西安交通大学数学研究生教学丛书

动力系统基础及其方法

陈绥阳　褚蕾蕾　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

动力系统（Dynamical System）是拓扑空间上连续自映射迭代生成的系统．本书重点阐述拓扑动力系统（含符号动力系统、分形动力系统），微分动力系统和无穷维动力系统的基础理论知识与基本研究方法．这一理论与方法，已广泛而深入地应用于数学、统计学、物理、力学、信息与计算科学，以及许多工程领域．

本书可作为数学类各专业的研究生教材，也可供以上相关专业的高年级学生及教学、科研人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

动力系统基础及其方法/陈绥阳，褚蕾蕾编著．—北京：科学出版社，2002.9

（西安交通大学数学研究生教学丛书）

ISBN 7-03-010392-0

Ⅰ．动…　Ⅱ．①陈…②褚…　Ⅲ．动力系统（数学）—研究生—教学参考资料　Ⅳ．O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 027341 号

责任编辑：林鹏　杨波/责任校对：陈丽珠

责任印制：安春生/封面设计：王浩

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002 年 9 月第　一　版　　开本：B5（720×1000）

2002 年 9 月第一次印刷　　印张：20 3/4

印数：1—3 000　　字数：394 000

定价：31.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

前　　言

动力系统是20世纪最富有成就的一个数学分支，也是非线性科学的一个重要组成部分，在不少领域中有重要的应用．

一个动力系统是由拓扑空间及其上的连续自映射所构成的系统．该系统研究的问题，大致可以分为两类：一类是孤立地研究一个自映射迭代生成的动力学复杂性质，即长时间的形态；另一类是把一个动力系统看作是某个空间内的一个点，研究诸如在微小挠动下动力性状的改变．

与此同时，从20世纪六七十年代以来，随着计算能力的不断提高，非线性科学发现两个极端的现象，一是具有内秉的对称和保守性质的孤立子，另一是在耗散系统中发现了奇怪吸引子和混沌．近来又发现一批从孤立子可演化为混沌现象的非线性演化方程．从而推动了无穷维动力系统的研究，与有穷维动力系统不同的是，它研究空间上的混沌现象，而后者仅研究时间上的混沌现象．但是，二者却有令人惊叹的联系．

动力系统不仅是非线性科学的研究对象，而且是研究非线性“复杂性”的有力工具，其理论与方法已广泛渗透于许多重要领域和众多学科．

作者出于计算和理论研究而感兴趣于动力系统．于是，在多年教学与研究的基础上，希望搜集整理这一领域的文献与典籍，对其知识进行再组织．为成此书，历时两年，虽无博观约取、厚积薄发之力，但有心在适当深入的基础上拓宽知识，注重学科内部联系，保持结构相对完整，以便于教学组织与自学参考．

本书内容分为三部分，拓扑动力系统（含符号动力系统、分形动力系统），微分动力系统和无穷维动力系统．其中，拓扑动力系统是基础．读者可按需选读．一般来讲，需要具备点集拓扑和非线性泛函分析的基本知识．

本书§12.3，由伍渝江先生撰写．所引文献，已注明出处，在此对原著表示尊敬而诚挚的谢意．

作者囿于学识，对书中挂一漏万、疏忽纰缪之处，向读者和文献原著表示歉意，并敬请斧正．

作　者
2001年于西安交通大学

目　　录

第一章　概　　述

§1.1　动力系统概述

1591 年,奥地利格拉茨大学讲师开普勒(Kepler)前往布拉格,成为天文学家第谷·布拉赫(Tycho)的助手.开普勒根据第谷的准确观测数据,发现了行星运动三定律,其中对当时正统派理性思潮最为震动的一条是,每个行星沿着以太阳为一个焦点的椭圆轨道而运动.在当时理性思潮的影响下,人们普遍认为行星绕太阳旋转的轨道是圆,因为圆是最完美的曲线.

为什么行星运动的轨道是椭圆曲线而不是"完美"的圆呢?

半个多世纪以后,牛顿(Newton)于 1687 年在其名著《自然哲学的数学原理》中,提出万有引力定律,而后用数学的形式——常微分方程——推出了开普勒定律,完成了日心地动说的力学解释,也同时开始了以常微分方程为对象的动力系统的研究.下面仅介绍行星轨迹为椭圆的论述.

例 1.1.1　行星轨道方程.设某行星运动于以太阳为原点 O 的复平面内,在时刻 t 的位置

$$z(t) = re^{i\theta},$$

其中 $r = r(t)$,$\theta = \theta(t)$.设行星和太阳的质量分别为 P 和 M,$G = 6.672\times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2}\mathrm{kg}^{-1}$ 是万有引力常数,于是由万有引力定律,有

$$P\ddot{z} = -\frac{PMG}{r^2}e^{i\theta},$$

其中

$$\ddot{z} = ((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + i(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}))e^{i\theta}$$

是加速度.分离方程的实部和虚部得

$$-\frac{MG}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \tag{1.1.1}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{1.1.2}$$

由方程(1.1.2)得 $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$,从而

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{1.1.3}$$

其中 h 是常数,它等同于开普勒第二定律,行星在相等的时间内扫过相等的面积.

联合(1.1.1)和(1.1.3),令 $r=\frac{1}{u}$,得

$$\frac{MG}{h^2}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u,$$

再令 $v=u-\frac{MG}{h^2}$,$p=\frac{h^2}{MG}$,解得

$$r=\frac{p}{1-\mu\cos\theta},$$

其中 $\mu=Ap$ 是离心率.由此可见,点(r,θ)的轨道是离心率为 $\mu(0<\mu<1)$,极点 O 为一个焦点的椭圆.

与例 1.1.1 的分析方法不同的是,绝大多数的微分方程不能用已知函数的积分来表示其通解.这导致微分方程定性理论[1~3]的研究,其肇端始于法国数学家 H.Poincaré 和俄国数学家 A.M.Ляпунов.前者在 1881～1886 年间连续发表的论文《微分方程所确定的曲线》,后者在 1882～1892 年间完成的博士论文《运动稳定性的一般问题》,是这一方面的经典著作.到 1927 年,G.D.Birkhoff 在继承并发展 Poincaré 工作的基础上,使“动力系统”一词首见于其专著[4].

如例 1.1.1 所示,一个用常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\Phi(x,t),\quad x\in\mathbf{R}^n$$

描述的随时间演化的系统,是一个经典意义下的动力系统.设其满足初值条件

$$x(0)=x_0,\quad x_0\in\mathbf{R}^n$$

的解为 $\varphi(t,x_0)$,且存在区间是 $\mathbf{R}$,则映射 $\varphi:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足

(H1) $\varphi(0,x)=x$, $\forall\, x\in\mathbf{R}^n$.

(H2) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$, $\forall\, s,t\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}^n$.

更一般地,称满足条件 H1 和 H2 的映射 $\varphi:\mathbf{R}\times X\to X$ 为连续动力系统或流,其中 X 是底空间.

下面例 1.1.2 的差分方程给出的动力系统是离散动力系统。

例 1.1.2 (Malthus 模型,1798 年) 设某人口群体在第 n 个时间段开始时的总数为 P_n,若出生率与死亡率之差为 b,则有 Malthus 模型

$$P_{n+1}=kP_n,\quad n\in\mathbf{Z}_+,$$

其中 $k=1+b$,于是

$$P_{n+1}=k^{n+1}P_0,\quad n\in\mathbf{Z}_+.$$

定义 $f:\mathbf{Z}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 $f^n(x)=k^nx$,则 Malthus 模型又可记为

$$P_{n+1}=f(P_n).$$

显然,映射 $f:\mathbf{Z}_+\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足条件 H1 和 H2,构成 $\mathbf{R}$ 上的离散动力系统,而

$$\mathrm{Orb}_f(P_0)=\{P_0, P_1, P_2, \cdots\}$$

是 f 过 P_0 点的一条轨道.

动力系统不仅可以通过映射 φ 或 f 在“时间”维上的定义域来进行分类,如连续动力系统或离散动力系统,而且可以通过底空间 X 的结构来进行分类.例如,若 X 分别是拓扑空间(或度量空间),C^r 微分流形和无穷维 Banach 空间,则在 X 上可分别定义拓扑动力系统,微分动力系统和无穷维动力系统.

一般而言,动力系统研究的主要问题是:

(1)轨道长时间的渐近性质,如极限点集、非游荡点集、周期点集等.

(2)轨道在相空间中的稠密性,如极小性、拓扑传递性、拓扑混合性等.

(3)动力系统的整体性质,如全局吸引子等.

(4)动力系统的拓扑分类与结构稳定性,如双曲不动点和双曲不变集的稳定性.

(5)动力系统的复杂性,包括几何复杂性,如混沌、分形,以及动力学复杂性,如拓扑熵、Liapunov 指数等.

研究这些问题的主要方法,一是以结构分析为主的几何方法,另一是以数值计算为主的模拟方法.本书拟采用前者依次逐层展开对上述动力系统主要问题的研究和讨论.

