模糊集理论及其应用

陈水利　李敬功　王向公　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了模糊集理论及其应用的基本知识和研究方法. 全书共分三个部分. 第一部分详细介绍模糊集合的基本理论; 第二部分系统介绍了模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与预测、模糊规划、模糊概率和模糊统计等研究领域的基本原理、研究方法及其应用程序; 第三部分介绍模糊推理的基本理论与算法, 以及模糊控制系统的基本原理.

本书可作为高等院校数学类本科生, 以及经济类、管理类、机械类、计算机科学类、信息科学类等专业高年级本科生和研究生的教材, 也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊集理论及其应用/陈水利, 李敬功, 王向公编著.—北京: 科学出版社, 2005

ISBN 7-03-015801-6

Ⅰ.模…　Ⅱ.①陈…　②李…　③王…　Ⅲ.模糊集理论-教材　Ⅳ.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 069652 号

责任编辑: 陈玉琢　吕　虹　祖翠娥／责任校对: 李奕萱
责任印制: 安春生／封面设计: 王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005 年 9 月第　一　版　开本: B5(720×1000)
2006 年 9 月第二次印刷　印张: 28 1/2
印数: 2 501—4 500　字数: 549 000

定价: 52.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自从美国著名控制论专家、加利福尼亚大学 L.A.Zadeh 教授于 1965 年建立模糊集理论以来, 在各国学者的共同努力和不断探索下, 模糊集理论及其应用的研究成果已非常丰富. 它不仅发展和扩充了经典数学的研究领域, 使数学学科的研究体系发生了新的重大变革, 而且能有效地解决经典数学难以解决的大系统的复杂性问题, 以及在自然界和日常生活中普遍存在而无法解决的模糊性问题. 从数学方面来讲, 以模糊集理论为基础的模糊数学学科, 如模糊拓扑学、模糊代数学、模糊分析学、模糊测度论、模糊概率论、模糊数理统计、模糊逻辑学已经形成; 而从应用方面来讲, 以模糊集理论为基础的应用学科, 如模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与模糊预测、模糊规划、模糊控制、模糊信息处理等已在工业、农业、医学、军事、计算机科学、信息科学、管理科学、系统科学、工程技术、社会科学和自然科学的各个领域中发挥着非常重要的作用, 并已获得巨大的经济效益.

本书是在作者多年来研究生和本科生讲授模糊数学课程的讲稿基础上, 经过修订而成的. 第 1、2 章主要介绍模糊集理论的基本内容; 第 3~7 章分别介绍模糊集理论在聚类分析、模式识别、综合评判、决策与预测、数学规划等应用领域中的基本原理和基本方法; 第 8 章介绍模糊概率和模糊统计的基本知识及其在企业投资问题和网络计划问题中的应用; 第 9 章介绍模糊推理的基本思想和常用的算法, 以及模糊控制系统的基本原理及其应用实例; 而构造隶属函数的各种方法则放在附录 A 中. 本书在选材上侧重于模糊集理论及其应用的基本知识和基本方法; 在叙述方法上, 力求通俗易懂, 以适合数学与应用数学、信息与计算科学、经济、管理、生物工程、医学、计算机科学、自动化和工科各专业的研究生和高年级本科生的阅读与选修. 为了满足读者的应用需要, 我们分别在各章介绍了 7 个应用程序.

读者只要具有高等数学、线性代数和概率论初步的基础知识, 即可阅读本书第 1~8 章的基本内容. 学完本书的全部内容大约需要 80 学时, 但各专业可根据教学时数的要求, 有针对性地选读部分章节. 第 1~6 章是本书中最基本的内容, 建议读者仔细阅读, 大约需要 54 学时即可.

在本书的写作过程中, 始终得到了陕西师范大学王国俊教授、武汉大学欧阳绵教授和裴礼文教授的鼓励和支持, 在此向他们表示衷心的感谢, 另外, 韩立岩教授、李洪兴教授、张跃教授和徐杨教授等人的研究成果是本书的重要参考文献, 借此机会向他们表示诚挚的感谢, 集美大学杨中南副教授、朱荣坤副教授、黄朝霞副教授和黄欢博士仔细校对了本书部分内容, 福州大学陈国龙博士和漳州师范学院数学系林梦雷副教授仔细地阅读本书, 并提出了一些宝贵的建议, 福州大学数学与计算机

科学院钮永莉和吕艳萍两位硕士对本书的一些应用程序给出了仔细地修订, 对此作者表示深深的谢意. 最后感谢国家自然科学基金委员会、福建省科技厅、福建省教育厅和集美大学教务处对本书的出版给予的大力支持.

由于时间仓促和作者水平有限, 书中不妥之处在所难免, 恳请读者和同仁们批评指正.

作 者

2005 年 1 月于厦门

目　　录

第 1 章　模糊集合及其运算

本章重点介绍模糊集合的定义、表示方法及模糊集合间的运算，详细讨论模糊集合与经典集合的互相转化关系（分解定理与表现定理），最后介绍几个刻画模糊集合的模糊性程度的数量指标.

1.1　经典集合与特征函数

集合是现代数学中最基本的概念之一，集合可以表现概念、性质和运算，也可以表现判断和推理，因而集合能够描述各门学科的语言、内容和思想.

所谓集合，是指具有某种特定属性的对象集体. 例如，某一所学校的所有学生就是一个集合. 集合通常用大写字母 A，B，C 等表示. 人们在研究具体问题时，总是对局限于一定范围内的对象进行讨论，所讨论的对象的全体称为**论域**，常用 U，V，X，Y 等来表示. 论域 U 中的每个对象 u 称为 U 的**元素**. 显然，论域 U 是一个集合，而任一个经典集合总是由论域中的一些元素所构成的.

在论域 U 中任意给定一个元素 u 及任意给定一个经典集合 A，则 u 或者属于 A（记作 $u \in A$），或者不属于 A（记作 $u \notin A$），二者必居且仅居其一. 这种关系可用如下二值函数表示：

$$\chi_A : U \longrightarrow \{0,1\}$$
$$u \longmapsto \chi_A(u),$$

其中

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A; \\ 0, & u \notin A. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

函数 χ_A 称为集合 A 的**特征函数**，其图形如图 1.1.1 所示，它明确地表示了集合 A，即对于 $u \in U$，若 $\chi_A(u) = 1$，则 u 是 A 的元素；若 $\chi_A(u) = 0$，则 u 不是 A 的元素.

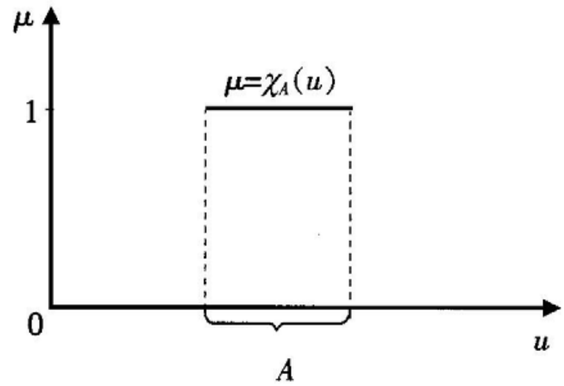


图 1.1.1　特征函数图

经典集合的表示方法常见的有下列两种.

1.1.1　列举法

把集合中的所有元素一一列举出来表示集合的方法，称为**列举法**. 当集合中的元素个数为有限，且可以一一列举出来时，该集合可用列举法来表示. 例如，以字母

a,b,c,d 为元素的集合 A 可表示为

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

1.1.2　描述法

通过描述集合元素的共同特征来表示集合的方法,称为描述法,也称为定义法. 用数学语言表述就是,给定某一性质 P,$P(x)$表示"x 具有性质 P",则具有性质 P 的全体元素 x 构成的集合可表示为

$$A=\{x\mid P(x)\}.$$

例如,设 χ_A 表示集合 A 的特征函数,则

$$A=\{x\mid \chi_A(x)=1\}. \tag{1.1.2}$$

1.2　模糊集合与隶属函数

我们知道,概念是科学的细胞,每个概念都有它的内涵和外延. 从集合论的观点讲,一个概念的外延就是一个集合. 有些概念在特定的场合有明确的外延,例如"人"这个概念的外延就是世界上所有的人组成的集合. 而有些概念在某些场合不具有明确的外延,如"年轻人"这个概念,谁都无法给出明确的划分,哪些是年轻人,而其余的都不是,这是因为"年轻"与"不年轻"之间没有明确的边界. 又如"通货膨胀"、"市场萧条"、"多云"、"高个子"、"稠油"、"高产油井"、"价格合理"、"教学优质"等概念也都没有明确的外延,这种外延不明确的不确定性,我们称之为模糊性. 具有模糊性外延的概念,称为模糊概念.

由于经典集合只能表现具有明确外延的概念,不能表现模糊概念,因此经典集合论在模糊概念面前显得无能为力. 于是,要定量表现模糊概念和研究具有模糊性的对象的客观规律性,就必须把经典集合的概念进行推广. 为了定量地刻画模糊概念和模糊现象,美国计算机与控制论专家 L. A. Zadeh 教授于 1965 年提出了模糊集合这一重要概念,其基本思想是:把经典集合中的隶属关系加以扩充,使元素对"集合"的隶属程度由只能取 0 和 1 这两个值推广到可以取单位区间[0,1]中的任意一数值,从而实现定量地刻画模糊性对象. 具体定义如下.

定义 1.2.1　设 U 为论域, 则 U 上的一个模糊集合 A 由 U 上的一个实值函数

$$\mu_A:\begin{array}{l} U\longrightarrow[0,1] \\ u\longmapsto \mu_A(u) \end{array} \tag{1.2.1}$$

来表示. 对于 $u\in U$, 函数值 $\mu_A(u)$称为 u 对于 A 的隶属度, 而函数 μ_A 称为 A 的隶属函数, 其图形如图 1.2.1 所示.

