 图像均为正态曲线，所以交点的横坐标必位于 a_1 与 a_2 之间，故 x_1 为所求.

不失一般性，假定 $a_1>a_2$, 则有

$$\widetilde{A}(x)\bigwedge\widetilde{B}(x)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{x-a_1}{b_1}\right)^2\right], & x\leqslant\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2},\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x-a_2}{b_2}\right)^2\right], & x>\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2},\end{cases}$$

如图 1.5.1 所示，于是有

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=\bigvee_{x\in X}(\tilde{A}(x)\bigwedge\tilde{B}(x))=\exp\left[-\left(\frac{x_1-a_1}{b_1}\right)^2\right]=\exp\left[-\left(\frac{a_1-a_2}{b_1+b_2}\right)^2\right].$$

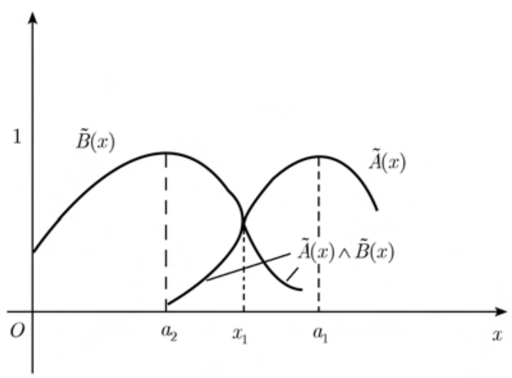

图 1.5.1

又因为

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp\left[-\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)^2\right]=\lim_{|x|\to\infty}\exp\left[-\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)^2\right]=0,$$

所以

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = 0.$$

显然

$$\sigma(\tilde{A},\ \tilde{B}) = \frac{1}{2}\left[\exp\left[-\left(\frac{a_1 - a_2}{b_1 + b_2}\right)^2\right] + 1\right] = \sigma(\tilde{A}_i,\ \tilde{B})\quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5).$$

按此式计算，得

$$\sigma(\tilde{A}_1,\ \tilde{B}) = \frac{1}{2}\left[\exp\left[-\left(\frac{3.43 - 3.7}{0.28 + 0.3}\right)^2\right] + 1\right] \approx 0.90,$$

$$\sigma(\tilde{A}_2,\ \tilde{B}) \approx 0.72,\ \sigma(\tilde{A}_3, \tilde{B}) \approx 0.50,\ \sigma(\tilde{A}_4, \tilde{B}) \approx 0.76, \sigma(\tilde{A}_5, \tilde{B}) \approx 0.86.$$

所以从百粒重这一特性上看，可判定 $\tilde{B}$ 属于 $\tilde{A}_1$ 类，即早熟品种.

上面是按小麦的一种特性百粒重来对 $\tilde{B}$ 进行识别，这不十分合理. 如果同时考察小麦的五种主要特性：抽穗期、株高、有效穗数、主穗粒数及百粒重，这样，对于每一个品种 $\tilde{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, 都有五个特点，对应五个模糊集 $\tilde{A}_{i1}, \tilde{A}_{i2}, \tilde{A}_{i3}, \tilde{A}_{i4}, \tilde{A}_{i5}$, 五个品种共对应 25 个模糊集 $\tilde{A}_{ij}(1 \leqslant i,\ j \leqslant 5)$, 如表 1.5.1 所示.

表 1.5.1

	$\tilde{A}_1$	$\tilde{A}_2$	$\tilde{A}_3$	$\tilde{A}_4$	$\tilde{A}_5$
抽穗期	$\tilde{A}_{11}$	$\tilde{A}_{21}$	$\tilde{A}_{31}$	$\tilde{A}_{41}$	$\tilde{A}_{51}$
株高	$\tilde{A}_{12}$	$\tilde{A}_{22}$	$\tilde{A}_{32}$	$\tilde{A}_{42}$	$\tilde{A}_{52}$
有效穗数	$\tilde{A}_{13}$	$\tilde{A}_{23}$	$\tilde{A}_{33}$	$\tilde{A}_{43}$	$\tilde{A}_{53}$
主穗粒数	$\tilde{A}_{14}$	$\tilde{A}_{24}$	$\tilde{A}_{34}$	$\tilde{A}_{44}$	$\tilde{A}_{54}$
百粒重	$\tilde{A}_{15}$	$\tilde{A}_{25}$	$\tilde{A}_{35}$	$\tilde{A}_{45}$	$\tilde{A}_{55}$

其中 $\tilde{A}_{ij}$ 表示第 i 个品种第 j 个特征所对应的模糊集.

待识别品种 $\tilde{B}$ 也有五个特性，用 $\tilde{B}_j$ 表示 $\tilde{B}$ 的第 j 个特性所对应的模糊集，这样应计算 25 个贴近度 $\sigma(\tilde{A}_{ij},\ \tilde{B}_j)$　$(1 \leqslant i,\ j \leqslant 5)$, 如表 1.5.2 所示.