§1.2 动力系统的底空间

设 S 是一个集合,映射 $f: S \to f(S) \subseteq S$ 按复合运算“$\circ$”满足

H1 $\quad f^0 = id$.

H2 $\quad f^{m+n} = f^m \circ f^n, \quad \forall m, n \in \mathbf{Z}_+$.

其中 id 表示恒同映射.一般来讲,可定义一单边的离散动力系统(S, f).这时,S 的结构对(S, f)的性质有决定性的影响.

在形式系统的一般理论中,没有限定 S 的结构,仅设 S 是一个非空集.S 上的一条规则是一个有序对(X, x),表示 $X \Rightarrow x$,其中 $X \subseteq S$ 称为规则的前提,$x \in S$ 称为规则的结论.设 Ω 是一个规则集,子集 $A \subseteq S$ 称为 Ω–封闭的,若

$$X \subseteq A \Rightarrow x \in A, \quad \forall (X, x) \in \Omega.$$

令 $I(\Omega)$是一切 Ω–封闭集的交,即

$$I(\Omega) = \bigcap \{A \mid A \subseteq S \text{ 且 } \Omega\text{– 封闭}\}.$$

性质 1.2.1[5] 对映射 $\Phi: 2^S \to 2^S$,存在 S 上的规则集 Ω_Φ,

$$\Omega_\Phi = \{(X, x) \mid X \subseteq S, x \in S, x \in \Phi(X)\}.$$

使得 $I(\Omega_\Phi)$是 Φ的最小不动点.

不动点是最简单的周期点.事实上,对任意一个序数 σ可以定义

$$\Phi^{(0)}=\varnothing,\quad \Phi^{(\sigma)}=\bigcup_{\tau<\sigma}\Phi^{\tau},\quad \Phi^{\sigma}=\Phi(\Phi^{(\sigma)}),\quad \Phi^{\infty}=\bigcup_{\sigma}\Phi^{\sigma},$$

使得 Φ^{∞}是 Φ的最小不动点.在自然推理系统中,空集表示以公理为前提的推理规则,因而 Φ^{∞}是公理前提集的“极限集”.

集射系统(S,Φ)太广泛,在研究中希望限定 S 的结构.集合 S 的基本结构有三类:序结构、代数结构和拓扑结构.

首先,设集合 S 关于序关系“$\leqslant$”构成 一个偏序集$(S,\leqslant)$,其中任意两个元素 a 和 b 都有公共下确界和上确界,在 S 上 定义运算$\wedge$和$\vee$为

$$a\wedge b=\inf(a,b),\quad a\vee b=\sup(a,b),$$

则$(S,\wedge,\vee)$是一个格.设 L_1 和 L_2 是格,称映射 $f:L_1\to L_2$ 是单调的,若

$$x\leqslant y\Rightarrow f(x)\leqslant f(y),\quad \forall x,y\in L_1,$$

记单调映射的集合为 F,称映射 $\tau:F\to F$ 为 F 上的泛函.当 $f,g\in F$,且

$$f(x)\leqslant g(x),\quad \forall x\in L_1$$

时,称 $f\leqslant g$,于是,可类似地定义单调泛函.称泛函 τ是连续的,若 τ是单调的,且对 F 中的任何链$\{f_i\}$,有

$$\tau[\sup\{f_i\}]=\sup\{\tau[f_i]\},$$

其中 sup 表示上确界.于是,有如下性质.

性质 1.2.2[6] 任何连续泛函 τ均有一个最小不动点.

证明 设 Ω是处处无定义函数,由 τ的单调性,使函数序列

$$\Omega,\tau[\Omega],\tau^2[\Omega],\cdots$$

构成一个链,故上确界 $tau=\sup\{\tau^k[\Omega]\}$必然存在.不难证明,$tau$ 是 τ的一个最小不动点.

显然,τ满足本节条件 H1 和 H2,使(F,τ)是一个动力系统.格上泛函的不动点理论,是理论计算机科学程序理论中形式语义的一个数学基础.

其次,设集合 S 上定义了一组运算 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,其运算的结果仍是 S 中的元素,则称 S 对于这 n 个运算构成一个代数.前面由偏序关系引出的格,就是一个代数结构.下面,设 S 是 Galois 域

$$GF(23)=\{[k]\mid k=0,1,\cdots,22\},$$

$$[k]=\{a\in\mathbf{Z}\mid a\equiv k\bmod 23\},$$

同样,$GF(23)$是代数结构.取 $5\in GF(23)$,定义 $f:GF(23)\to GF(23)$为

$$f^n(k)=5^n k\bmod 23,\quad k\in GF(23),$$

并记$f^n(k)=k_n$.于是,得到动力系统$(GF(23),f)$,且过任一点$k\in GF(23)$的轨道$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$是周期轨道,例如过点 $k=1$的轨道的周期是22.Galois域

$GF(p)$上的代数性质,在密码学中有重要应用[7].

其三,讨论 S 具有拓扑结构的情况,仍以形式系统为例.

设 Γ 是一阶语言 L 理论 T 全体非逻辑公理的集合,记

$$I = S_\omega(\Gamma) = \{A \in 2^\Gamma \mid \text{card}(A) < \infty\},$$

$D \subseteq 2^I$ 是 I 上的一个滤集,记

$$\tau_I = D \cup \{\varnothing\},$$

则(I, τ_I)是以 τ_I 为拓扑的拓扑空间.对于 $i \in I$, T_i 是以 i 为非逻辑公理的理论,$\mathscr{A}_i$ 是 T_i 的一个模型.记 $T = \{T_i \mid i \in I\}$和 $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$分别是一个理论族和一个模型族.于是由$(I, \tau_I)$可以导出与其同胚的拓扑空间$(T, \tau_T)$和$(\mathscr{A}, T_{\mathscr{A}})$.一般记$(X, \tau_X)$和$(Y, \tau_Y)$是由$(I, \tau_I)$导出的 T_j($j=0,1,2$)拓扑空间,u_0 表示选择最小邻域的选择函数,那么在(X, τ_X)中可引入偏序,称 $x \leqslant x^*$,若 $x^* \in u_0(x) \in \tau_X$;类似地,在$(Y, \tau_Y)$中引入偏序.记 F 是 X 到 Y 的全体单调算子的集合.在 F 中引入拓扑基

$$u(f) = \{g \mid g \in F, g(x) \in u_0(f(x)), \forall x \in X\},$$

其中 $u(f)$表示 F 的邻域.于是,在 F 上可导入拓扑,从而有如下结论.

性质 1.2.3[8] 若单调泛函 $\tau: F \to F$ 是上确界可达的,则 τ 在 F 上存在一个最小不动点.

例 1.2.1 设 $I = \{\perp, 0, 1, \cdots, n\}$,其中符号$\perp$表示无定义,$u_0(j) = \{j, j+1, \cdots, n\}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $u_0(\perp) = I$,于是有序关系$\perp \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant \cdots \leqslant n$.定义 $f: I \to I$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x \leqslant 1, \end{cases}$$

显然 f 是单调函数,定义泛函 $\tau: F \to F$ 为

$$\tau^k[\Omega] = f^k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

于是有

$$\cdots \leqslant \tau^m[\Omega](x) \leqslant \cdots \leqslant \tau^2(x)[\Omega] \leqslant \tau[\Omega](x), \quad \forall x \in I,$$

记 $g(x) = f^2(x)$,有

$$\tau[g](x) = \tau[f^2](x) = \tau^3[\Omega](x) = g(x), \quad \forall x \in I,$$

即 $g(x)$是 τ 的不动点.

一般而言,由超滤集引入的拓扑是 T_0 或 T_1 空间,其拓扑刻画还不够精细.具有可数基的 T_3 空间(正则的 T_1 空间),是可度量化的拓扑空间.而在度量空间上建立的拓扑动力系统,具有丰富的性质,这正是下面章节所要研究的主要对象.但并不是每个拓扑空间都可度量化,拓扑空间可度量化,当且仅当它是具有 σ 局部有限基的 T_3 空间[9].

由前面的讨论可知,由拓扑空间的拓扑结构,可引入序关系,即具有序结构,但对代数结构而言并不是所有的拓扑空间都有线性的代数结构,即是线性空间.在有线性结构的度量空间中,有的还可以引入范数使该范数所规定的度量就是原度量空间中的度量,而成为赋范空间.显然,赋范空间是可度量化的线性拓扑空间,但并不是每个度量空间都能按所规定的距离成为赋范空间[10].在微分动力系统中,双曲不动点的结构稳定性是在非线性泛函分析的框架内进行讨论的.同样,在这一框架内还可以讨论无穷维动力系统.

讨论双曲不变集的结构稳定性时,往往不可能在一个整体的欧氏空间中进行,而必须在流形中进行讨论.流形是“局部欧氏”的,即在其每一点的附近与欧氏空间(或欧氏空间中的开集)同胚.于是,有必要准备微分拓扑的工具.