由此可见, 模糊集合 A 是一个抽象的概念, 其元素是不确定的, 我们只能通过隶属函数 μ_A 来认识和掌握 A. $\mu_A(u)$的数值的大小反映了论域 U 中的元素 u 对

于模糊集合 A 的隶属程度，$\mu_A(u)$的值越接近于1,表示 u 隶属于 A 的程度越高；$\mu_A(u)$的值越接近于0,表示 u 隶属于 A 的程度越低.特别地,若 $\mu_A(u)=1$,则认为 u 完全属于 A；若 $\mu_A(u)=0$,则认为 u 完全不属于 A.

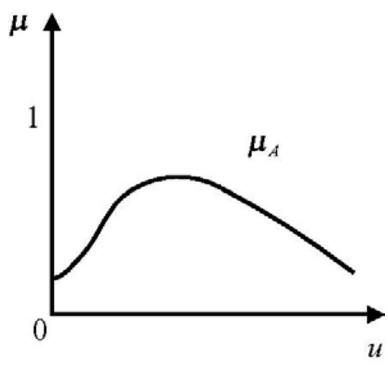


图 1.2.1　隶属函数图

论域 U 上的模糊集合的全体记为 $\mathscr{F}(U)$,称之为**模糊幂集**.

对于 U 上的模糊集合 $A\in\mathscr{F}(U)$,当 A 的隶属函数 μ_A 的值域为$\{0,1\}$时，μ_A 便是一个经典集合的特征函数 χ_A,此时 A 就是一个经典集合.因此,经典集合可看作是特殊的模糊集合.如果我们记 $\mathscr{P}(U)$为论域 U 上的经典集合的全体,则 $\mathscr{P}(U)\subset\mathscr{F}(U)$.

由于模糊集合 A 只能由其隶属函数 μ_A 来表达,因此,为方便起见,我们将用记号 $A(u)$来代替 $\mu_A(u)$.这样,模糊集合与其隶属函数的记号将不加区分.

模糊集合的表示方法最常见的有下列两种.

1.2.1　Zadeh 表示法

当论域 U 只包含有限个元素,即 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$时,则 U 上的模糊集合 A 可表示为

$$A=A(u_1)/u_1+A(u_2)/u_2+\cdots+A(u_n)/u_n, \tag{1.2.2}$$

式中符号 $A(u_i)/u_i$ 不表示“分数”,而是表示元素 u_i 隶属于 A 的程度为 $A(u_i)$;符号“+”也不表示“加号”,而是一种联系符号.

例 1.2.1　考虑5个科研项目,分别记为 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5. 取论域 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$.现对这5个科研项目进行成果鉴定,请有关专家按百分制打分,规定几项鉴定的技术指标,考核每个科研项目对“成果优秀”的符合程度.这里“成果优秀”是一个模糊概念,用模糊集合 A 表示. 设这些专家打分后,取其平均值,再除以100,得到的结果为

$$u_1:87\text{ 分},\text{记 } A(u_1)=87/100=0.87;$$

$$u_2:73\text{ 分},\text{记 } A(u_2)=73/100=0.73;$$

$$u_3:94\text{ 分},\text{记 } A(u_3)=94/100=0.94;$$

$$u_4:85\text{ 分},\text{记 } A(u_4)=85/100=0.85;$$

$$u_5:79\text{ 分},\text{记 } A(u_5)=79/100=0.79.$$

这样就确定了论域 U 上“成果优秀”这个模糊集合 A,用Zadeh表示方法就是

$$A=0.87/u_1+0.73/u_2+0.94/u_3+0.85/u_4+0.79/u_5.$$

当论域 U 为无限集时,U 上的模糊集合 A 可表示为

$$A = \int_U A(u)/u, \tag{1.2.3}$$

式中符号“$\int$”不是普通的积分,也不是求和记号,而是表示各个元素与隶属度对应关系的一个总括.

例 1.2.2　以年龄作论域,取 $U=[0,200]$,Zadeh 给出“年轻”的模糊集合 Y,其隶属函数为

$$Y(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25,\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<u\leqslant 200.\end{cases} \tag{1.2.4}$$

用 Zadeh 表示方法就是

$$Y=\int_{[0,25]} 1\Big/u+\int_{[25,200]}\left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}\Big/u. \tag{1.2.5}$$

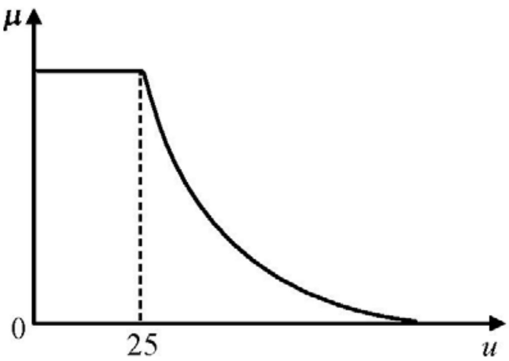


图 1.2.2　“年轻”集的曲线

“年轻”Y 的曲线如图 1.2.2 所示.由此可见,年龄对“年轻”的隶属度呈现出连续的变化,Y 的外延是不分明的、模糊的,这样描述更符合人的意识。

1.2.2　向量表示法

当论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 时,U 上的模糊集合 A 也可用如下向量来表示:

$$A=(A(u_1),A(u_2),\cdots,A(u_n)). \tag{1.2.6}$$

例如,例 1.2.1 中的模糊集合“成果优秀”A 也可表示为

$$A=(0.87,\ 0.73,\ 0.94,\ 0.85,\ 0.79).$$

由于 $A(u_i)\in[0,1]$,$i=1,2,\cdots,n$,即(1.2.6)式确定的向量的每个分量的值都在 0 与 1 之间,我们把这种特殊的向量称为**模糊向量**.

1.3　模糊集合的运算

1.3.1　经典集合的运算及其性质

定义 1.3.1　设 A,B 为论域 U 上的两个经典集合.

(1) 如果属于 A 的元素都属于 B,则称集合 B **包含**集合 A,或称 A 为 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2) 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

（3）由 A 与 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，这时

$$A\cup B=\{u\mid u\in A \text{ 或 } u\in B\}.$$

（4）由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，这时

$$A\cap B=\{u\mid u\in A \text{ 且 } u\in B\}.$$

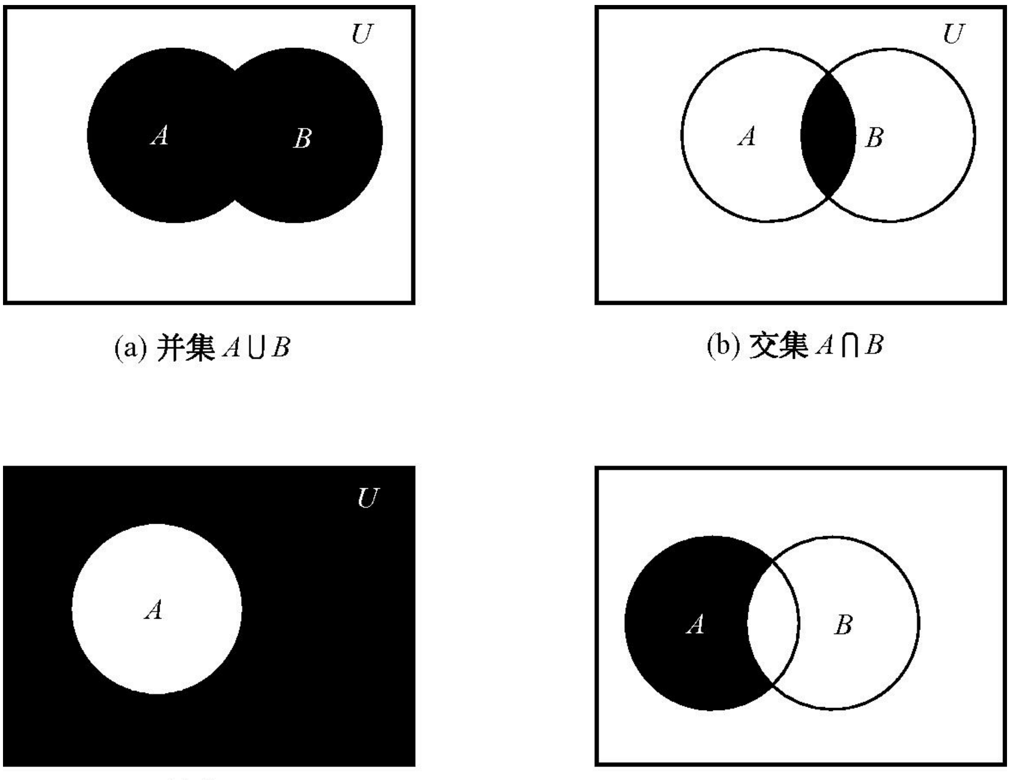
（5）论域 U 中不属于集合 A 的所有元素构成的集合称为 A 的补集，或余集，记作 A'，这时

$$A'=\{u\mid u\notin A,\text{但 } u\in U\}.$$

（6）由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，这时

$$A-B=\{u\mid u\in A,u\notin B\}.$$

集合的并、交、补和差运算常用如下 Venn 图来直观表示，图中阴影部分表示集合运算后的并集、交集、补集和差集，如图 1.3.1 所示.



(a) 并集 $A\cup B$　　(b) 交集 $A\cap B$

(c) 补集 A'　　(d) 差集 $A-B$

图 1.3.1　经典集合的运算图

由于经典集合与其特征函数可互相转化，于是集合的包含、并、交、补运算可转化为相应的特征函数的运算，其运算性质如下.