表 1.5.2

	$\tilde{A}_{1j}$	$\cdots$	$\tilde{A}_{5j}$
$\tilde{B}_1$	$\sigma(\tilde{A}_{11},\ \tilde{B}_1)$	$\cdots$	$\sigma(\tilde{A}_{51},\ \tilde{B}_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\tilde{B}_5$	$\sigma(\tilde{A}_{15},\ \tilde{B}_5)$	$\cdots$	$\sigma(\tilde{A}_{55},\ \tilde{B}_5)$
$\tilde{S}_i$	$\tilde{S}_1$	$\cdots$	$\tilde{S}_5$

令 $\tilde{S}_i = \bigwedge\limits_{1 \leqslant j \leqslant 5} \sigma(\tilde{A}_{ij},\ \tilde{B}_j)\ \ (1 \leqslant i \leqslant 5)$, 它代表 $\tilde{B}$ 与 $\tilde{A}_i$ 的每一特性的贴近度的最小值. 若 $S_{i0} = \bigvee\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} S_i$, 则判断 $\tilde{B}$ 为 $\tilde{A}_{i0}$ 类.

在例 1.5.2 中, $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_j$ 都是正态型模糊集，当模式的模糊集与待识别对象的模糊集是其他类型时，只要给出其隶属函数，都可按同样方法求它们的贴近度，然后按择近原则进行识别.

作为作业，请读者完善上述例 1.5.2.

1.6 模糊集在模型识别中的应用 —— 第一类模型识别法

设 $\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2,\ \cdots,\ \tilde{A}_n$ 为 X 的模糊集, $x_0 \in X$, 若有

$$\tilde{A}_k(x_0) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\tilde{A}_i(x_0)\},$$

则认为 x_0 相对属于模糊集 $\tilde{A}_k$, 这就是所谓最大隶属原则.

设有 n 个模型，把它们表示为 X 的 n 个模糊集 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \cdots, \tilde{A}_n$. 今有一个被识别的对象 $x_0 \in X$, 要问它属于哪一种模型，则按最大隶属原则进行判断，看它对哪一个模糊集的隶属函数值最大，就判断它属于哪一个模型. 这就是模型识别的第一种方法 (直接方法).

上述方法也可作如下改变，即在按最大隶属原则判断之前，先规定一个阈值 $\lambda \in [0, 1]$, 并记

$$\alpha = \max\{\tilde{A}_1(x_0),\ \tilde{A}_2(x_0),\ \cdots,\ \tilde{A}_n(x_0)\},$$

若 $\alpha < \lambda$, 则认为不能识别，另作分析；若 $\alpha \geqslant \lambda$, 则认为可以识别，而且按最大隶属原则作出判断.

例 1.6.1 三角形类型的识别 (它出自于对细胞染色体形状的识别).

设 X 为三角形集合，即

$$X = \{(\alpha,\ \beta,\ \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,\ \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma\},$$

用 X 上的模糊集 $\tilde{E}, \tilde{I}, \tilde{R}, \tilde{IR}$ 和 $\tilde{T}$ 分别表示正三角形、等腰三角形、直角三角形、

等腰直角三角形和非典型三角形，其隶属函数分别为

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \left(1-\frac{C_1}{180}(\alpha-\gamma)\right)^2, \\
\widetilde{I}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \left(1-\frac{C_2}{60}\min(\alpha-\beta,\ \beta-\gamma)\right)^2, \\
\widetilde{R}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \left(1-\frac{C_3}{90}|\alpha-90|\right)^2, \\
I\widetilde{R}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \widetilde{I}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\bigwedge\widetilde{R}(\alpha,\ \beta,\ \gamma), \\
\widetilde{T}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \min\{(1-\widetilde{E}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)),\ (1-\widetilde{I}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)),\ (1-\widetilde{R}(\alpha,\ \beta,\ \gamma))\},
\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 均为适当选取的正参数. 容易验证上述表示的合理性.

例 1.6.2 试识别三角形 (94, 50, 36) 所属三角形的类型.

解 若取 $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, 则可由计算得到

$$\begin{aligned}
\tilde{E}\ (94,\ 50,\ 36) &= \left(1-\frac{1}{180}(94-36)\right)^2 = 0.459, \\
\tilde{I}\ (94,\ 50,\ 36) &= \left(1-\frac{1}{60}\min(94-50,\ 50-36)\right)^2 = 0.588, \\
\tilde{R}\ (94,\ 50,\ 36) &= \left(1-\frac{1}{90}|94-90|\right)^2 = 0.913, \\
I\tilde{R}\ (94,\ 50,\ 36) &= \min(0.588, 0.913) = 0.588, \\
\tilde{T}\ (94,\ 50,\ 36) &= \min(0.541, 0.412, 0.087) = 0.087.
\end{aligned}$$

由最大隶属原则，判断三角形 (94, 50, 36) 属于直角三角形.

1.7 隶属函数的确定

隶属函数的确定过程，本质上是客观的，但又容许有一定的人为技巧. 以下具体介绍确定隶属函数的几种常用方法.

1.7.1 模糊统计试验法

此法将在 5.1 节中详细介绍.

1.7.2 二元对比排序法

二元对比排序法是把事物两两相比，从而确定顺序，由此决定隶属函数的大致形状.