架构在上述空间上的动力系统,是确定性动力系统.如果在概率空间或模糊拓扑空间上建立动力系统,就分别为随机动力系统和模糊动力系统.后面章节仅适当涉及随机动力系统的基本概念.

§1.3 动力系统的复杂性

动力系统底空间的不同结构使得动力系统的类型是多样的,而底空间上映射的非线性性质又使得动力系统的大范围性状是复杂的.尤其是 20 世纪 60 年代以来,随着计算数学和计算机技术的发展,采用数值模拟的计算可视化方法,得到了许多令学界惊叹不已的发现,如分歧(或分支、分岔)(bifurcation)、混沌(chaos)、孤立子(soliton)和分形(fractal)等,极大推动了动力系统的研究及其在非线性科学研究中的应用,同时数值分析方法(数值实验、数值模拟、数值仿真、数值发现等)也成为一种重要的研究方法。

首先讨论区间自映射的分支现象.设 $I\subset\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个区间,$x_0\in I$ 是区间自映射 $f:I\to I$ 的不动点.当 $|f'(x_0)|\neq 1$ 时,x_0 是 f 的双曲不动点,f 在 x_0 点附近是结构稳定的.下面,讨论 Logistic 函数族在非双曲不动点 x_0,即 $|f'(x_0)|=1$ 的情况.

例 1.3.1 Logistic 函数族

$$f(x)=f(x,\lambda)=\lambda x(1-x)$$

的分支[11].考虑迭代

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_n\in I=[0,1],\quad n=1,2,\cdots$$

在 I 中的周期点,其中 $\lambda\in[0,4]$.当 $n=1$ 时,f 在 I 中的非平凡 1 周期点(不动点)$x_1^{(1)}=1-1/\lambda$,当 $1<\lambda<3$ 时,是稳定不动点,即在 f 迭代作用下吸引它附近的点;而当 $\lambda>3$ 时,是不稳定不动点,即在 f 迭代作用下排斥它附近的点,$\lambda_1=3$ 是失稳的临界值,又称分支点.同时,在 $\lambda_1=3$ 附近

$$f^2(x) = f\circ f(x) = \lambda(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x))$$

有两个稳定的不动点

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda\pm\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}),$$

即 f 的 2 周期稳定点,其分支点 $\lambda_2=1+\sqrt{6}=3.449\cdots$.依次下去,每个 2 周期点失稳后又产生两个稳定的 4 周期点……这种现象称为倍周期分支,其分支点序列$\{\lambda_n\}$满足

$$f^{2^{n-1}}(x^*,\lambda_n) = x^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{2^{n-1}}(x^*,\lambda_n) = -1.$$

其著名的分支图似乎首先由 May[12]给出.并且,$\{\lambda_n\}$有如下性质:

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 3.569945672\cdots$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = \delta = 4.669201609\cdots$.

其中常数 δ 称为费根鲍姆常数,它与区间上光滑自映射函数族的具体形式无关。

Logistic 映射的迭代模型,描述了非世代重叠的昆虫逐年种群量,而作为最早发现的混沌模型,是 Lorenz 模型.

例 1.3.2　Lorenz 模型

$$\begin{cases}\dot{x} = a(y-z),\\ \dot{y} = bx-y-xz,\\ \dot{z} = cz+xy.\end{cases}$$

轨线的计算机程序.如下程序给出了 Lorenz 曲线图.

```
#include <graphics.h>
# define Xunhuan_factor 40000
# define Zoom_factor 9
float a=10,b=28,c=-2.66667;

float xdot(float x,float y,float z){return(a*(y-x));}
float ydot(float x,float y,float z){return(b*x-y-x*z);}
float zdot(float x,float y,float z){return(c*z+x*y);}

main()
    {
    float x=1,y=1,z=1,dt=0.001,flag=0,dx,dy,dz;
    int gdriver=DETECT,gmode;
```

```
registerbgidriver(EGAVGA_driver);
initgraph(&gdriver,&gmode,"");
setbkcolor(BLACK);
cleardevice();

while(flag<=Xunhuan_factor)
      {
      putpixel(x*Zoom_factor+320,480-z*Zoom_factor,RED);
      dx=xdot(x,y,z)*dt;
      dy=ydot(x,y,z)*dt;
      dz=zdot(x,y,z)*dt;
      x=x+dx; y=y+dy; z=z+dz;
      flag++;
      }
getch();
closegraph();
}
```

说明:Xunhuan_factor 控制循环次数,即描点个数,Zoom_factor 控制图形大小.

Lorenz 模型是不含任何外在随机因素的确定性模型,其长时间行为对初始的微小变化十分敏感,具有“内在随机性”.非线性系统除了混沌、奇怪吸引子现象外,另一类现象却表现出内秉的保守和对称性质,如孤立波[13,14].

1834 年,英国造船工程师 J.S.Russell[15]在 Edinburg 附近一条狭窄的运河中观察到孤立波现象.60 年后,瑞典 Amsterdam 大学的 D.J.Korteweg 教授和他的学生 G.de Vries[16]在 1895 年提出了流体中单向波传播的数学模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

即通常所说的 KdV 方程.又沉寂 60 多年后,在 20 世纪 60 年代初期,利用计算机数值实验技术,出现了几次对该类问题的重要研究.1965 年,N.J.Zabusky 和 M.D.Kruskal[17]把 KdV 方程用于等离子体波的研究,首次用孤立子(soliton)一词描述孤立波的粒子行为.后来,人们发现了孤立波对应于常微分方程所描述的某些动力系统中的同(异)宿轨道,进而发现与涡旋、湍流的联系[18].通过一大类非线性演化方程的研究,同时也推动了无穷维动力系统理论的发展.

分支、混沌是动力系统的时间演化行为,反映出系统的动力学复杂性.这

里,拓扑熵和 Liapunov 指数是描述动力学复杂性的重要概念.此外,奇怪吸引子、湍流的结构是动力系统的空间复杂性,分形[16,17]是描述这类空间复杂性的重要概念.同时,结构与随机,无论是概率空间上的随机现象,还是确定性系统的内在随机性,又伴生而交织,更使非线性动力系统的时空性状更加复杂.

本书围绕这一主题,介绍基本的数学工具和方法.

第二章　拓扑动力系统

拓扑动力系统是拓扑空间上的一个单参数同胚变换群,其一般理论的研究始于 20 世纪初 G.D.Birkhoff 等人的工作[4,19,20].本章在拓扑空间上引入动力系统的概念,并通过紧致度量空间上极限点集,非游荡点集和拓扑熵等概念,着重讨论轨道的渐近行为,以及轨道在拓扑空间中的稠密性和混沌(chaos).考虑到一维拓扑流形的分类,给出了线段和圆周上自映射的动力学性质.

§2.1　拓扑动力系统

用 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Z}$ 分别表示实数集和整数集按通常加法构成的实数拓扑加群和整数拓扑加群,X 和 Y 分别表示拓扑空间.

定义 2.1.1　设 $G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$,$X$ 是一拓扑空间,称连续映射 $\varphi: G\times X\to X$ 为 X 上的一个 拓扑动力系统,若 φ 满足:

(1) $\varphi(0,x)=x$,　$\forall\, x\in X$.

(2) $\varphi(t+s,x)=\varphi(t,\varphi(s,x))$,　$\forall\, t,s\in G, x\in X$.

此时,空间 X 又称为相空间,φ 也简称为动力系统.

有时,为了指明相空间,又将动力系统记为(X,φ).特别当是 X 是 C^r 微分流形且 φ 是 C^r 映射($r\geqslant 1$)时,则称 φ 是一个 C^r微分动力系统.

当 $G=\mathbf{R}$ 时,称动力系统 φ 是 X 上的流;如果 φ 又是 C^r 微分动力系统,则称 φ 是 C^r 流.当 $G=\mathbf{Z}$ 时,称动力系统 φ 是 X 上的离散动力系统.

对 X 上的动力系统φ和任一$t\in G$,可定义映射 $\varphi^t: X\to X$ 为 $\varphi^t: x\mapsto\varphi(t,x)$.显然 φ^t 具有连续逆映射 φ^{-t},因而 φ^t 是 X 到 X 的一个同胚,且满足:

(1) $\varphi^0=id$.

(2) $\varphi^{t+s}=\varphi^t\circ\varphi^s$,　$\forall\, t,s\in G$.

其中 id 表示恒同映射,$\varphi^t\circ\varphi^s$ 表示复合映射.于是,有如下命题成立.

命题 2.1.1　φ是拓扑动力系统的充要条件是拓扑空间 X 上的同胚映射簇$\{\varphi^t\mid t\in G\}$按复合运算“$\circ$”构成加群$(\{\varphi^t\mid t\in G\},\circ)$.

由此可知,拓扑空间 X 上的一个动力系统实质上是一个单参数的同胚变换群.于是有如下与定义 2.1.1 等价的定义.