定理 1.3.1　设 U 为论域，$u\in U$，A 和 B 是 U 上的两个经典集合，则

（1）$A\subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(u)\leqslant\chi_B(u)$，　　（1.3.1）

即 A 包含于 B 等价于 A 在每一个元素 u 处的特征值均小于或等于 B 在 u 处的特征值；

(2) $\chi_{A\cup B}(u)=\max\{\chi_A(u),\ \chi_B(u)\}$, (1.3.2)

即 $A\cup B$ 在每一个元素 u 处的特征值等于 A,B 分别在 u 处的特征值取最大者，如图 1.3.2(a)所示；

(3) $\chi_{A\cap B}(u)=\min\{\chi_A(u),\ \chi_B(u)\}$, (1.3.3)

即 $A\cap B$ 在每一个元素 u 处的特征值等于 A,B 分别在 u 处的特征值取最小者，如图 1.3.2(b)所示；

(4) $\chi_{A'}(u)=1-\chi_A(u)$, (1.3.4)

即 A' 在每一个元素 u 处的特征值等于 1 减去 A 在 u 处的特征值，如图 1.3.2(c)所示.

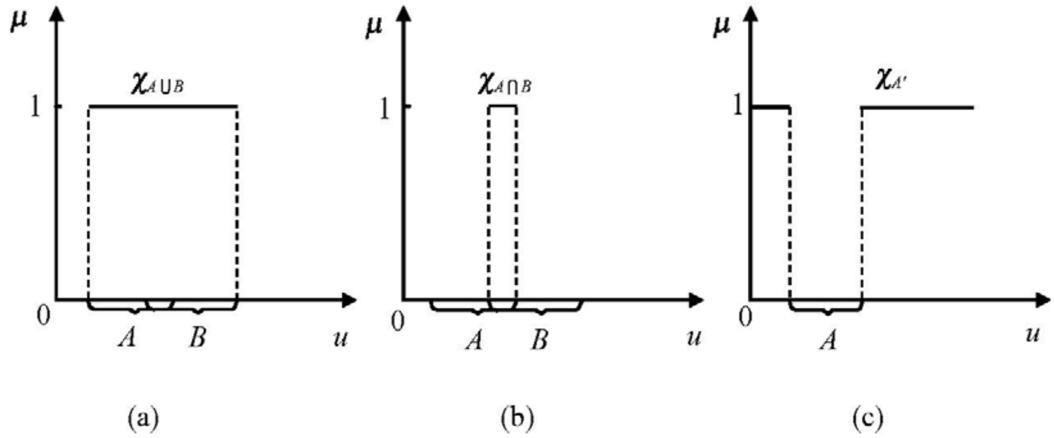


图 1.3.2　特征函数的运算图

不难验证，经典集合关于并、交、补这三种运算具有如下基本性质.

定理 1.3.2　设 U 为论域，A,B,C 为 U 上的三个经典集合，则

(1) 幂等律：$A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 吸收律：$(A\cap B)\cup B=B$, $(A\cup B)\cap B=B$;

(5) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(6) 复原律：$(A')'=A$;

(7) 两极律：$A\cup U=U$, $A\cap U=A$,

$A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$,

其中 $\varnothing$ 表示不包含任何元素的集合，称为空集；

(8) De Morgan 对偶律：

$$(A\cup B)'=A'\cap B',\ (A\cap B)'=A'\cup B';$$

(9) 排中律(互补律)：$A\cup A'=U,\ A\cap A'=\varnothing$.

在数学中,通常把满足定理 1.3.2 中这九条运算规律的代数系统称为布尔代数(Boolean algebra). 因此,$(\mathscr{P}(U),\cup,\cap,')$ 成为布尔代数. 计算机的运算系统就是建立在布尔代数系统基础上的.

1.3.2 模糊集合的格运算及其性质

由于经典集合是模糊集合的特例,即经典集合的特征函数是一种特殊的隶属函数,于是 Zadeh 由经典集合的特征函数的运算性质出发,引入模糊集合的包含与相等关系以及并、交、补运算如下.

定义 1.3.2 设 U 为论域,A 和 B 是 U 上的两个模糊集合.

(1) 如果 $\forall u\in U$,$A(u)\leqslant B(u)$,则称 A 包含于 B,或称 B 包含 A,记作 $A\subseteq B$,即

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A(u)\leqslant B(u),\qquad \forall u\in U, \tag{1.3.5}$$

这时也称 A 为 B 的子集,其隶属函数如图 1.3.3(a)所示.

(2) 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$,即

$$A=B \Leftrightarrow A(u)=B(u),\qquad \forall u\in U, \tag{1.3.6}$$

(3) A 与 B 的并记作 $A\cup B$,其隶属函数为

$$(A\cup B)(u)=A(u)\vee B(u), \tag{1.3.7}$$

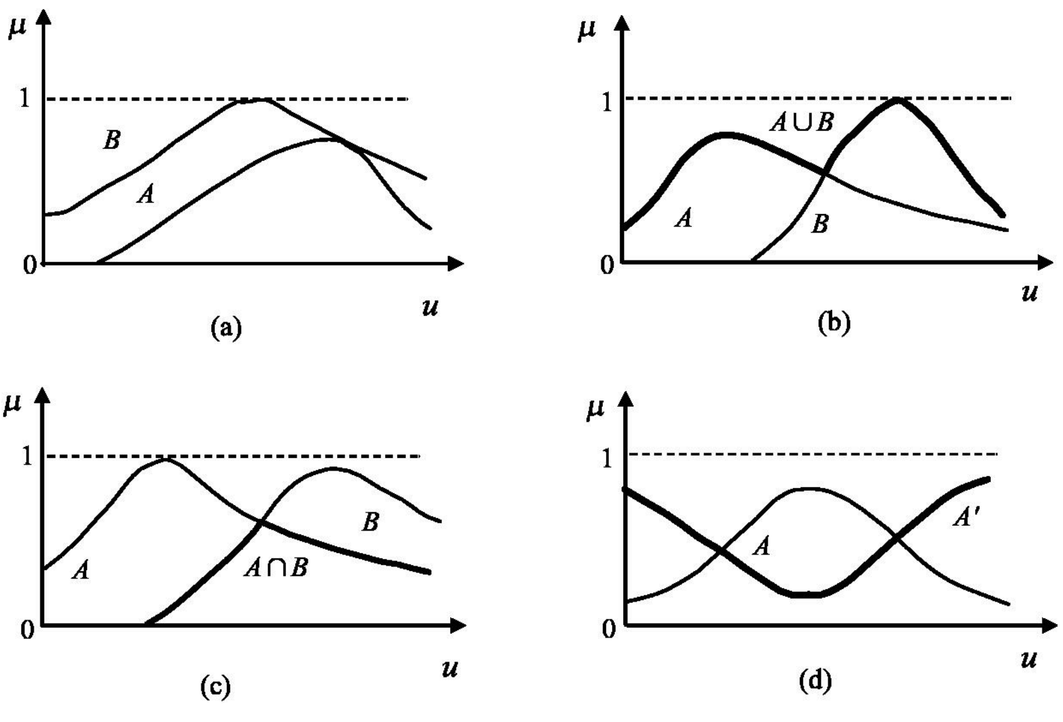


图 1.3.3 隶属函数的运算图

其中“$\vee$”表示取上确界,如图 1.3.3(b)所示.

(4) A 与 B 的交记作 $A\cap B$,其隶属函数为

$$(A\cap B)(u)=A(u)\wedge B(u),\tag{1.3.8}$$

其中“$\wedge$”表示取下确界,如图 1.3.3(c)所示.

(5) A 的补模糊集记作 A',其隶属函数为

$$A'(u)=1-A(u),\tag{1.3.9}$$

如图 1.3.3(d)所示.

例 1.3.1　设某油田有 5 个不同的采油厂,采油厂构成的论域为 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$.

$$A=(0.9,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.8,\ 0.8)$$

表示“产量高”,

$$B=(0.7,\ 0.8,\ 0.3,\ 0.7,\ 0.85)$$

表示“油质好”. 则 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,且

(1)“产量高且油质好”为

$$\begin{aligned}A\cap B&=(0.9\wedge 0.7,0.5\wedge 0.8,0.6\wedge 0.3,0.8\wedge 0.7,0.8\wedge 0.85)\\&=(0.7,\ 0.5,\ 0.3,\ 0.7,\ 0.8);\end{aligned}$$

(2)“产量高或油质好”为

$$\begin{aligned}A\cup B&=(0.9\vee 0.7,0.5\vee 0.8,0.6\vee 0.3,0.8\vee 0.7,0.8\vee 0.85)\\&=(0.9,\ 0.8,\ 0.6,\ 0.8,\ 0.85);\end{aligned}$$

(3)“产量不高”为

$$\begin{aligned}A'&=(1-0.9,\ 1-0.5,\ 1-0.6,\ 1-0.8,\ 1-0.8)\\&=(0.1,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.2).\end{aligned}$$

注 1.3.1　两个模糊集合的并、交运算可推广到一般情形,即设 T 为任意给定的指标集,$\forall t\in T$,A_t 是 U 上的模糊集合,则

(1) $\{A_t\}_{t\in T}$的并记作$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$,其隶属函数为

$$\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)(u)=\bigvee_{t\in T}A_t(u);\tag{1.3.10}$$

(2) $\{A_t\}_{t\in T}$的交记作$\bigcap\limits_{t\in T}A_t$,其隶属函数为

$$\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)(u)=\bigwedge_{t\in T}A_t(u).\tag{1.3.11}$$

类似于定理 1.3.2,模糊集合间关于并、交、补这三种运算满足定理 1.3.2 中的前 8 条运算规律,即有如下定理.

定理 1.3.3　在$(\mathscr{F}(U),\cup,\cap,')$中,幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、复原律、两极律和 De Morgan 对偶律均成立,但排中律不成立.

证明　我们仅证 De Morgan 对偶律, 其余的留给读者作为练习.