二元对比排序法有多种，以下仅介绍三种：

(1) 相对比较法； (2) 择优比较法； (3) 对比平均法.

(1) 相对比较法

它是把论域中各元素，按某种特性，在两两元素之间进行对比，建立所谓二元比较级．设数对 $(f_y(x), f_x(y))$ 是 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上的数偶，在二元比较级后，通过相及矩阵转化为总体的排序.

例 1.7.1　设由三个儿子组成的集合为 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, 其中 x_1 表示长子, x_2 表示次子， x_3 表示三子．试确定三个儿子与父亲的相似程度，即隶属度.

解　1° 先在两两元素之间进行二元比较，得

$f_{x_1}(x_1) = 1, f_{x_2}(x_1) = 0.8, f_{x_3}(x_1) = 0.5;$

$f_{x_1}(x_2) = 0.5, f_{x_2}(x_2) = 1, f_{x_3}(x_2) = 0.4;$

$f_{x_1}(x_3) = 0.3, f_{x_2}(x_3) = 0.7, f_{x_3}(x_3) = 1.$

$(f_{x_2}(x_1), f_{x_1}(x_2))=(0.8, 0.5)$ 是一个二元比较级，它的含义是把长子与次子相比较，如果长子与父亲的相似程度为 0.8, 则次子与父亲的相似程度只有 0.5. 同理可知其他二元比较级． $f_{x_1}(x_1) = f_{x_2}(x_2) = f_{x_3}(x_3) = 1$ 表示自己与自己比较与父亲相似的程度．因此，该问题的三个二元比较级是

$(f_{x_2}(x_1), f_{x_1}(x_2))=(0.8, 0.5), (f_{x_3}(x_2), f_{x_2}(x_3))=(0.4, 0.7),$

$(f_{x_3}(x_1), f_{x_1}(x_3))=(0.5, 0.3).$

2° 建立相及矩阵

令

$$f(x/y) \triangleq \frac{f_y(x)}{\max(f_x(y), f_y(x))},$$

显然有

$$f(x/y) = \begin{cases} f_y(x)/f_x(y), & \text{当 } f_y(x) \leqslant f_x(y)\ ; \\ 1, & \text{当 } f_y(x) > f_x(y). \end{cases}$$

此处 x, y 属于论域 X, 以 $f(x/y)$ 为元素作成矩阵，且凡是 $f(x/x)$ 均为 1. 这样构成的矩阵就叫做相及矩阵，上述问题的相及矩阵如下：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \quad \min \\ S = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 5/8 & 1 & 4/7 \\ 3/5 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \\ 4/7 \\ 3/5 \end{array} \end{array}$$

3° 排序规则

从 S 的每一行取最小值，按所得数从大到小排出优劣次序为

$$1 > \frac{3}{5} > \frac{4}{7}, \text{亦即 } 1 > 0.6 > 0.57.$$

于是得出结论：长子像父亲的隶属度为 1(最像父亲)，三子像父亲的隶属度为 0.6(即次像父亲), 次子像父亲的隶属度为 0.57(即不太像父亲).

(2) 择优比较法

该法是经抽样试验后，利用统计方法求隶属度的一种方法.

例 1.7.2 生产乒乓球拍，被选择的颜色论域为 $X=\{$红，橙，黄，绿，蓝$\}$, 现从乒乓球爱好者中随机抽 500 人，每人被试 20 次，每次从 X 中选出两种颜色对比，被试者从两种颜色的球拍中择优指定一种作为自己所喜爱的颜色，试确定乒乓球拍颜色的优劣次序.

表 1.7.1 择优试验顺序表

	红	橙	黄	绿	蓝
红					
橙	1				
黄	5	2			
绿	8	6	3		
蓝	10	9	7	4	

解 每个被试者按表 1.7.1 的择优试验顺序反复进行两遍, 试验记录于表 1.7.2 中.

表 1.7.2 乒乓球拍择优次数表

	红	橙	黄	绿	蓝	Σ	%	顺序
红		517	525	545	661	2248	22.48	2
橙	483		841	477	576	2377	23.77	1
黄	475	159		534	614	1782	17.82	4
绿	455	523	466		643	2087	20.87	3
蓝	339	524	386	357		1506	15.06	5

表 1.7.2 中 Σ 栏内是左端颜色与其他四种颜色对比时所得的择优总数. 于是按总和的大小即可排出各种颜色优劣的次序：橙 $\to$ 红 $\to$ 绿 $\to$ 黄 $\to$ 蓝，其百分数就可看成为各种颜色的隶属度.

(3) 对比平均法

如果将上述二元比较级经加权后求隶属度，即为对比平均法. 权分平权 (乘数相同) 和非平权 (乘数不同), 对例 1.7.1 取平权，有

例 1.7.3 $\dfrac{1}{3}[f_{x_1}(x_1)+f_{x_2}(x_2)+f_{x_3}(x_3)]=(1+1+1)/3=1.$

1.7.3 逐级估量法

逐级估量法又叫模糊集法，运用时首先要规定 (或给出) 若干等级. 譬如评价