定义 2.1.2　设 $G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$,连续映射 $\varphi: G\times X\to X$ 称为拓扑动力系统,

若$\{\varphi^t \mid t\in G\}$是映 X 至 X 的同胚映射簇且按复合运算构成加群;若 $G\in\{\mathbf{R}_+,\mathbf{Z}_+\}$时,$\{\varphi^t \mid t\in G\}$按复合运算构成半群,则称 φ为半动力系统.

不言而喻,非负实数集 $\mathbf{R}_+$ 和非负整数集 $\mathbf{Z}_+$ 按通常加法构成半群.下面不特别指明 $G\in\{\mathbf{R}_+,\mathbf{Z}_+\}$时,则指 $G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$.

例 2.1.1 设$\forall t\in G$,$\varphi^t = id: X\to X$ 则 φ是一动力系统,称之为平凡力系统.

例 2.1.2 设X是圆心在点(0,1)处的单位圆周,与实数轴$\mathbf{R}$相切于原点O处,用$S=O$和$N=(0,2)$分别表示圆周上的南极点和北极点.设$x\in X\setminus\{N\}$延长弦 Nx 与 $\mathbf{R}$ 交于 r 处,于是得 $X\setminus\{N\}$与 $\mathbf{R}\setminus\{\pm\infty\}$的一一的映射 $g: x\mapsto r$.定义 $f: X\to X$ 为

$$f(x)=\begin{cases} y, & x\in X\setminus\{N\},\text{使 } g(y)=\dfrac{1}{2}g(x), \\ N, & x=N, \end{cases}$$

则 f 是 X 上的离散动力系统,称 f 为北极映射.

例 2.1.3 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义等价关系“$\sim$”:

$$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in\mathbf{Z}^n,$$

称商空间 $T^n=\mathbf{R}^n/\sim$为 n 维环面.在 $\mathbf{R}\times T^2$ 上定义 $\varphi:\mathbf{R}\times T^2\to T^2$ 为

$$\varphi(t,([x],[y]))=([x+t],[y+\theta t]),\quad \forall t\in\mathbf{R},([x],[y])\in T^2.$$

当 θ为有理数时,称 φ为有理流,每条轨道是拓扑圆;当 θ为无理数时,称 φ为无理流,每条轨道是 $\mathbf{R}$ 在连续单射下的像且在 T^2 上稠.

例 2.1.4 对固定的 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,同胚 $f: T^2\to T^2$ 定义为 $f(([x],[y]))=([x+\alpha],[y+\beta])$,由此导出一离散动力系统.称为环面 T^2 上的旋转映射.

注 2.1.1 流和离散动力系统的关系.对拓扑空间 X 上的一个流 φ,将 G 限制在Z上,就得到一个离散的动力系统,此时称该离散动力系统嵌入于流 φ.反之,设 $f: X\to X$ 是同胚映射,由命题 2.1.1 知(X,f)是一离散动力系统.对任一离散动力系统 f,是否存在 X 上的一个流 φ,使 f 嵌入 φ呢?一般来讲,不一定有肯定的结论;但是,通过扭扩(suspension)的办法,可以将 f 嵌入到高一维流形上的流中.具体的作法如下:

设 X 是一个 m 维的 C^r 流形,$f: X\to X$ 是 C^r 同胚,在积流形 $\mathbf{R}\times X$ 上定义一个单位向量场,方向同于 $\mathbf{R}$ 的方向,由于紧致 $C^r(r\geqslant 1)$微分流形 X 上的一个 C^r 向量场,总能产生 X 上的一个 C^r 流,故该单位向量场在 $\mathbf{R}\times X$ 上可产生一个 C^r 流 φ满足

$$\varphi^t((s,x))=\varphi(t+s,x),\quad \forall x\in X,s,t\in\mathbf{R}.$$

在 $\mathbf{R}\times X$ 上定义关系“$\sim$”:

$$(t,x)\sim(s,y)\Leftrightarrow t-s\in\mathbf{Z},\quad y=f^{t-s}(x)$$

显然是等价关系.作商空间 $\widetilde{X}=\mathbf{R}\times X/\sim$,它是一个 $m+1$ 维的 C^r 流形.记 $\widetilde{X}$ 中的元素为

$$[(t,x)]=\{(s,y)\in\mathbf{R}\times X\mid(s,y)\sim(t,x)\},$$

于是 $\mathbf{R}\times X$ 上的 C^r 流 φ 诱导出 $\widetilde{X}$ 上的 C^r 流 $\widetilde{\varphi}$:

$$\widetilde{\varphi}^s([(t,x)])=[(t+s,\varphi(t+s,x))].$$

直观上,流 $\widetilde{\varphi}$ 是从横截面$\{0\}\times X/\sim$上任一点 x 出发而返回$\{0\}\times X/\sim$的轨道簇,其第一次返回的点恰为 $f(x)$,即 f 是流 $\widetilde{\varphi}$ 在该横截面上的首次返回映射(Poincaré 映射).例如,当 X 是单位圆,而 f 是关于 x 轴的对称变换时 $\widetilde{X}$ 就是一个 Klein 瓶.

由于流和同胚映射的如此关系,下面着重介绍离散动力系统.

定义 2.1.3 设(X,f)是紧致系统,若紧子集 $X_0\subset X$ 满足 $f(X_0)\subset X_0$,则 f 在 X_0 上的限制

$$f|_{X_0}:X_0\to X_0$$

所生成的紧致系统$(X_0,f|_{X_0})$称为(X,f)的子系统.

定义 2.1.4 设 $f:X\to X$ 和 $g:Y\to Y$ 分别是拓扑空间 X 和 Y 上的自同胚,若存在同胚映射 $h:X\to Y$ 使 $h\circ f=g\circ h$,则称同胚 f 与 g 是拓扑共轭的,而同胚 h 称之为 f 到 g 的一个拓扑共轭.

定义 2.1.5 称动力系统(X,φ)和(Y,ψ)是拓扑等价的,若存在同胚 $h:X\to Y$ 使 $h(\varphi(t,x))=\psi(s(t),h(x))$,其中 $s(t)$是 t 的严格单增函数,又称同胚 $h:X\to Y$ 是动力系统(X,φ)和(Y,ψ)的拓扑等价.

显然,拓扑共轭和拓扑等价均是等价关系.在两个拓扑等价的动力系统上,存在一个同胚映射将一个的一条轨道保持方向地映成另一个的一条轨道.

例 2.1.5 在例 2.1.3 中定义的有理流都是拓扑等价的.

证明 对任一 $\theta\in\mathbf{R}$,记例 2.1.3 中定义的 φ 为 φ_θ,下证 φ_θ 与 φ_0 是拓扑等价的.设 p,q 互质且 $p>0$,$\theta=q/p$,由数论知存在正整数 r,s 使

$$\begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}=1 \text{ 或 } -1,$$

故 $h=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}:T^2\to T^2$ 是同胚映射.于是由

$$\begin{aligned}h(\varphi_0(t,([x],[y])))&=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [x+t] \\ [y] \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} [px+ry+pt] \\ [qx+sy+qt] \end{pmatrix}=\varphi_\theta(pt,h([x],[y]))\end{aligned}$$

知 φ_θ 与 φ_0 是拓扑等价的,由 θ 的任意性,故所有的有理流都是拓扑等价的.

定义 2.1.6 设 $f:X\to X$ 是一个同胚,称集合

$$\mathrm{Orb}(x)=\{f^k(x)\mid k\in\mathbf{Z}\},$$
$$\mathrm{Orb}^+(x)=\{f^k(x)\mid k\in\mathbf{Z}_+\},$$
$$\mathrm{Orb}^-(x)=\{f^{-k}(x)\mid k\in\mathbf{Z}_+\}$$

分别为离散动力系统 f 过点 x 的轨道，正半轨道和负半轨道.

当需要特别指明 f 时，用 $\mathrm{Orb}_f(x)$等代替 $\mathrm{Orb}(x)$等.

命题 2.1.2 拓扑共轭或拓扑等价 h 是保源，保汇，保轨道的.

证明 仅证拓扑共轭是保轨道的.设同胚 f 和 g 的轨道分别为 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 和 $\mathrm{Orb}_g(y)$.由 $h\circ f=g\circ h$ 有

$$h\circ f^k=g\circ h\circ f^{k-1}=g^k\circ h,$$

可知

$$h(\mathrm{Orb}_f(x))=\mathrm{Orb}_g(h(x)),$$

故拓扑共轭 h 是保轨道的. □

§2.2 轨道渐近性

轨道，是动力系统研究的基本对象.本节介绍轨道的不变性质，包括回复性和渐近性.

定义 2.2.1 设 $f:X\to X$，若 $x\in X$ 时，存在 $n\in\mathbf{N}$ 使 $f^n(x)=x$，则称 x 为 f 的周期点，过周期点的轨道称为周期轨道；如果

$$f^k(x)=x,\quad f^m(x)\neq x,\quad m=1,2,\cdots,k-1,$$

则称 k 为 x 的周期；特别，当 $k=1$ 时，点 x 称为 f 的不动点.f 的周期点集合和不动点集合分别记为 $\mathrm{Per}(f)$和 $\mathrm{Fix}(f)$.