设 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,则 $\forall u\in U$,

$$\begin{aligned}(A\cap B)'(u)&=1-(A\cap B)(u)\\&=1-[(A(u)\wedge B(u)]\\&=[1-A(u)]\vee[1-B(u)].\\&=A'(u)\vee B'(u)\\&=(A'\cup B')(u),\end{aligned}$$

从而得 $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

第三个等式成立,是因为若 $A(u)\leqslant B(u)$,则

$$1-[A(u)\wedge B(u)]=1-A(u),$$

且 $1-A(u)\geqslant 1-B(u)$, 于是,

$$[1-A(u)]\vee[1-B(u)]=1-A(u).$$

根据复原律及已证明的等式,我们有

$$(A'\cap B')'=(A')'\cup(B')'=A\cup B,$$

即 $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

最后我们举一个反例来说明排中律不成立.

取 $U=\{u,v\}$, $A=(0.6,\ 0.4)$,则 $A'=(0.4,\ 0.6)$,从而

$$A\cup A'=(0.6,\ 0.6)\neq U,$$

$$A\cap A'=(0.4,\ 0.4)\neq\varnothing.$$

通常把满足定理 1.3.2 中前 8 条运算规律的代数系统称为**软代数**(soft algebra).根据定理 1.3.3,$(\mathscr{F}(U),\cup,\cap,')$ 构成一个软代数,或称之为**模糊格**(fuzzy lattice).

上述介绍的模糊集的并、交运算是由 Zadeh 提出的,称为**模糊格运算**,它是经典集合格运算的直接推广.然而,推广的方式不是惟一的.

下面介绍模糊集合的另外几种常用的运算,这些运算也都是经典集合并、交运算的推广.

1.3.3　模糊集合的其他运算

(1) 概率和 $A\overset{\wedge}{+}B$ 与乘积 $A\cdot B$,其隶属函数分别为

$$(A\overset{\wedge}{+}B)(u)=A(u)+B(u)-A(u)B(u),\tag{1.3.12}$$

$$(A\cdot B)(u)=A(u)\cdot B(u).\tag{1.3.13}$$

(2) 有界和 $A\oplus B$ 与有界积 $A\otimes B$,其隶属函数分别为

$$(A\oplus B)(u)=\min\{A(u)+B(u),1\},\tag{1.3.14}$$

$$(A\otimes B)(u)=\max\{A(u)+B(u)-1,0\}.\tag{1.3.15}$$

(3) Einstein 和 $A\overset{+}{\varepsilon}B$ 与 Einstein 积 $A\overset{\cdot}{\varepsilon}B$,其隶属函数分别为

$$(A\overset{+}{\varepsilon}B)(u)=\frac{A(u)+B(u)}{1+A(u)\cdot B(u)},\tag{1.3.16}$$

$$(A\overset{\cdot}{\varepsilon}B)(u)=\frac{A(u)\cdot B(u)}{1+[1-A(u)][1-B(u)]}.\tag{1.3.17}$$

以上介绍的四对模糊集合的运算:$(\cup,\cap)$、$(\hat{+},\cdot)$、$(\oplus,\otimes)$、$(\overset{+}{\varepsilon},\overset{\cdot}{\varepsilon})$各自适合于不同的描述对象,应用时必须根据实际问题加以选择. 根据具体问题的要求,也可以选取下列几对运算:$(\cup,\cdot)$、$(\oplus,\cdot)$、$(\hat{+},\cap)$、$(\oplus,\cap)$.

1.4　模糊集合的分解定理与表现定理

从模糊集合的定义我们已经看到,模糊集合所表示概念的外延是不明确的,即模糊集合所含的元素是模糊的,它只能由其隶属函数来表示. 然而,在研究和处理实际问题时我们总希望对模糊概念有个明确的认识与判定,即给定一个标准之后,希望能知道某个元素,对模糊集合的明确归属问题. 为此我们需要知道模糊集合与经典集合之间的相互转化关系. 这就是本节将要介绍的分解定理与表现定理.

1.4.1　模糊集合的截集

截集概念在模糊集合与经典集合的互相转化中起着重要的桥梁作用,在解决实际问题中也经常用到. 为了引入截集的概念,我们先考察一个实例.

例 1.4.1　考虑某油田对所属的 6 个单位进行安全生产情况年度考核,这 6 个单位分别记为 u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,设论域 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$. 现对每个单位按百分制评分,再将分数除以 100 折合成隶属度,设它们的成绩为

$$u_1:94\text{ 分},\quad u_2:96\text{ 分},\quad u_3:83\text{ 分},$$
$$u_4:100\text{ 分},\quad u_5:85\text{ 分},\quad u_6:78\text{ 分},$$

则得论域 U 上的“成绩”这一模糊集 A 为

$$A=(0.94,\ 0.96,\ 0.83,\ 1,\ 0.85,\ 0.78).$$

现在要了解这 6 个单位中哪些是“安全生产成绩优秀”(90 分以上),哪些是“安全生产成绩良好”(80 分以上),哪些是“安全生产成绩合格”(60 分以上). 考核方法如下:

当 $A(u)\geqslant 0.9$ 时,u 为“安全生产成绩优秀”的单位,用 $A_{0.9}$ 来表示这些单位所构成的集合,则

$$A_{0.9}=\{u\mid A(u)\geqslant 0.9\}=\{u_1,u_2,u_4\},$$

这是一个经典集合.

类似地,用 $A_{0.8}$ 和 $A_{0.6}$ 分别表示“安全生产成绩良好”和“安全生产成绩合格”

那些单位所构成的集合,则

$$A_{0.8}=\{u\mid A(u)\geqslant 0.8\}$$
$$=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\},$$
$$A_{0.6}=\{u\mid A(u)\geqslant 0.6\}$$
$$=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}.$$

我们把这种由模糊集 A 出发所得到的经典集 $A_{0.9}$, $A_{0.8}$ 和 $A_{0.6}$ 称为 A 的截集.

一般地,我们有如下定义.

定义 1.4.1　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,任取 $\lambda\in[0,1]$,记

$$A_\lambda=\{u\in U\mid A(u)\geqslant\lambda\},\tag{1.4.1}$$

称 A_λ 为 A 的 λ 截集,而 λ 称为阈值或置信水平.

又记

$$A_{S\lambda}=\{u\in U\mid A(u)>\lambda\},\tag{1.4.2}$$

称 $A_{S\lambda}$ 为 A 的 λ 强截集.

A_λ 与 $A_{S\lambda}$ 的直观意义如下:

(1) A_λ 是由论域 U 中对于模糊集合 A 的隶属度达到或超过阈值 λ 的元素所构成的集合,如图 1.4.1 所示.

(2) $A_{S\lambda}$ 是由论域 U 中对于模糊集合 A 的隶属度超过阈值 λ 的元素所构成的集合.

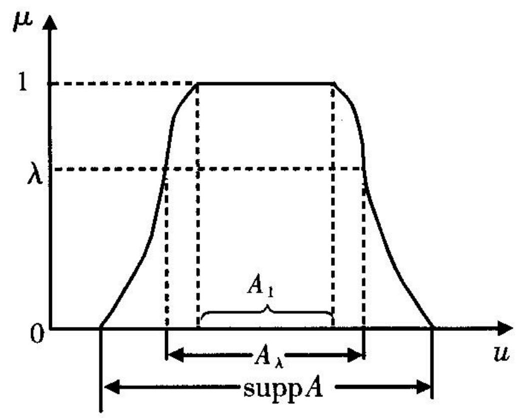


图 1.4.1　截集、支集和核

因此,A_λ 与 $A_{S\lambda}$ 都是 U 中的经典集合. 如果让 λ 取遍 $[0,1]$,我们就得到 U 中两个经典集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 和 $\{A_{S\lambda}\}_{\lambda\in[0,1]}$,这里 λ 代表人们的某种置信水平,当某个水平 λ 给定时,模糊的 A 就精确化为分明的 A_λ 或 $A_{S\lambda}$. 因此,可以说 A_λ 或 $A_{S\lambda}$ 是 A 的一次曝光,也可以说 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 或 $\{A_{S\lambda}\}_{\lambda\in[0,1]}$ 是 A 的集合表示.

1.4.2　λ 截集与 λ 强截集的性质

由定义 1.4.1 及模糊集合的运算,可以证明模糊集合的 λ 截集与 λ 强截集具有下列性质.

定理 1.4.1　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,则

(1) $\forall\lambda\in[0,1]$, $A_{S\lambda}\subseteq A_\lambda$;

(2) $A_0=U$, $A_{S1}=\varnothing$;

(3) $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$, $A_{\lambda_2}\subseteq A_{\lambda_1}$;

(4) $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$, $A_{S\lambda_2}\subseteq A_{S\lambda_1}$.

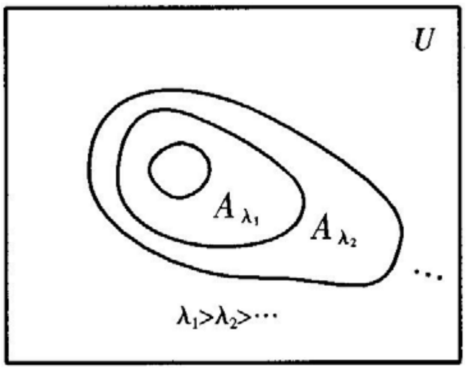


图 1.4.2　模糊集的截集族

证明　(1)和(2)由定义 1.4.1 直接可得.

(3)因为 $\forall u \in U,\ u\in A_{\lambda_2} \Rightarrow A(u)\geqslant\lambda_2 \Rightarrow A(u)\geqslant\lambda_1 \Rightarrow u\in A_{\lambda_1}$,所以 $A_{\lambda_2}\subseteq A_{\lambda_1}$.

同理可证(4).　□

此性质表明:(1) A 的 λ 强截集是 A 的 λ 截集的子集;

(2) A 的 λ 截集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 和 λ 强截集族 $\{A_{S\lambda}\}_{\lambda\in[0,1]}$ 都是一个套着一个的经典集合族,如图 1.4.2 所示.

定理 1.4.2　设 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,$\lambda\in[0,1]$,则

(1) $(A\cup B)_\lambda = A_\lambda\cup B_\lambda$;

(2) $(A\cap B)_\lambda = A_\lambda\cap B_\lambda$;

(3) $(A\cup B)_{S\lambda} = A_{S\lambda}\cup B_{S\lambda}$;

(4) $(A\cap B)_{S\lambda} = A_{S\lambda}\cap B_{S\lambda}$.

证明　(1)因为

$$\begin{aligned}&\forall u\in U,\ u\in(A\cup B)_\lambda \Leftrightarrow (A\cup B)(u)\geqslant\lambda\\&\Leftrightarrow A(u)\vee B(u)\geqslant\lambda \Leftrightarrow A(u)\geqslant\lambda \text{ 或 } B(u)\geqslant\lambda\\&\Leftrightarrow u\in A_\lambda \text{ 或 } u\in B_\lambda \Leftrightarrow u\in A_\lambda\cup B_\lambda,\end{aligned}$$

所以

$$(A\cup B)_\lambda = A_\lambda\cup B_\lambda.$$

同理可证(2)~(4).　□

对于无限个模糊集的情形,结论(1)和结论(4)一般不成立,即有如下定理.

定理 1.4.3　设 T 为任意指标集,$\forall t\in T$,$A^t\in\mathscr{F}(U)$,则

(1) $\left(\bigcup\limits_{t\in T}A^t\right)_\lambda \supseteq \bigcup\limits_{t\in T}(A^t)_\lambda$;　(1.4.3)

(2) $\left(\bigcap\limits_{t\in T}A^t\right)_\lambda = \bigcap\limits_{t\in T}(A^t)_\lambda$;　(1.4.4)

(3) $\left(\bigcup\limits_{t\in T}A^t\right)_{S\lambda} = \bigcup\limits_{t\in T}(A^t)_{S\lambda}$;　(1.4.5)

(4) $\left(\bigcap\limits_{t\in T}A^t\right)_{S\lambda} \subseteq \bigcap\limits_{t\in T}(A^t)_{S\lambda}$.　(1.4.6)

证明　(1)因为

$$\begin{aligned}&\forall u\in U,\ u\in\bigcup_{t\in T}(A^t)_\lambda \Rightarrow \exists t_0\in T,\text{使 } u\in(A^{t_0})_\lambda\\&\Rightarrow A^{t_0}(u)\geqslant\lambda \Rightarrow \bigvee_{t\in T}A^t(u)\geqslant A^{t_0}(u)\geqslant\lambda\\&\Rightarrow u\in\left(\bigcup_{t\in T}A^t\right)_\lambda,\end{aligned}$$

所以

$$\bigcup_{t\in T}(A^t)_\lambda \subseteq \left(\bigcup_{t\in T}A^t\right)_\lambda.$$

(2) 因为

$$\forall u \in U,\ u \in \bigcap_{t\in T}(A^t)_\lambda \Leftrightarrow \forall t\in T, u\in (A^t)_\lambda$$

$$\Leftrightarrow \forall t\in T,\ A^t(u)\geqslant\lambda \Leftrightarrow \bigwedge_{t\in T}A^t(u)\geqslant\lambda$$

$$\Leftrightarrow u\in \left(\bigcap_{t\in T}A^t\right)_\lambda,$$

所以

$$\left(\bigcap_{t\in T}A^t\right)_\lambda = \bigcap_{t\in T}(A^t)_\lambda.$$

同理可证(3)和(4). □

定理 1.4.4 设 $A\in\mathscr{F}(U)$,T 为任意指标集,且 $\forall t\in T,\ \lambda_t\in[0,1]$,则

(1) $A_{\left(\bigvee_{t\in T}\lambda_t\right)} = \bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}$; (1.4.7)

(2) $A_{S\left(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t\right)} = \bigcup_{t\in T}A_{S\lambda_t}$; (1.4.8)

(3) $\forall\lambda\in[0,1]$, $(A')_\lambda = (A_{S(1-\lambda)})'$; (1.4.9)

(4) $\forall\lambda\in[0,1]$, $(A')_{S\lambda} = (A_{1-\lambda})'$. (1.4.10)

证明 (1) 因为

$$\forall u\in U,\ u\in A_{\left(\bigvee_{t\in T}\lambda_t\right)} \Leftrightarrow A(u)\geqslant\bigvee_{t\in T}\lambda_t$$

$$\Leftrightarrow \forall t\in T,\ A(u)\geqslant\lambda_t \Leftrightarrow \forall t\in T,\ u\in A_{\lambda_t}$$

$$\Leftrightarrow u\in\bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t},$$

所以

$$A_{\left(\bigvee_{t\in T}\lambda_t\right)} = \bigcap_{t\in T}A_{\lambda_t}.$$

(2) 因为

$$\forall u\in U,\ u\in A_{S\left(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t\right)} \Leftrightarrow A(u) > \bigwedge_{t\in T}\lambda_t$$

$$\Leftrightarrow \exists t_0\in T,\ A(u)>\lambda_{t_0} \Leftrightarrow \exists t_0\in T,\ u\in A_{S\lambda_{t_0}}$$

$$\Leftrightarrow u\in\bigcup_{t\in T}A_{S\lambda_t},$$

所以

$$A_{S\left(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t\right)} = \bigcup_{t\in T}A_{S\lambda_t}.$$

(3) 因为

$$\forall u\in U, u\in(A')_\lambda \Leftrightarrow A'(u)\geqslant\lambda \Leftrightarrow A(u)\leqslant 1-\lambda$$

$$\Leftrightarrow A(u)\not> 1-\lambda \Leftrightarrow u\notin A_{S(1-\lambda)} \Leftrightarrow u\in(A_{S(1-\lambda)})'$$

所以

$$(A')_\lambda = (A_{S(1-\lambda)})'.$$

(4) 因为

$$\forall u\in U,\ u\in(A')_{S\lambda} \Leftrightarrow A'(u)>\lambda \Leftrightarrow A(u)<1-\lambda$$

$$\Leftrightarrow A(u)\ngeqq 1-\lambda \Leftrightarrow u\notin A_{1-\lambda} \Leftrightarrow u\in(A_{1-\lambda})'$$

所以

$$(A')_{S\lambda} = (A_{1-\lambda})'. \quad \square$$

注 1.4.1 $(A')_\lambda \equiv (A_\lambda)'$一般不成立.

例如,取 $U=[0,1]$,$A(u)=0.5$, $\forall u\in U$,则 $A'=A$. 对 $\lambda=0.3$, 有 $(A')_{0.3} = U = A_{0.3}$,从而 $(A_{0.3})'=\varnothing$,故 $(A')_{0.3}\neq(A_{0.3})'$.

在实际应用中,A_1 和 A_{S0} 这两个截集很有用,下面把它们抽象出来进行讨论.

定义 1.4.2 设 $A\in\mathscr{F}(U)$,称 $A_1=\{u\in U | A(u)=1\}$ 为 A 的核,记作 $\ker A$,即

$$\ker A = \{u \in U \mid A(u) = 1\}; \tag{1.4.11}$$

称 $A_{S0} = \{u \in U \mid A(u) > 0\}$ 为 A 的支集,记作

$$\operatorname{supp}A = \{u \in U \mid A(u) > 0\}; \tag{1.4.12}$$

而称 $A_{S0} - A_1$ 为 A 的边界,记作 bon$A$,即

$$\operatorname{bon}A = \{u \in U \mid A(u) > 0, 且 A(u) \neq 1\}. \tag{1.4.13}$$

如果 ker$A \neq \varnothing$,则称 A 为正规模糊集,否则称 A 为非正规模糊集.

A 的核 ker$A$ 是完全属于 A 的元素所构成的,随着 λ 由 1 向 0 递减变化,A_λ 从 A_1 出发不断扩大,最终达到最大集合 supp$A$. A 的边界 bon$A$ 则是介于完全属于 A 与完全不属于 A 之间的元素的全体,称之为 A 的“灰色”地带. A 的核、支集如图 1.4.1 所示.

1.4.3　分解定理

前面我们已经看到,由模糊集 A 出发通过截集运算可得两个经典集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ 和 $\{A_{S\lambda}\}_{\lambda \in [0,1]}$. 下面我们进一步研究它们之间的关系. 为此,我们先引入数与模糊集的截积运算.

定义 1.4.3　设 $\lambda \in [0,1]$,$A \in \mathscr{F}(U)$,则 λ 与 A 的截积(记作 λA)定义为

$$(\lambda A)(u) = \lambda \wedge A(u), \qquad \forall u \in U, \tag{1.4.14}$$

其中

$$\lambda \wedge A(u) = \begin{cases} A(u), & \lambda \geqslant A(u), \\ \lambda, & \lambda < A(u). \end{cases} \tag{1.4.15}$$

如图 1.4.3(a)所示. 由此可见,λA 仍为 U 上的模糊集合.

根据定义 1.4.3,若 A 为 U 中的经典集合,则 λA 就变为模糊集合,这是因为

$$(\lambda A)(u) = \begin{cases} \lambda, & u \in A, \\ 0, & u \notin A. \end{cases} \tag{1.4.16}$$

如图 1.4.3(b)所示.