自然，一条轨道为周期轨道的充分必要条件是它为有限轨道.

例 2.2.1 设(X,f)是平凡动力系统，则 $\mathrm{Per}(x)=\mathrm{Fix}(f)=X$.

例 2.2.2 设 $f:X\to X$ 是北极映射，则 $\mathrm{Fix}(f)=\{N,S\}$.

例 2.2.3 设旋转动力系统 $f:T^2\to T^2$ 定义如例 2.1.4，当 α 和 β 皆为有理数时，每一轨道只有 m 个点，故 $\mathrm{Per}(f)=T^2$ 且周期为 m.

定义 2.2.2 设 $x\in X$，若 $f:X\to X$ 连续，称

$$L_\omega(x)=\bigcap_{n\in N}\overline{\{f^k(x)\mid k\geqslant n\}}$$

为轨道 $\mathrm{Orb}(x)$的 ω 极限点集，而称 $L_\omega=\bigcup_{x\in X}L_\omega(x)$为 f 的 ω 极限集，若 $f:X\to X$ 同胚，称

$$L_\alpha(x)=\bigcap_{n\in N}\overline{\{f^{-k}(x)\mid k\geqslant n\}}$$

为轨道 $\mathrm{Orb}(x)$的 α 极限点集，而称 $L_\alpha=\bigcup_{x\in X}L_\alpha(x)$和 $L=L_\omega\cup L_\alpha$ 分别为 f 的 α 极限集和极限点集；若 f 连续但不同胚，则称 $L=L_\omega$ 为 f 的极限点集.

有时也记 L_ω 和 L_α 为 $L_\omega(f)$和 $L_\alpha(f)$.

注 2.2.1　定义 2.2.2 中的 $L_\omega(x)$和 $L_\alpha(x)$又可表示为

$$L_\omega(x)=\{y\in X \mid \exists\, n_j\nearrow+\infty \text{ 使 } f^{n_j}(x)\to y\},\tag{2.2.1}$$

$$L_\alpha(x)=\{y\in X \mid \exists\, n_j\nearrow+\infty \text{ 使 } f^{-n_j}(x)\to y\},\tag{2.2.2}$$

其中 $n_j\nearrow+\infty$表示 n_j 严格递增,$L_\omega(x)$和 $L_\alpha(x)$分别表示 f 的正半轨道和负半轨道的极限点集.

定义 2.2.3　若 $E\subset X$ 且 $f(E)=E$,则称 E 为 f 的不变集.

命题 2.2.1　集 $E\subset X$ 为 f 的不变集的充要条件是

$$y\in E\Rightarrow \mathrm{Orb}(y)\subset E.$$

证明　首先,设 $y\in E$,由 $f(E)=E$ 有 $f^k(y)\in f^k(E)=E$,故 $\mathrm{Orb}(y)\subset E$.反之,由 $\mathrm{Orb}(y)\subset E$,有 $f(y)\in E$ 和 $f^{-1}(y)\in E$,故 $f(E)=E$.　□

容易证明如下命题.

命题 2.2.2　集 $\mathrm{Orb}_f(x)$,$\mathrm{Per}(f)$和 $\mathrm{Fix}(f)$是映射 f 的不变集.

命题 2.2.3　设 $f:X\to X$ 同胚,对任一 $x\in X$,有 $L_\omega(x)$和 $L_\alpha(x)$是闭集;更若 X 是紧致拓扑空间,则 $L_\omega(x)$和 $L_\alpha(x)$非空且是 f 的不变集.

证明　f 的 α 极限点集是 f^{-1}的 ω 极限点集,故仅对 $L_\omega(x)$进行证明.

由定义 2.2.2 知 $L_\omega(x)$是闭集,且由 X 的紧性知 $L_\omega(x)\neq\varnothing$.下面利用(2.2.1)式证 $L_\omega(x)$是 f 的不变集.由 f 的连续性,显然有 $f(L_\omega(x))\subseteq L_\omega(x)$,故只须证

$$L_\omega(x)\subseteq f(L_\omega(x)).\tag{2.2.3}$$

任取 $y\in L_\omega(x)$,$\exists\, n_i\nearrow+\infty$使 $f^{n_i}(x)\to y$.由 X 的紧性,在集合$\{f^{n_i-1}(x)\}$中有收敛子列,不妨就记为$\{f^{n_i-1}(x)\}_{i=1}^{\infty}$.于是,存在 $z\in X$,使

$$f^{n_i-1}(x)\to z,\quad i\to+\infty,$$

故 $z\in L_\omega(x)$且 $f^{n_i}(x)\to f(z)$,由极限的唯一性知 $y=f(z)$,即 $y\in f(L_\omega(x))$,从而(2.2.3)式成立.　□

命题 2.2.4　设同胚 h 是动力系统(X,φ)到(Y,ψ)的拓扑等价,则

$$h(L_\omega^\varphi(p))=L_\omega^\psi(h(p)),\quad \forall\, p\in X,$$

其中 $L_\omega^\varphi(p)$和 $L_\omega^\psi(h(p))$分别是动力系统 φ 和 ψ 的 ω 极限集.

证明留作习题.　□

对 α 极限集,亦有类似结论.

定义 2.2.4　设 $f:X\to X$ 连续,点 $x\in X$ 称为是 f 的游荡点,如果存在 x 的邻域 U,使得 $f^{-n}(U)(n\geqslant 0)$是两两不交的.如果点 $x\in X$ 不是游荡点,则称为非游荡点.其集合称为 f 的非游荡点集,记作 $\Omega(f)$.

注 2.2.2　用 U_x 表示 x 的邻域,则

$$\Omega(f)=\{x\in X\mid \forall U_x,\exists k\in\mathbf{N}\text{ 使 }f^{-k}(U_x)\cap U_x\neq\varnothing\}. \tag{2.2.4}$$

注 2.2.3　若 $f:X\to X$ 同胚,则

$$\Omega(f)=\{x\in X\mid \forall U_x,\exists k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}\text{ 使 }f^{k}(U_x)\cap U_x\neq\varnothing\}, \tag{2.2.5}$$

显然

$$f^{-k}(U)\cap U\neq\varnothing\Leftrightarrow U\cap f^{k}(U)\neq\varnothing.$$

定理 2.2.1　设 X 是紧致拓扑空间,$f:X\to X$ 连续,则

(1) $L_\omega(f)\subseteq\Omega(f)$,故 $\Omega(f)\neq\varnothing$.

(2) $\Omega(f)$是闭集.

(3) $f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$;若 f 是同胚,则 $L_\alpha(f)\subseteq\Omega(f)$且 $f(\Omega(f))=\Omega(f)$.

证明　首先证结论(1).当 X 紧致时 $L_\omega(f)\neq\varnothing$,任取 $y\in L_\omega(f)=\bigcup_{x\in X}L_\omega(x)$,应存在 $x\in X$ 使 $y\in L_\omega(x)$.于是对 y 的任一邻域 U,存在 m, $k\in\mathbf{N}$, $m>k$ 使

$$f^m(x),f^k(x)\in U,$$

从而

$$f^{-(m-k)}(U)\cap U\neq\varnothing,$$

故 $y\in\Omega(f)$,结论(1)成立.

其次,证结论(2).只需证游荡点集 $X\setminus\Omega(f)$是开集.设 $x\in X\setminus\Omega(f)$则存在 x 的邻域 U_x 使

$$f^{-n}(U_x)\cap f^{-m}(U_x)=\varnothing,\quad \forall n,m\in\mathbf{Z}_+,n\neq m.$$

任取 $x'\in U_x$ 则存在 $U_{x'}\subset U_x$,使

$$f^{-n}(U_{x'})\cap f^{-m}(U_{x'})=\varnothing,\quad \forall n,m\in\mathbf{Z}_+,n\neq m,$$

即 x'是游荡点,U_x 是游荡点集,于是

$$X\setminus\Omega(f)=\bigcup_{x\in X}U_x$$

是开集,故 $\Omega(f)$是闭集.

最后,证结论(3).任取 $x\in\Omega(f)$,再任取 $f(x)$的一个邻域 U,由 f 的连续性知 $f^{-1}(U)$是 x 的一个邻域.由(2.2.4),存在 $n\in\mathbf{N}$ 使

$$f^{-n}(f^{-1}(U))\cap f^{-1}(U)\neq\varnothing,$$

从而

$$f^{-n}(U)\cap U\neq\varnothing,\quad \exists n\in\mathbf{N},$$

即 $f(x)\in\Omega(f)$,由 x 的任意性知 $f(\Omega(f))\subset\Omega(f)$.下设 $f:X\to X$ 同胚,由注 2.2.3 知 $\Omega(f^{-1})=\Omega(f)$.对 f^{-1}利用上证结论有

$$f^{-1}(\Omega(f^{-1}))\subset\Omega(f^{-1}),$$

从而

$$\Omega(f)\subset f(\Omega(f)),$$

故 $\Omega(f)$是 f 的不变集.　□

在非游荡点 x 的附近,总可以找到一点 a,其一段轨道$\{a, f(a),\cdots, f^k(a)\}$的终点 $f^k(a)$仍在 x 的附近.