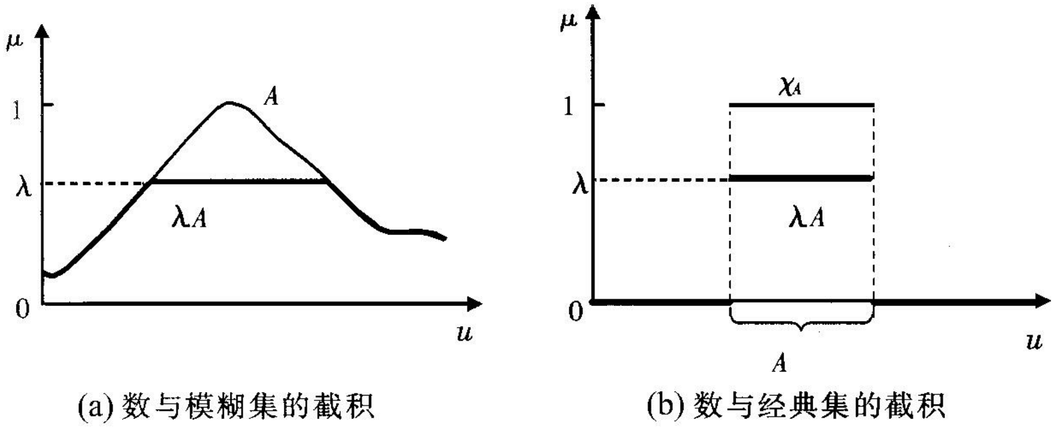


图 1.4.3　截积隶属曲线

定理 1.4.5(分解定理Ⅰ)　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,则

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda. \tag{1.4.17}$$

证明　只需证明 $\forall u\in U$,有

$$A(u)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}[\lambda\wedge A_\lambda(u)].$$

事实上,因 $A(u)\in[0,1]$,故

$$\begin{aligned}&\bigvee_{\lambda\in[0,1]}[\lambda\wedge A_\lambda(u)]\\&=\{\bigvee_{\lambda\in(0,A(u)]}[\lambda\wedge A_\lambda(u)]\}\vee\{\bigvee_{\lambda\in(A(u),1]}[\lambda\wedge A_\lambda(u)]\},\end{aligned}$$

注意到

$$A_\lambda(u)=\begin{cases}1, & A(u)\geqslant\lambda,\\0, & A(u)<\lambda.\end{cases} \tag{1.4.18}$$

所以

$$\begin{aligned}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}[\lambda\wedge A_\lambda(u)]&=\bigvee_{\lambda\in(0,A(u)]}(\lambda\wedge 1)\\&=\bigvee_{\lambda\in(0,A(u)]}\lambda=A(u).\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

分解定理Ⅰ表明:任取 $\lambda\in[0,1]$,将模糊集 A 切成经典集 A_λ,再用 λ 与 A_λ 作截积得模糊集 λA_λ,将所有的 λA_λ ($\lambda\in[0,1]$)拼起来,组成一个模糊集 $\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$,此模糊集就是 A,如图 1.4.4 和图 1.4.5 所示. 图中粗折线表示 λA_λ 的图像,随着 λ 在[0,1]区间上的变动,无数个折线点所连成的上包络线就是模糊集 A 的隶属函数的曲线.

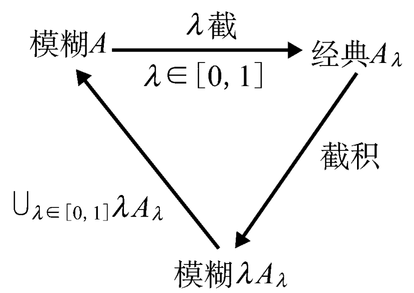


图 1.4.4　分解定理Ⅰ流程图

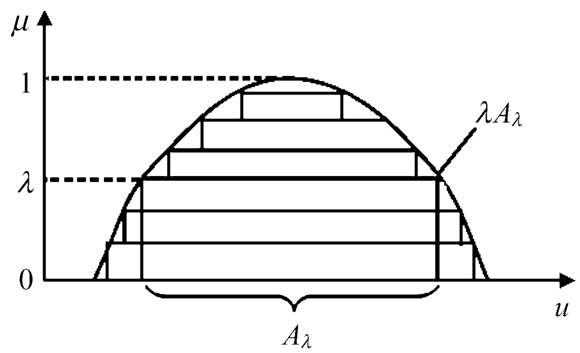


图 1.4.5　分解定理Ⅰ隶属函数图

由式(1.4.19)我们可以得到一个求 A 的隶属函数的公式,即

推论 1.4.1　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,则 $\forall u\in U$,有

$$A(u)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid u\in A_\lambda\}. \tag{1.4.20}$$

例 1.4.2　设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,$A\in\mathscr{F}(U)$,$A=(0.9,0.6,0.8,0.4)$,则

当 $\lambda\in(0,0.4]$时,$A_\lambda=(1,1,1,1)$,$\lambda A_\lambda=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$;

当 $\lambda\in(0.4,0.6]$时,$A_\lambda=(1,1,1,0)$,$\lambda A_\lambda=(\lambda,\lambda,\lambda,0)$;

当 $\lambda\in(0.6,0.8]$时,$A_\lambda=(1,0,1,0)$,$\lambda A_\lambda=(\lambda,0,\lambda,0)$;

当 $\lambda\in(0.8,0.9]$时,$A_\lambda=(1,0,0,0)$,$\lambda A_\lambda=(\lambda,0,0,0)$.

故

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda=(0.4,0.4,0.4,0.4)\cup(0.6,0.6,0.6,0)$$

$$\cup(0.8,0,0.8,0)\cup(0.9,0,0,0)$$
$$=(0.9,0.6,0.8,0.4)=A.$$

类似于定理 1.4.5 的证明,我们有如下分解定理Ⅱ及其推论.

定理 1.4.6(分解定理Ⅱ)　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,则

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{S\lambda}. \tag{1.4.21}$$

推论 1.4.2　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,则 $\forall u\in U$,有

$$A(u)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid u\in A_{S\lambda}\}. \tag{1.4.22}$$

分解定理Ⅱ中的指标集[0,1]可用[0,1]中的有理数集 **Q** 来代替,即有下面推论.

推论 1.4.3　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,则

$$A=\bigcup_{\lambda\in\mathbf{Q}}\lambda A_{S\lambda}, \tag{1.4.23}$$

其中 **Q** 为[0,1]中的有理数集.

更一般地,我们有如下结论.

定理 1.4.7(分解定理Ⅲ)　设 $A\in\mathscr{F}(U)$,令

$$H:[0,1]\longrightarrow\mathscr{P}(U)$$
$$\lambda\longmapsto \mathrm{H}(\lambda)$$

满足:$\forall\lambda\in[0,1]$, $A_{S\lambda}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$,则

(1) $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$; (1.4.24)

(2) 对 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$, $\lambda_1\leqslant\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$;

(3) $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha), \tag{1.4.25}$$
$$A_{S\lambda}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha). \tag{1.4.26}$$

这里约定 $\bigcup_{t\in\varnothing}A^t=\varnothing$, $\bigcap_{t\in\varnothing}A^t=U$,其中 A^t 是 U 中的经典集合.

证明　(1) 因为 $\forall\lambda\in[0,1]$, $A_{S\lambda}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$,所以 $\forall\lambda\in[0,1]$, $\lambda A_{S\lambda}\subseteq\lambda H(\lambda)\subseteq\lambda A_\lambda$,从而

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_{S\lambda}\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda.$$

根据定理 1.4.5 和定理 1.4.6,上式两端均为 A,故

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

(2) 首先证明 $\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow A_{\lambda_2}\subseteq A_{S\lambda_1}$. 事实上,

$$u\in A_{\lambda_2}\Rightarrow A(u)\geqslant\lambda_2>\lambda_1\Rightarrow u\in A_{S\lambda_1},$$

从而 $\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq A_{S\lambda_1}\supseteq A_{\lambda_2}\supseteq H(\lambda_2)$.

(3) 仅证式(1.4.26),式(1.4.25)的证明留给读者.

若 $\lambda>0$,则 $\forall\alpha>\lambda$,有

$$H(\alpha)\subseteq A_\alpha\subseteq A_{S\lambda}\Rightarrow\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\subseteq A_{S\lambda}.$$

反之,由式(1.4.8),有

$$H(\alpha)\supseteq A_{S\alpha}\Rightarrow\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)\supseteq\bigcup_{\alpha>\lambda}A_{S\alpha}=\mathrm{A}_{S(\wedge_{\alpha>\lambda}\alpha)}=A_{S\lambda}.$$

故得　$A_{S\lambda}=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$.　□

由定理 1.4.7 及推论 1.4.1 和 1.4.2 可得如下推论.

推论 1.4.4 设 H 满足定理 1.4.7 的条件,则 $\forall u \in U$,

$$A(u) = \bigvee \{\lambda \in [0,1] \mid u \in H(\lambda)\}. \tag{1.4.27}$$

注 1.4.2 在分解定理Ⅲ中,$H(\lambda)$不一定是 A_λ 或 $A_{S\lambda}$,只要在二者之间即可. 特别当 $H(\lambda)$取 A_λ 或 $A_{S\lambda}$时,分解定理Ⅲ就成为分解定理Ⅰ或Ⅱ. 因此,分解定理Ⅰ和Ⅱ是分解定理Ⅲ的特例.

1.4.4 表现定理

定理 1.4.7 中给出的映射

$$H: [0,1] \longrightarrow \mathscr{P}(U)$$

是一种取值为集合的映射,称之为集合值映射. 集合值映射在模糊数学、数理经济学、运筹学、微分方程的定性理论等学科中具有广泛的应用. 下面介绍一种特殊的集合值映射,称之为集合套,这在模糊集理论的研究中起着重要作用.

定义 1.4.4 设集合值映射

$$H: [0,1] \longrightarrow \mathscr{P}(U),$$
$$\lambda \longmapsto H(\lambda).$$

若 H 具有性质:$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$,则称 H 为 U 上的集合套. U 上的集合套的全体记为 $\mathscr{U}(U)$.

显然,定理 1.4.7 中给出的集合值映射是一个集合套,任一个模糊集 A 的截集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in [0,1]}$ 和强截集族 $\{A_{S\lambda}\}_{\lambda \in [0,1]}$ 也都是集合套.

分解定理Ⅲ告诉我们,一个模糊集可以由其自身分解出的集合套而"拼成". 下面将介绍的表现定理则表明:任何一个集合套都能拼成一个模糊集.

定理 1.4.8(表现定理Ⅰ) 设 H 为 U 上的任何一个集合套,则

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda)$$

是 U 上的一个模糊集,且 $\forall \lambda \in [0,1]$,有

(1) $A_{S\lambda} = \bigcup_{\alpha > \lambda} H(\alpha)$;

(2) $A_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} H(\alpha)$.

证明 因 $\forall \lambda \in [0,1]$,$H(\lambda) \in \mathscr{P}(U)$,而 $\lambda \mathrm{H}(\lambda) \in \mathscr{F}(U)$,故 $\bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda) \in \mathscr{F}(U)$,记

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda H(\lambda).$$

根据定理 1.4.7,欲证(1)和(2),只须证 $\forall \lambda \in [0,1]$,$A_{S\lambda} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$ 即可.

因为
$$\begin{aligned} u \in A_{S\lambda} &\Rightarrow \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge H(\alpha)](u) > \lambda \\ &\Rightarrow \exists \lambda_0 \in [0,1],\text{使 } \lambda_0 \wedge H(\lambda_0)(u) > \lambda \\ &\Rightarrow \lambda_0 > \lambda,\text{且 } H(\lambda_0)(u) = 1 \\ &\Rightarrow u \in H(\lambda_0) \subseteq H(\lambda). \end{aligned}$$

另一方面,

$$u\in H(\lambda)\Rightarrow H(\lambda)(u)=1$$
$$\Rightarrow \bigvee_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge H(\alpha)](u)\geqslant\lambda\wedge H(\lambda)(u)=\lambda$$
$$\Rightarrow A(u)\geqslant\lambda\Rightarrow u\in A_\lambda.$$

所以 $A_{S\lambda}\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda,\forall\lambda\in[0,1]$. □

注 1.4.3　表现定理 Ⅰ 为我们提供一种构造模糊集的有效方法,即设 $H\in\mathscr{U}(U)$,则 $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\in\mathscr{F}(U)$,其隶属函数为

$$A(u)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid u\in H(\lambda)\},\qquad u\in U.\tag{1.4.28}$$

例 1.4.3　设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$,给定 U 上一个集合套 H 如下:

$\lambda=0$:　　$H(\lambda)=(1,1,1,1,1)$;

$0<\lambda<0.2$:　　$H(\lambda)=(0,1,1,1,1)$;

$0.2\leqslant\lambda\leqslant0.5$:　$H(\lambda)=(0,1,0,1,1)$;

$0.5<\lambda\leqslant0.8$:　$H(\lambda)=(0,1,0,1,0)$;

$0.8<\lambda\leqslant1$:　　$H(\lambda)=(0,0,0,1,0)$.

则由式(1.4.28)可得

$$A(u_1)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid u_1\in H(\lambda)\}=0,$$
$$A(u_2)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid u_2\in H(\lambda)\}=\bigvee_{\lambda\in[0,0.8]}\lambda=0.8,$$
$$A(u_3)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]\mid u_3\in H(\lambda)\}=\bigvee_{\lambda\in[0,0.2)}\lambda=0.2.$$

同理可得 $A(u_4)=1,A(u_5)=0.5$,故由所给集合套 H 得到的模糊集合为

$$A=(0,\ 0.8,\ 0.2,\ 1,\ 0.5).$$

注 1.4.4　表现定理 Ⅰ 可进一步推广,下面介绍一种推广形式.

定义 1.4.5　在 U 上的集合套族 $\mathscr{U}(U)$ 中定义并($\cup$)、交($\cap$)、补($'$)运算如下:

(1) 设 $H,H_1,H_2\in\mathscr{U}(U)$,则对 $\lambda\in[0,1]$,定义

$$(H_1\cup H_2)(\lambda)=H_1(\lambda)\cup H_2(\lambda);\tag{1.4.29}$$
$$(H_1\cap H_2)(\lambda)=H_1(\lambda)\cap H_2(\lambda);\tag{1.4.30}$$
$$H'(\lambda)=(H(1-\lambda))'.\tag{1.4.31}$$

(2) 设 T 为任意指标集,$\{H_t\mid t\in T\}\subseteq\mathscr{U}(U)$,则对 $\lambda\in[0,1]$,定义

$$\left(\bigcup_{t\in T}H_t\right)(\lambda)=\bigcup_{t\in T}H_t(\lambda);\tag{1.4.32}$$
$$\left(\bigcap_{t\in T}H_t\right)(\lambda)=\bigcap_{t\in T}H_t(\lambda).\tag{1.4.33}$$

定理 1.4.9　对于任意 $H\in\mathscr{U}(U)$ 及 $\lambda\in[0,1]$,有

$$(1)\ \bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)=\bigcup_{\alpha>\lambda}\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta);\tag{1.4.34}$$
$$(2)\ \bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=\bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\beta>\alpha}H(\beta).\tag{1.4.35}$$

证明　(1) 因对于任意 $\beta<\alpha,H(\alpha)\subseteq H(\beta)$,从而有

$$H(\alpha)\subseteq\bigcap_{\beta<\alpha}H(\beta).$$

故

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha>\lambda} \bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta).$$

反之,对于任意 $\alpha>\lambda$,存在 γ 使 $\alpha>\gamma>\lambda$. 若 $x\in \bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta)$,则 $x\in H(\gamma)\subseteq \bigcup_{\alpha^*>\lambda} H(\alpha^*)$,从而有 $\bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta) \subseteq \bigcup_{\alpha^*>\lambda} H(\alpha^*)$,故

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} \bigcap_{\beta<\alpha} H(\beta) \subseteq \bigcup_{\alpha^*>\lambda} H(\alpha^*) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha).$$

(2) 类似可证. □

定义 1.4.6 设 $H_1, H_2 \in \mathscr{U}(U)$,若 $\forall \lambda \in [0,1]$,有

$$\bigcup_{\alpha>\lambda} H_1(\alpha) = \bigcup_{\alpha>\lambda} H_2(\alpha), \tag{1.4.36}$$

则称 H_1 与 H_2 等价,记作 $H_1 \sim H_2$.

由定理 1.4.9 和定义 1.4.6 可得

推论 1.4.5 设 $H_1, H_2 \in \mathscr{U}(U)$,则 $H_1 \sim H_2$ 当且仅当 $\forall \lambda \in [0,1]$,有

$$\bigcap_{\alpha<\lambda} H_1(\alpha) = \bigcap_{\alpha<\lambda} H_2(\alpha). \tag{1.4.37}$$

容易验证, $\sim$ 是 $\mathscr{U}(U)$ 上的一个等价关系,记

$$\mathscr{U}^*(U) = \{H^* \mid H \in \mathscr{U}(U)\} = \mathscr{U}(U)/\sim,$$

其中 $H^* = \{G \mid G \in \mathscr{U}(U), G \sim H\}$ 是 H 所在的等价类.

定理 1.4.10(表现定理Ⅱ) 令

$$T: \mathscr{U}^*(U) \longrightarrow \mathscr{F}(U)$$

$$H^* \longmapsto T(H^*) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda H(\lambda), \tag{1.4.38}$$

则 T 为从$(\mathscr{U}^*(U), \cup, \cap, ')$到$(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, ')$上的一一满射,且 $\forall \lambda \in [0,1]$,有

(1) $(T(H^*))_{S\lambda} \subseteq H(\lambda) \subseteq (T(H^*))_\lambda$; (1.4.39)

(2) $(T(H^*))_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} H(\alpha)$; (1.4.40)

(3) $(T(H^*))_{S\lambda} = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha)$. (1.4.41)

此证明留给读者作为练习.

1.5 模糊性的度量

由于模糊集是实现定量刻画模糊性对象的概念,而不同的模糊性对象的模糊程度是不一样的,于是不同的模糊集的模糊程度是有区别的. 那么,如何来定量刻画模糊集的模糊程度呢? 这是我们处理模糊概念与模糊信息时非常重要的指标.

设 A 为论域 U 上的一个模糊集,$u\in U$. 若隶属度 $A(u)$ 接近 1,则肯定的程度高,相应的模糊性就小;若 $A(u)$ 接近 0,则否定的程度高,相应的模糊性也就小;而若 $A(u)$ 在 0.5 的周围,则 u 对 A 的隶属关系最不稳定,相应的模糊性也就最大. 因此,如果我们用 $D(A)$ 来度量模糊集 A 的模糊性,则 $D(A)$ 应当满足下列条件:

(1) 若 A 为分明集，则 $D(A)=0$，即分明集的模糊程度为 0；

(2) 若 A 的隶属度恒为 0.5，则 $D(A)=1$，即隶属度恒为0.5的模糊集最模糊，这是因为此时 $A(u)=A'(u)$，无法判断 u 对 A 和 A'的归属问题；

(3) 若$|A(u)-0.5|$的值越大，则 $D(A)$越小，即越清晰；而若$|A(u)-0.5|$的值越小，则 $D(A)$越大，从而越模糊；

(4) $D(A)=D(A')$，即 A 与其补集 A'的模糊性相同.

由此我们给出如下公理化定义.