定理 2.2.2　设 X 是紧度量空间,$f: X\to X$ 连续,则

$$\Omega(f)=\{x\in X \mid \forall\ U_x \text{ 及 } N>0, \exists\ n\geqslant N \text{ 使 } f^{-n}(U_x)\cap U_x\neq\varnothing\}.$$

证明　记上式右端子集为$\mathscr{A}$,显然$\mathscr{A}\subseteq\Omega(f)$,下证

$$\Omega(f)\subseteq\mathscr{A},\tag{2.2.6}$$

于是结论成立.对任一 $x\in\Omega(f)$及 $N>0$,如果 x 是 f 的周期点,显然 $x\in\mathscr{A}$;如果 x 不是 f 的周期点,对 x 的任意给定的一个邻域 U,取 $r>0$ 使球 $B(x, r)\subset U$,可以断言:$\exists\ \delta\in(0, r)$使

$$f^{-k}(B(x,\delta))\cap B(x,\delta)=\varnothing,\quad k=1,2,\cdots,N-1,\tag{2.2.7}$$

若其不然,对一切使$\frac{1}{n}<r$ 成立的 n,存在 x_n 与 $k_n\in\{1,2,\cdots,N-1\}$使

$$x_n\in f^{-k_n}\left(B\left(x,\frac{1}{n}\right)\right)\cap B\left(x,\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$x_n\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\to x,(n\to\infty);\tag{2.2.8}$$

$$f^{k_n}(x_n)\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)\to x,(n\to\infty).\tag{2.2.9}$$

由于 $k_n\in\{1,2,\cdots,N-1\}$对一切 $n>\frac{1}{r}$成立,故可选出子列$\{k_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$使 $k_{n_j}=k$,$1\leqslant k\leqslant N-1$,对一切 j 成立且 $n_j\to\infty$,$(j\to\infty)$,从而(2.2.9)式含有子列使

$$f^{k}(x_{n_j})\in B\left(x,\frac{1}{n_j}\right)\to x\quad(j\to\infty),$$

由 f 的连续性并联合(2.2.8)得 $f^k(x)=x$,与 x 不是 f 的周期点相矛盾,故断言(2.2.7)式成立.但 $x\in\Omega(f)$,故存在 $n\geqslant N$ 使

$$f^{-n}(B(x,\delta))\cap B(x,\delta)\neq\varnothing.$$

由于 $B(x,\delta)\subseteq U$,从而(2.2.6)成立.　□

注 2.2.4　若 X 是紧度量空间,$f: X\to X$ 同胚,由注 2.2.3 可知

$$\Omega(f)=\{x\in X \mid \forall\ U_x \text{ 及 } N>0, \exists\ n\geqslant N \text{ 使 } f^{n}(U)\cap U\neq\varnothing\}.$$

§2.3 轨道稠密性

本节通过极小性,传递性和混合性来讨论轨道在相空间中的稠密性问题.

定义 2.3.1 称动力系统 $f:X\to X$ 是极小的,如果对任一 $x\in X$,当 $f:X\to X$ 同胚时有 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 在 X 中稠;当 $f:X\to X$ 连续时有 $\mathrm{Orb}_f^+(x)$ 在 X 中稠.

例 2.3.1 北极映射导出的动力系统不是极小的,因为 $\mathrm{Orb}(N)$ 和 $\mathrm{Orb}(S)$ 在 X 中不稠.

例 2.3.2 旋转映射 $f:T^2\to T^2$

$$f(([x],[y]))=([x+\alpha],[y+\beta])$$

当 α 和 β 有理无关,即对 $\forall\, k_1,k_2\in\mathbf{Z}, k_1\cdot k_2\neq 0$ 使 $k_1\alpha+k_2\beta\neq 0$ 时,f 是极小的.

定义 2.3.2 动力系统 $f:X\to X$ 称为是拓扑混合的,如果对任意两个非空开集 $U,V\subset X$,存在 $N\in\mathbf{N}$ 当 $n>N$ 时有 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$.

较定义 2.3.1 和 2.3.2 弱的,是如下定义.

定义 2.3.3 称连续映射 $f:X\to X$ 为单边拓扑传递的,若存在 $x\in X$ 使 $\mathrm{Orb}^+(x)$ 在 X 内稠;若 $f:X\to X$ 同胚且存在 $x\in X$ 使 $\mathrm{Orb}(x)$ 在 X 内稠,则称 f 为拓扑传递的.

显然,f 的极小性可推出传递性.

例 2.3.3 在集合 $\left\{0,1,\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\,\middle|\, n\geqslant 2\right\}$ 上取 $\mathbf{R}$ 导出的拓扑,定义 $f:X\to X$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x=1,\\ \dfrac{1}{n+1}, & x=\dfrac{1}{n}, n\geqslant 2,\\ 1-\dfrac{1}{n-1}, & x=1-\dfrac{1}{n}, n>2.\end{cases}$$

取 $x\in X\setminus\{0,1\}$ 易知 $\mathrm{Orb}(x)$ 在 X 中稠,故是拓扑传递的.但是,f 不是单边拓扑传递的.

定理 2.3.1 设 X 是紧度量空间,$f:X\to X$ 同胚,则 f 为单边拓扑传递的充要条件是 f 拓扑传递,且 $\Omega(f)=X$.

证明 首先证必要性.设 f 是单边传递的,故存在 $x_0\in X$,使 $\mathrm{Orb}(x_0)$ 包含 X 中的稠子集 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$,从而 f 是拓扑传递的.下证 $\Omega(f)=X$.若其不然,X 中必有游荡点,于是存在非空开集 U 使 $\{f^n(U)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是两两不交的.

另一方面，由 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$在 X 中稠，应存在 $n_0\geqslant 0$ 使 $f^{n_0}(x_0)\in U$，从而

$$f^{n+n_0}(x_0)\in f^n(U),\quad n=0,1,\cdots$$

在轨道 $\mathrm{Orb}^+(x_0)$中剩下 n_0 个点 $x_0, f(x_0),\cdots, f^{n_0-1}(x_0)$要分别属于无穷多个两两不相交的开集 $f^{-m}(U)$，$m\in\mathbf{N}$，是不可能的；故 $\Omega(f)=X$ 成立.

再证充分性.显然，$f(X)=X$.按下面将证明的定理 2.3.3，对 X 中任意的非空开集 U 和 V，若存在 $k\geqslant 1$ 使

$$f^{-k}(U)\cap V\neq\varnothing \tag{2.3.1}$$

成立，则 f 是单边拓扑传递的.另一方面，由于 f 是拓扑传递的，利用下面的定理 2.3.2，应存在 $m\in\mathbf{Z}$ 使开集，

$$W=f^m(U)\cap V\neq\varnothing. \tag{2.3.2}$$

若 $m<0$，则取 $k=-m\geqslant 1$有(2.3.1)成立；否则，由 $\Omega(f)=X$及定理 2.2.2，应存在 $n\geqslant m+1>0$ 使

$$f^{-n}(W)\cap W\neq\varnothing,$$

代入(2.3.2)式定义的非空开集 W，自然有

$$f^{-(n-m)}U\cap V\neq\varnothing,$$

取 $k=n-m\geqslant 1$，上式即(2.3.1)成立，从而 f 是单边拓扑传递的. □

定理 2.3.2　设 X 是紧度量空间，$f: X\to X$ 同胚，则以下结论等价：

(1) f 是拓扑传递的.

(2)若 X 中的开集 U 是 f 的不变集，则 $U=\varnothing$，或者 U 在 X 中稠.

(3)对 X 中的任意非空开集 U 和 V，则存在 $n\in\mathbf{Z}$ 使

$$f^n(U)\cap V\neq\varnothing. \tag{2.3.3}$$

证明　(1)⇒(2)　设 f 是拓扑传递的，则存在 $x_0\in X$ 使 $\mathrm{Orb}(x_0)$在 X 中稠.于是，对 X 中的非空开集 U，存在 $n_0\in\mathbf{Z}$，使 $f^{n_0}(x_0)\in U$.再由(2)的条件 $f(U)=U$ 或 $U=f^{-1}(U)$，可知 X 中的稠子集

$$\mathrm{Orb}(x_0)=\{f^n(x_0)\mid n\in\mathbf{Z}\}\subset U,$$

故 U 在 X 中稠.

(2)⇒(3)　设结论(2)成立，且 U，V 是 X 中的非空开集，作 $B=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}f^n(U)$.于是 B 是 X 中 f 不变的非空开集，故在 X 中稠，应有

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}f^n(U)\cap V\neq\varnothing,$$

则存在 $n\in\mathbf{Z}$ 使 (2.3.3)成立.