定义 1.5.1　设映射

$$D:\mathscr{F}(U)\longrightarrow[0,1]$$

满足下列 5 条性质：

(1) 清晰性：$D(A)=0$ 当且仅当 $A\in\mathscr{P}(U)$；

(2) 模糊性：$D(A)=1$ 当且仅当 $\forall u\in U, A(u)=0.5$；

(3) 单调性：若 $\forall u\in U$，$A(u)\leqslant B(u)\leqslant 0.5$，或者
$A(u)\geqslant B(u)\geqslant 0.5$，则 $D(A)\leqslant D(B)$；

(4) 对称性：$\forall A\in\mathscr{F}(U), D(A)=D(A')$；

(5) 可加性：$D(A\cup B)+D(A\cap B)=D(A)+D(B)$.

则称 D 为定义在 $\mathscr{F}(U)$上的**模糊度函数**，而称 $D(A)$为模糊集 A 的**模糊度**.

下面我们就论域 U 为有限集和无限集两种情况介绍几个常用的模糊度的计算公式.

1.5.1　有限论域上的模糊度

定理 1.5.1　设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，考虑映射

$$D:\mathscr{F}(U)\longrightarrow[0,1]$$

$$A\longmapsto D(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(u_i))\right),\tag{1.5.1}$$

其中 c_i 为正实数，而 $f_i:[0,1]\longrightarrow[0,+\infty)$满足

(1) $\forall x\in[0,1]$，$f_i(x)=f_i(1-x)$；

(2) $f_i(0)=0$；

(3) $f_i(x)$在$[0,0.5]$上严格递增.

记 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i f_i(0.5)$，$g:[0,a]\longrightarrow[0,1]$严格递增，且 $g(0)=0, g(a)=1$. 则 D 为 $\mathscr{F}(U)$上的模糊度函数.

证明　由条件(1)和(2)知，$\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $f_i(0)=f_i(1)=0$，且若 $A\in\mathscr{P}(U)$，则 $A(u_i)=0$ 或者 1. 故

$$D(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(A(u_i))\right)=g(0)=0.$$

反之,若 $A\in\mathscr{F}(U)$,且 $D(A)=0$,则必有

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(A(u_i))=0,$$

从而 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,$A(u_i)=0$ 或者 1,即 $A\in\mathscr{P}(U)$,于是,清晰性成立.

设 $\forall u\in U$, $A(u)=0.5$,则

$$D(A)=g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(0.5)\right)=g(a)=1.$$

反之,若 $D(A)=1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f(A(u_i))=a=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(0.5),$$

从而 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,$A(u_i)=0.5$. 于是,模糊性也成立.

同理可证单调性、对称性和可加性. □

下面我们利用定理 1.5.1 给出几种常用模糊度的计算公式.

例 1.5.1 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$A\in\mathscr{F}(U)$ 且

$$D_p(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|A(u_i)-A_{0.5}(u_i)|^p\right]^{1/p}, \tag{1.5.2}$$

其中 $p>0$,则 $D_p(A)$ 为 A 的模糊度.

证明 设 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,$c_i=1$,且

$$f_i(x)=\left|0.5-|0.5-x|\right|^p,$$

则 $f_i(1-x)=f_i(x)$ 且 $f_i(0)=0$. 因 $\forall x_1,x_2\in[0,0.5]$ 且 $x_1<x_2$,有

$$f_i(x_1)=(x_1)^p<(x_2)^p=f(x_2),$$

故 $f_i(x)$ 在 $[0, 0.5]$ 上严格递增. 又 $f_i(0.5)=1/2^p$,从而

$$a=\sum_{i=1}^{n} f_i(0.5)=n/2^p.$$

令 $g(x)=2\left(\frac{x}{n}\right)^{1/p}$,则 $g(0)=0$,而 $g(a)=1$,故 $g:[0, a]\longrightarrow[0, 1]$ 严格递增. 于是,由定理 1.5.1 知 $D_p(A)$ 为 A 的模糊度.

通常称由式(1.5.2)确定的 $D_p(A)$ 为 A 的 Minkowski 模糊度. 特别地, 当 $p=1$ 时,称

$$D_1(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|A(x_i)-A_{0.5}(x_i)\right| \tag{1.5.3}$$

为 A 的 Hamming 模糊度,或称为 Kaufmann 模糊指标.

当 $p=2$ 时,称

$$D_2(A)=\frac{2}{n^{1/2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|A(x_i)-A_{0.5}(x_i)\right|^2\right]^{1/2} \tag{1.5.4}$$

为 A 的 Euclid 模糊度.

例 1.5.2　设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$,$A=(0.6,0.9,0.7,0.4)$为 U 上的模糊集,求 A 的 Hamming 模糊度和 Euclid 模糊度.

解　因 $A_{0.5}=(1,1,1,0)$,故由式(1.5.3)知

$$D_1(A)=\frac{2}{4}(|0.6-1|+|0.9-1|+|0.7-1|+|0.4-0|)$$

$$=\frac{1}{2}(0.4+0.1+0.3+0.4)=0.6.$$

而由式(1.5.4)得

$$D_2(A)=\frac{2}{\sqrt{4}}(|0.6-1|^2+|0.9-1|^2+|0.7-1|^2+|0.4-0|^2)^{1/2}$$

$$=(0.16+0.01+0.09+0.16)^{1/2}\approx 0.648.$$

一般说来,用 Hamming 模糊度计算较为简单,但误差较大,而用 Euclid 模糊度计算虽然复杂些,但较精确.

1974 年法国学者 Delaca 利用 Shannon 函数

$$S(x)=\begin{cases}-x\ln x-(1-x)\ln(1-x), & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,\ 1\end{cases}\tag{1.5.5}$$

给出了刻画模糊集的模糊程度的另一个数量指标如下.

定理 1.5.2　设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$A\in\mathscr{F}(U)$,则

$$D(A)=H(A)=\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}S(A(u_i))\tag{1.5.6}$$

为 A 的模糊度,$H(A)$通常称为 A 的模糊熵,其中 $S(x)$为 Shannon 函数.

证明　在定理 1.5.1 中,令 $c_i=1$, $f_i(x)=S(x)(i=1,2,\cdots,n)$, $\forall x\in[0,1]$,而 $g(u)=\frac{u}{n\ln 2}$即可证之.　□

例 1.5.3　设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$,$A=(0.1,0.3,0.7,0.8,0.5)$为 U 上的一个模糊集,求 A 的模糊熵 $H(A)$.

解　由式(1.5.5) 得

$S(A(u_1))=-0.1\ln(0.1)-(1-0.1)\ln(1-0.1)=0.33,$

$S(A(u_2))=-0.3\ln(0.3)-(1-0.3)\ln(1-0.3)=0.61,$

$S(A(u_3))=-0.7\ln(0.7)-(1-0.7)\ln(1-0.7)=0.61,$

$S(A(u_4))=-0.8\ln(0.8)-(1-0.8)\ln(1-0.8)=0.50,$

$S(A(u_5))=-0.5\ln(0.5)-(1-0.5)\ln(1-0.5)=0.69,$

从而由式(1.5.6)知 A 的模糊熵为

$$H(A)=\frac{1}{5\ln 2}(0.33+0.61+0.61+0.5+0.69)\approx 0.79.$$

1.5.2 无限论域上的模糊度

设 $U=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$, $A\in\mathscr{F}(U)$,则 A 的模糊度可由下式给出:

$$D(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}|A(u)-A_{0.5}(u)|\,\mathrm{d}u \tag{1.5.7}$$

或者

$$D(A)=\int_{-\infty}^{\infty}(-A(u)\ln A(u)-A'(u)\ln A'(u))\,\mathrm{d}u, \tag{1.5.8}$$

其中由式(1.5.7)确定的 $D(A)$ 称为 A 的**模糊指标**,记作 $K(A)=D(A)$,而由式(1.5.8)确定的 $D(A)$ 称为 A 的**模糊熵**,记作 $H(A)=D(A)$.

一般地,若 $U=\mathbf{R}^n$, $A\in\mathscr{F}(U)$,则

$$D(A)=\int_{\mathbf{R}^n}|A(u)-A_{0.5}(u)|\,\mathrm{d}u, \tag{1.5.9}$$

或者

$$D(A)=\int_{\mathbf{R}^n}(-A(u)\ln A(u)-A'(u)\ln A'(u))\,\mathrm{d}u. \tag{1.5.10}$$

例 1.5.4 设 $U=(-\infty,+\infty)$, A 为 U 上的正态模糊集,即

$$A(u)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{u-\mu}{\alpha}\right)^2},\qquad -\infty<u<+\infty.$$

则 $A_{0.5}=[\mu-\alpha\sqrt{\ln 2},\ \mu+\alpha\sqrt{\ln 2}]$,故由式(1.5.7)得

$$D(A)=\int_{A_{0.5}}\left[1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{u-\mu}{\alpha}\right)^2}\right]\mathrm{d}u+\int_{A'_{0.5}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{u-\mu}{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}u.$$

令 $t=\sqrt{2}\dfrac{u-\mu}{\alpha}$, 则

$$\begin{aligned}
D(A)&=2\alpha\sqrt{\ln 2}-\int_{-\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 2}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+\int_{A'_{0.5}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\\
&=2\alpha\sqrt{\ln 2}-2\int_{-\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 2}}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+\alpha\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\\
&=2\alpha\sqrt{\ln 2}-2\alpha\sqrt{2\pi}(2\Phi(\sqrt{\ln 4})-1)+\alpha\sqrt{\pi}\\
&=\alpha(2\sqrt{\ln 2}+3\sqrt{\pi}-4\sqrt{\pi}\Phi(\sqrt{\ln 4})).
\end{aligned}$$

查标准正态分布函数表,可得

$$\Phi(\sqrt{\ln 4})=\Phi(1.177)=0.8805,$$

故

$$D(A)=\alpha(2\sqrt{\ln 2}-0.522\sqrt{\pi})=0.74\alpha.$$

注 1.5.1 关于模糊熵的其他计算公式,读者可参考范九伦的专著《模糊熵理论》[48],这里不再详述.