(3)⇒(1)　设结论(3)成立，取紧度量空间 X 的可列基$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$，作集合

$$F_n=\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}f^m(U_n),\quad n=1,2,\cdots$$

显然 $F_n(n=1,2,\cdots)$是 f 不变的非空开集，且由(2.3.3)知其在 X 中稠.则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing .$$

否则,取其余集有

$$X = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus F_n .$$

上式左端的非空完备度量空间 X 为第二纲集(Baire-Hausdorff 定理),右端为可列个稀疏集 $X \setminus F_n$ 的并是第一纲集,二者矛盾,故断言成立.取 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,则存在 $m_n \in \mathbf{Z}$ 使

$$x_0 \in f^{m_n}(U_n), \qquad n = 1,2,\cdots$$

或

$$f^{-m_n}(x_0) \in U_n, \qquad n = 1,2,\cdots$$

即

$$\mathrm{Orb}(x_0) \cap U_n \neq \varnothing, \qquad n = 1,2,\cdots$$

而$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$是 X 的可列基,故对 X 中的任一非空开集 V 有

$$\mathrm{Orb}(x_0) \cap V \neq \varnothing,$$

即 $\mathrm{Orb}(x_0)$在 X 中稠,从而 f 是拓扑传递的. □

定理 2.3.3 设 X 是紧度量空间,$f: X \to X$ 是连续的满射,则下述结论等价:

(1)f 是单边拓扑传递的.

(2)对 X 中的任一开集 U,若 $f^{-1}(U) \subset U$,则 $U = \varnothing$,或者 U 在 X 中稠.

(3)对 X 中任意的非空开集 U 和 V,则存在 $n \in \mathbf{N}$ 使

$$f^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing. \tag{2.3.4}$$

证明 证(1)⇒(2) 只须证明结论(2)的等价命题:对 X 中的任一闭集 A,若 $A \subset f^{-1}(A)$则 $A = X$ 或者 A 是无处稠集.下设闭集 A 不是无处稠集,即存在 X 中的非空开集 U 使 $U \subset A$.由结论(1),存在 $x_0 \in X$,及 $k \geqslant 0$ 使

$$f^k(x_0) \in U \subset A,$$

从而

$$f^{k+1}(x_0) \in f(U) \subset f(A) \subset A,$$

由此归纳得

$$\{f^n(x_0) \mid n \geqslant k\} \subset A, \tag{2.3.5}$$

取其闭包有

$$\overline{\{f^n(x_0) \mid n \geqslant k\}} \subset A .$$

注意到$\overline{\mathrm{Orb}^+(x_0)} = X$,上式左端为

$$\overline{\{f^n(x_0) \mid n \geqslant k\}} = X - \{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\},$$

再代入上式,得

$$A \cup \{x_0, f(x_0), \cdots, f^{k-1}(x_0)\} = X.$$

用 f 作用该式 k 次,注意到 f 满足(2.3.5)式,可得 $A = X$,故结论(2)成立.

其余证明类似于定理 2.3.2 中的证明. □

由定理 2.3.2 立即得到如下定理.

定理 2.3.4 设 X 是紧度量空间,$f: X \to X$ 同胚,且拓扑混合,则 f 是拓扑传递的.

§2.4 线段自映射

设 $I = [0,1]$,$f: I \to I$ 连续,称系统(I, f)为线段连续系统,表示为$(I, f) \in C^0$.一个自然的问题是:如果 f 具有一个 k 周期点,那么 f 是否还有其他 $m \neq k$ 的周期点.1964 年乌克兰数学家沙尔可夫斯基(A.H.Шарковскии 或 Sarkovskii[21])发现了一个相当完美的结果,指出 f 的周期点的周期呈现出相当整齐的规律性.但这一结论长期鲜为外人所知,直到 1977 年斯捷凡(P.Stefan)[22]纠正原文一些不妥之处后用英文介绍出来为止.此前,1975 年华人李天岩在美国马里兰大学攻博期间与其导师 J.Yorke 发表了一篇震动学林的论文[23],第一次从数学上提出了混沌的精确定义.他们的工作引发了一维动力系统至今不衰的研究和蓬勃发展[24~28].

定义 2.4.1 称自然数集 **N** 的排列

$$\begin{aligned}
&3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \cdots \\
&\lhd 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 9 \lhd \cdots \\
&\lhd 2^2 \cdot 3 \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 7 \lhd 2^2 \cdot 9 \lhd \cdots \\
&\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \lhd 2^4 \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1
\end{aligned}$$

为 Sarkovskii 序,对 $\alpha \lhd \beta$ 称 β 在 α 之后(或 α 在 β 之前).

f 所有周期点的周期的集合,记为 $\mathrm{PP}(f)$.

定理 2.4.1 (Sarkovskii 定理) 设$(I, f) \in C^0$,若 $m \in \mathrm{PP}(f)$且 $m \lhd n$,则 $n \in \mathrm{PP}(f)$.

目前,已有不少 Sarkovskii 定理的简化证明,其中一种用图论方法作出的简洁证明被 L.Block,J.Guckenheimer,M.Misiurewicz 和 L.S.Young[29]给出,这里不再叙述.

由 Sarkovskii 定理直接得到如下推论.

推论 2.4.1　设$(I,f)\in C^0$，且$3\in PP(f)$，则对所有的$n\in\mathbf{N}$，有$n\in PP(f)$.　□

下面介绍 Li-Yorke 定理时，将给出推论 2.4.1 的一种直接的证明.

称I上的一个闭子区间为一个线段，记为J、K、L等，下面给出f作用其上的性质.

引理 2.4.1　$f(K)\supset L$的充要条件是，存在$J=[r,\delta]\subset K$，使$f(J)=L$且J是极小的，即不存在J的真子线段J_1使$f(J_1)=L$成立.

证明　充分性是显然的，下证必要性.设$f(K)\supset L$，记$L=[\sigma,\tau]$，故存在$\alpha,\beta\in K$使

$$f(\alpha)=\sigma,f(\beta)=\tau.$$

不妨设$\alpha<\beta$.记

$$r=\sup\{\zeta\in K\mid\zeta<\beta,f(\zeta)=\sigma\},$$
$$\delta=\inf\{\zeta\in K\mid\alpha<\zeta,f(\zeta)=\tau\}.$$

令$J=[r,\delta]$.由于连续映射f映线段(连通集)为线段，故J为所求.　□

引理 2.4.2　若$f(K)\supset K$，则存在$x\in \mathrm{Fix}(f)\cap K$.

证明　记$K=[\sigma,\tau]$，由引理2.4.1存在极小线段$J=[\alpha,\beta]\subset K$使$f(J)=K$，不妨设

$$f(\alpha)=\sigma\leqslant\alpha<\beta\leqslant\tau=f(\beta),$$

考虑连续函数$f(x)-x$在J的两端点α和β上的值

$$f(\alpha)-\alpha\leqslant0,\quad f(\beta)-\beta\geqslant0,$$

故存在$\zeta\in J$使$f(\zeta)-\zeta=0$，即结论成立.　□

引理 2.4.3　设线段序列$I_1,I_2,\cdots,I_n$满足条件$f(I_j)\supset I_{j+1}$，$j=1,2,\cdots,n-1$，$f(I_n)\supset I_1$，则存在$x\in\mathrm{Fix}(f^n)\cap I_1$使得$f^{j-1}(x)\in I_j$，$j=1,2,\cdots,n$.

证明　由引理2.4.1，归纳可证I_1内存在线段$J_1\supset J_2\supset\cdots\supset J_n$，使得$f^j(J_j)=I_{j+1}$，$j=1,\cdots,n-1$，而$f^n(J_n)=I_1\supset J_n$，据引理2.4.2，存在$x\in\mathrm{Fix}(f^n)\cap J_n$，由此可证结论成立.　□

f的任意一条三周期轨道总可以适当重新编号为下面两种情况之一：

$$x_0<x_1<x_2\quad\text{或}\quad x_0>x_1>x_2,$$

其中$x_1=f(x_0)$，$x_2=f(x_1)$.下面定理的条件比$3\in PP(f)$稍弱.

定理 2.4.2　设$(I,f)\in C^0$，若存在$x_0\in I$使得

$$x_3\leqslant x_0<x_1<x_2\text{ 或 }x_3\geqslant x_0>x_1>x_2,\tag{2.4.1}$$

其中$x_1=f(x_0)$，$x_2=f(x_1)$及$x_3=f(x_2)$，则$k\in PP(f)$，对任一$k\in\mathbf{N}$成立.

证明　设(2.4.1)第一式成立，又记$K_1=[x_0,x_1]$，$K_2=[x_1,x_2]$显然

$$f(K_1) \supseteq K_2, \quad f(K_2) \supseteq K_1 \cup K_2.$$

由引理 2.4.2,存在 $p \in \mathrm{Fix}(f) \cap K_2$,即 $k=1$ 时有 $k \in \mathrm{PP}(f)$.下设 $k>1$,作线段

$$I_k = K_1, \quad I_j = K_2, \quad j = 1,2,\cdots,k-1.$$

易知,其满足引理 2.4.3 的条件,故存在

$$p \in \mathrm{Fix}(f^k) \cap K_2, \quad \forall k > 1, \tag{2.4.2}$$

使得

$$f^{j-1}(p) \in I_j, \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{2.4.3}$$

下证 k 是点 p 的周期.首先,容易核验如下断言:如果点 p 有周期 $n \leqslant k$,那么

$$f^k(p) = p \Leftrightarrow p \text{ 的周期 } n \text{ 能整除 } k. \tag{2.4.4}$$

于是,当 $k=2$ 或 3 时,如果点 p 有小于 k 的周期,那么 $p \in \mathrm{Fix}(f)$. 再由(2.4.2)和(2.4.3)知

$$p \in K_1 \cap K_2 = \{x_1\},$$

这与条件 $f(x_1) = x_2 > x_1$ 矛盾.故 $k=2,3$ 时,有 $k \in \mathrm{PP}(f)$成立.于是,不妨设 $x_0 < x_1 < x_2$ 是 f 的三周期点.下证 $k>3$ 是点 p 的周期.

若其不然,存在 $s \in \mathbf{N}$,$s<k$ 是点 p 的周期.由(2.4.4)式,存在 $m \in \mathbf{N}$ 使 $k = s \cdot m$.记 $p_j = f^j(p)$,$j=1,2,\cdots,k-1$.于是轨道

$$p, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{k-1} \tag{2.4.5}$$

由 m 段 s 周期轨道 $p, p_1, \cdots, p_{s-1}$ 连接而成,从而 $p_{k-1} = p_{s-1}$.由(2.4.3)有 $p_{s-1} \in K_2$,$p_{k-1} \in K_1$,即

$$p_{k-1} \in K_2 \cap K_1 = \{x_1\},$$

亦即 $p_{k-1} = x_1$,从而 $p = x_2$,$p_1 = x_0$.当 $k>3$时,按(2.4.3),$p_1 \in K_2$,与 $x_0 \overline{\in} K_2$ 矛盾,故所设整数 s 是不存在的,从而 $k>3$ 时有 $k \in \mathrm{PP}(f)$. □

定理 2.4.2 是 Li-Yorke 定理的前一部分,下面介绍后一部分.前一部分是 Sarkovskii 定理的特款,但后部分却指出了周期三蕴涵混沌的重要事实.

定义 2.4.2　设(X,f)是紧致度量系统,d 是 X 的一个度量,称 f 在 X 上是混沌的,若存在不可数集合 $S \subset X$ 满足如下条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup d(f^n(x), f^n(y)) > 0, \quad \forall x, y \in S, x \neq y.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf d(f^n(x), f^n(y)) = 0, \quad \forall x, y \in S.$

其中,S 称为 f 的混沌集.

定义 2.4.3　设 d 是 X 的度量,称点 $x \in X$ 是 f 的渐近周期点,若

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0, \quad \exists p \in \mathrm{Per}(f)$$

成立.

命题 2.4.1 设(X,f)是紧致度量系统，d 为 X 上的一个度量，若 S 是 f 的混沌集，则 f 在 S 内至多只有一个渐近周期点.

证明 设 $x,y\in S$，$x\neq y$ 是 f 在 S 内的两个不同的渐近周期点，于是存在 $p,q\in \mathrm{Per}(f)$使

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x),f^n(p))=0; \tag{2.4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(y),f^n(q))=0. \tag{2.4.7}$$

若 $p=q$，则

$$0\leqslant d(f^n(x),f^n(y))\leqslant d(f^n(x),f^n(p))+d(f^n(p),f^n(y)),$$

联合(2.4.6)和(2.4.7)式与定义 2.4.2 的条件(1)矛盾.

若 $p\neq q$，记

$$\varepsilon=\min\{d(u,v)\mid u,v\in \mathrm{Orb}(p)\cup\mathrm{Orb}(q),u\neq v\}.$$

显然 $\varepsilon>0$，且可以证明

$$\inf(d(f^n(x),f^n(y)))\geqslant \varepsilon>0$$

与定义(2.4.2)的条件(2)矛盾，故命题结论成立. □

在介绍 Li-Yorke 定理中混沌集的存在性之前，先给出如下引理.

引理 2.4.4 设 $g\in C^0(I)$，而闭线段序列$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$满足条件

$$M_n\subset I,\quad M_{n+1}\subset g(M_n),\quad \forall\, n\in\mathbf{N},$$

则存在闭线段序列$\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$使

$$Q_{n+1}\subset Q_n\subset M_0,\quad g^n(Q_n)=M_n,\quad \forall\, n\in\mathbf{N},$$

且 $Q=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}Q_n$ 是单点集或闭线段，当 $x\in Q$ 时，$g^n(x)\in M_n$ 对任一 $n\in\mathbf{N}$ 成立.

证明 用数学归纳法据引理 2.4.1 可证. □

定理 2.4.3 设$(I,f)\in C^0$，若存在 $x_0\in I$使条件(2.4.1)成立，则在 $I\setminus\mathrm{Per}(f)$中存在混沌集 S 使

$$\limsup_{n\to\infty}|(f^n(x)-f^n(p)|>0,\quad \forall\, x\in S,p\in\mathrm{Per}(f) \tag{2.4.8}$$

成立，即 S 中不含 f 的渐近周期点.

证明 采用定理 2.4.2 中的记号，其中 $K_1=[x_0,x_1]$，$K_2=[x_1,x_2]$.由于

$$f^2(K_1)\supset f(K_2)\supset K_1,$$

$$f^2(K_2)\supset f(K_1)\supset K_2,$$

据引理 2.4.1，存在闭线段 $J_1\subset K_1$，$J_2\subset K_2$ 使

$$f^2(J_1)=K_1,\quad f^2(J_2)=K_2,\quad J_1\cap J_2=\varnothing,$$

于是

$$f^4(J_1)\cap f^4(J_2)\supset K_1\cup K_2\supset J_1\cup J_2. \tag{2.4.9}$$

令 $g=f^4$,只需对 g 证明定理的结论即可.

Step1　记

$$J_1=[\underline{m}_1,\overline{m}_1],\quad J_2=[\underline{m}_2,\overline{m}_2],$$

其中 $0\leqslant\underline{m}_1<\overline{m}_1<\underline{m}_2<\overline{m}_2\leqslant 1$.据引理 2.4.1 并利用(2.4.9)式,可归纳地证明:存在闭区间套

$$J_2\supset[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

使

$$g(a_0)=\underline{m}_2,\quad g(b_0)=\overline{m}_2,$$

$$g(a_{n+1})=a_n,\ g(b_{n+1})=b_n,\quad n=0,1,2\cdots$$

且存在 $\underline{m}_2<s<a_0$(或 $\overline{m}_2>s>b_0$),不妨设 $s<a_0$,使

$$g(s)\leqslant\underline{m}_1, \tag{2.4.10}$$

于是,存在 $a^*,b^*\in I$ 使

$$a^*=\lim_{n\to\infty}a_n,\qquad b^*=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

显然,$f([a^*,b^*])=[a^*,b^*]$,且由于(2.4.10)有

$$g([x_1,a^*])\supset J_1.$$

Step2　对任一 $r\in(0,1)$,归纳地构造闭线段序列 $E^r=\{M^r(n)\}_{n=0}^{\infty}$.

设 $l_0\in\mathbf{N}$ 是使 l_0r 的整数部分$[l_0r]=1$ 的最小正整数,记

$$E^r(l_0^2)=\{M^r(0),\cdots,M^r(l_0^2)\},$$

使

$$M^r(j)=\begin{cases}J_2, & 0\leqslant j<l_0^2,\\ J_1, & j=l_0^2.\end{cases}$$

设 $l>l_0$ 时,$E^r(l^2)=\{M^r(0),\cdots M^r(l^2)\}$已有定义,令

$$E^r((l+1)^2)=\{M^r(0)\cdots,M^r(l^2),M^r(l^2+1),\cdots,M^r((l+1)^2)\},$$

其中 $M^r(0),\cdots,M^r(l^2)$与 $E^r(l^2)$中的对应项相同,而

$$M^r(l^2+j)=\begin{cases}[a_{2l-j-1},a^*], & j=1,2,\cdots,2l-1,\\ [\underline{m}_2,a^*], & j=2l,\end{cases}$$

$$M^r((l+1)^2)=\begin{cases}J_1, & [(l+1)r]-[lr]=1,\\ M^r(l^2+2l), & [(l+1)r]-[lr]=0.\end{cases}$$

显然,$[(l+1)r]-[lr]\in\{0,1\}$.于是完成 E^r 的归纳定义.记

$$P(E^r,l^2)=\mathrm{Card}(\{M^r(n)\in E^r(l^2)\mid M^r(n)\subseteq J_1,n=0,1,\cdots,l^2\}).$$

由 $E^r(l^2)$的归纳定义,易于证明